Problema di Febbraio 2004

Sia C il cerchio unitario $x^2 + y^2=1$. Due punti, P e Q, sono scelti a caso, il primo sulla circonferenza C e il secondo all'interno di C, indipendentemente e uniformemente sul loro dominio.
Sia ® il rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati e di diagonale PQ.
Qual è la probabilità che nessun punto di ® cada all'esterno di C?

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali, il cerchio dato ha centro nell'origine e raggio = 1.
Consideriamo P punto qualsiasi dell'arco di circonferenza che si trova nel primo quadrante.
Noi limitiamo lo studio a P(x;y) con $0 <= x <= 1$ e $0 <= y <= 1$, ma per motivi di simmetria, le considerazioni che seguono sono valide per qualunque altro punto della circonferenza.
Consideriamo il rettangolo ABCP, inscritto nella circonferenza, avente un vertice nel punto dato P e i lati paralleli agli assi cartesiani, tutti i punti di tale rettangolo sono interni al cerchio.
Se il punto Q si sceglie interno al rettangolo ABCP (vedi fig. 1), si ha che:

1. Il segmento PQ è costituito da punti interni al rettangolo ABCP
2. Le proiezioni PH e PF del segmento PQ sui lati del rettangolo appartengono ai lati PA e PC
3. Le proiezioni e i segmenti di proiezione determinano il rettangolo ®, i cui lati sono interni al rettangolo ABCP
4. Essendo il rettangolo una figura convessa, qualunque punto del rettangolo ® è interno al rettangolo ABCP e quindi interno al cerchio.

Se il punto Q si sceglie interno al cerchio, ma esterno al rettangolo ABCP (vedi fig. 2),, si ha che:

1. Il segmento PQ è costituito da punti esterni al rettangolo ABCP
2. Il segmento PQ forma con i lati PA e PC del rettangolo due angoli che risultano essere uno acuto e un ottuso, di conseguenza quando l'angolo è acuto, la proiezione di P sul lato è un punto del lato stesso, quando l'angolo è ottuso, la proiezione di P sul lato sarà un prolungamento del lato e poiché il lato del rettangolo è una corda della circonferenza, tutti i punti del suo prolungamento sono esterni al cerchio.
3. Il rettangolo ® sarà costituito da punti che cadono all'interno e da punti che cadono all'esterno del cerchio.

Ai fini del calcolo della probabilità "che nessun punto di ® cada all'esterno del cerchio", i casi totali sono dati dalla possibile scelta di Q tra tutti i punti del cerchio, i casi favorevoli sono dati dalla scelta di Q limitata ai punti del cerchio che siano anche punti del rettangolo ABCP, cioè:
Casi favorevoli = area del rettangolo ABCP = 4xy
Casi totali = area del cerchio di raggio 1 = $1^2 \times \pi = \pi$

Probabilità: $P = 4xy/\pi$

Essendo x e y legati dalla relazione $x^2 + y^2=1$, possiamo ricavare la probabilità in funzione della sola x; otteniamo

$$P(x) = 4x\sqrt{(1-x^2)} / \pi$$

Studiando la funzione P(x) si trova che essa ha un massimo per $x = \sqrt{2} / 2$, valore per il quale si ha $y = \sqrt{2} / 2$.
Per $P(\sqrt{2} / 2; \sqrt{2} / 2)$ il rettangolo ABCP diventa il quadrato inscritto nella circonferenza e il valore massimo della probabilità cercata è:

$$P_{max} = 2 / \pi$$

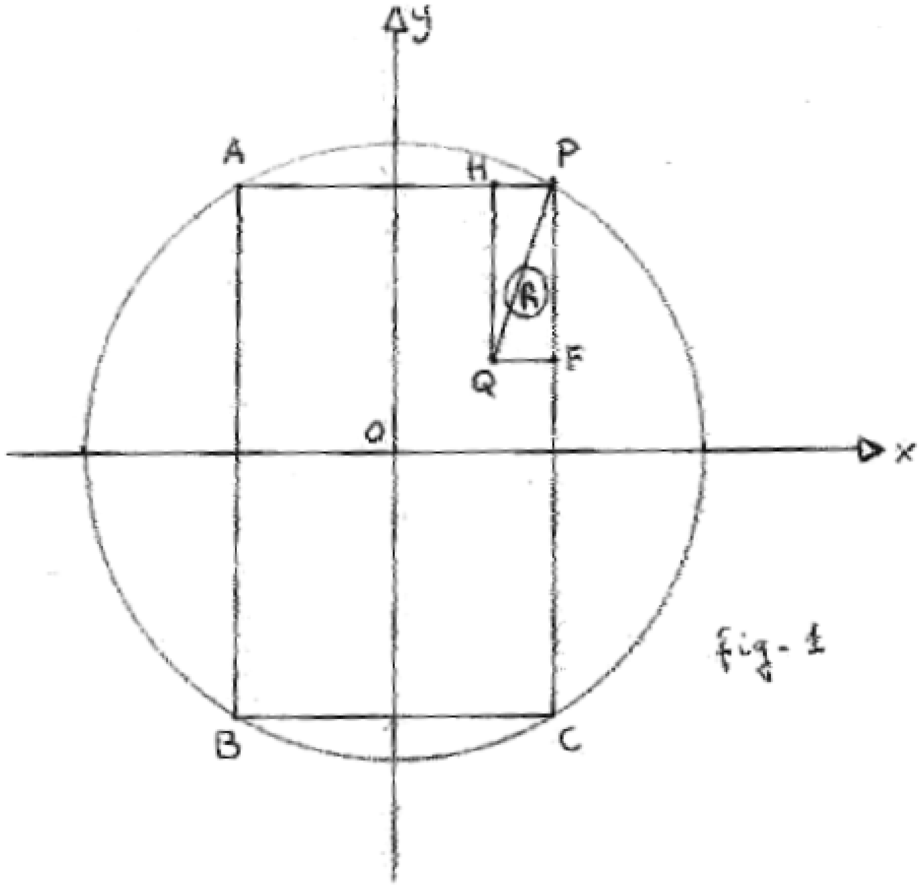

fig. 1

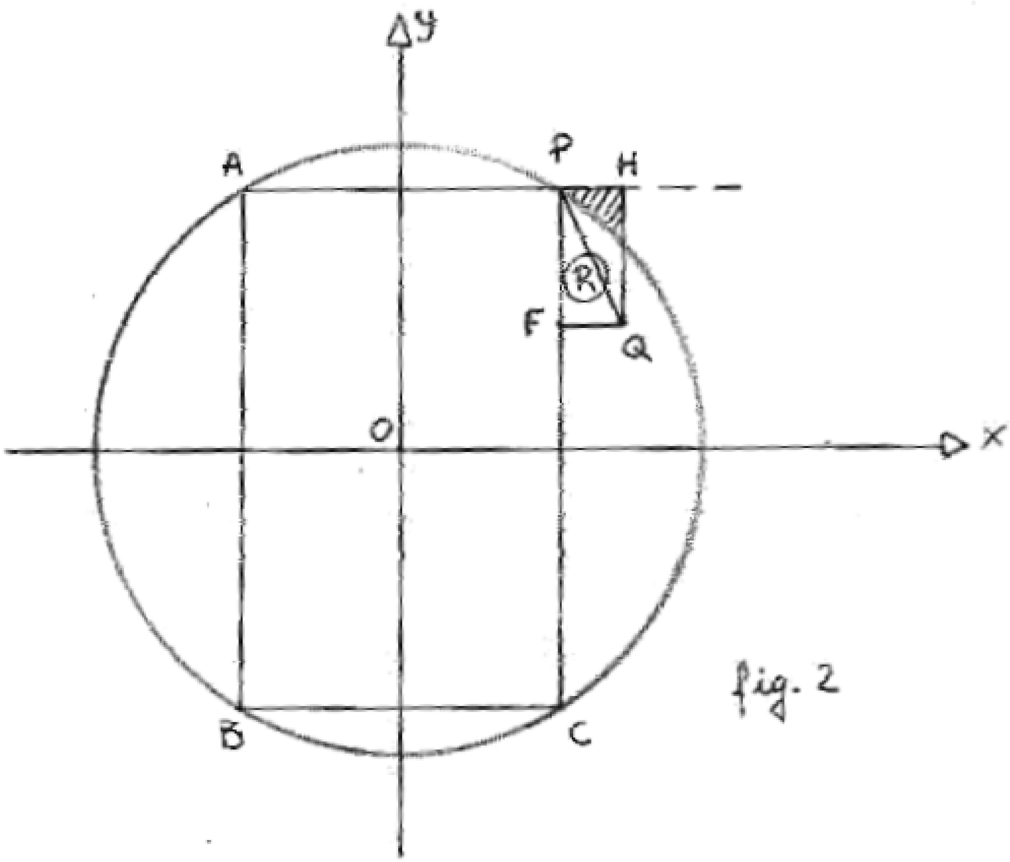

fig. 2

Mario Di Dio
Classe V B
Liceo Scientifico "P. Farinato" - Enna