ProbleMATEMATICAmente 09 - 23 febbraio 2004

Sia C il cerchio unitario $x^2 + y^2 = 1$. Due punti, P e Q, sono scelti a caso, il primo sulla circonferenza C e il secondo all'interno di C, indipendentemente e uniformemente sul loro dominio. Sia R il rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati e di diagonale PQ.
Qual e' la probabilità che nessun punto di R cada all'esterno di C?

Risoluzione di:
Morasso Giovanni e Morasso Paolo
Classe 4B Informatica, ITIS "T. Sarrocchi" Siena

Per trovare la probabilità richiesta occorre determinare l'area del rettangolo che si ottiene tracciando le rette parallele agli assi cartesiani e passanti per il punto P, e dividere tale area per l'area del cerchio di raggio 1.
Si determina dapprima l'area del rettangolo PHOK, dove H e K sono i punti d'intersezione delle rette parallele agli assi rispettivamente con l'asse x e con l'asse y.

$$PH = |sen\,x|$$

$$OH = |cos\,x|$$

Pertanto $$Area(POHOK) = |sen\,x| \cdot |cos\,x|$$

e $$Area \quad cerchio \quad = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Ma il rettangolo PHOK è la quarta parte del rettangolo all'interno del quale deve stare il punto Q, affinché nessun punto del rettangolo R cada all'esterno di C, quindi la probabilità cercata è la seguente:

$$p = \frac{4 \cdot |sen\,x| \cdot |cos\,x|}{\pi}$$

Inoltre si può verificare che $0 \le p \le \frac{2}{\pi}$.

Si può infatti vedere che quando il punto P appartiene agli assi cartesiani il rettangolo degenera nel diametro della circonferenza C, quindi $p = 0$; mentre quando il punto P appartiene alla bisettrice del primo e terzo quadrante e quando appartiene alla bisettrice del secondo e quarto quadrante il rettangolo diventa un quadrato di lato $\sqrt{2}$, quindi $p = \frac{2}{\pi}$.

La figura si può vedere nel file di Cabri allegato.