Matematicamente - problema di febbraio 2004

Soluzione di Francesco D'Aurizio

5Apni Liceo Scientifico R.Mattioli - Vasto

Preso un punto P sulla circonferenza, il luogo dei punti Q per cui il rettangolo di diagonale PQ ed assi paralleli agli assi coordinati "non deborda" è il rettangolo inscritto nella circonferenza, con assi paralleli agli assi coordinati ed un vertice in P. Data la simmetria del problema, possiamo studiare il tutto limitatamente al primo quadrante. Scegliamo un punto P di coordinate $(\cos(\alpha);\sin(\alpha))$ con $0 \le \alpha \le \pi/2$.
Il rettangolo "dei punti Q favorevoli" avrà vertici in $(0;0)$ $(\cos(\alpha);0)$ $(\cos(\alpha);\sin(\alpha))$ $(0;\sin(\alpha))$. In funzione di α, la probabilità che cerchiamo sarà dunque

$$p(\alpha) = \frac{\textit{Area del rettangolo}}{\textit{Area del quarto di circonferenza}} = \frac{4}{\pi}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Ciò implica che la probabilità media complessiva sarà

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} p(\alpha)\, d\alpha = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\alpha)\, d\alpha = \frac{4}{\pi^2}$$

Ovvero circa il 40,53%.

Francesco D'Aurizio