Marco Sandano
V B, Liceo Scientifico “G.Galilei”, Adria (Rovigo)

Il problema di Dicembre 2003

Si consideri una generica corda AB della parabola y^2=4ax tale che congiungendo i suoi estremi con il vertice si formi un angolo retto.

Dimostrare che tali corde passano tutte per uno stesso punto.

Prima Dimostrazione :

Tutte le corde che soddisfano le condizioni sopra indicate sono certamente individuate dalle intersezioni tra tutte le coppie di rette perpendicolari tra loro nel vertice V della parabola, e la parabola stessa.
Perciò, considerando α l’angolo tra un’ipotetica retta passante per V e l’asse x (fissiamo $0<\alpha<\pi/2$, vista la simmetria della parabola rispetto all’asse x, quindi $\cos\alpha>0$, $\operatorname{sen}\alpha>0$, $tg\alpha>0$) , le coordinate degli estremi di tali corde potranno essere determinate attraverso questi sistemi:

$$y=(tg\alpha)x$$
$$y^2=4ax$$

le cui soluzioni sono:

$$x=\frac{4a}{tg^2\alpha}$$
$$y=\frac{4a}{tg\alpha}$$

e

$$y=-\frac{1}{tg\alpha}x$$
$$y^2=4ax$$

le cui soluzioni sono:

$$x=4atg^2\alpha$$
$$y=-4atg\alpha$$

Perciò gli estremi delle corde hanno coordinate

$$P\left(4atg^2\alpha;-4atg\alpha\right)$$

$$Q\left(\frac{4a}{tg^2\alpha};\frac{4a}{tg\alpha}\right)$$

Ora, sapendo che V(0; 0), calcoliamo la lunghezza dei lati del tr. rettangolo VPQ:

$$\overline{P}\,\overline{V} = \sqrt{(4a)^2 tg^4\alpha + (4a)^2 tg^2\alpha} = |4a| tg\alpha \sqrt{tg^2\alpha + 1}$$

$$\overline{Q}\,\overline{V} = \sqrt{\frac{(4a)^2 + (4a)^2 tg^2\alpha}{tg^4\alpha}} = \frac{|4a|}{tg^2\alpha}\sqrt{tg^2\alpha + 1}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{tg^2 + 1} \cdot \frac{|4a|}{tg^2\alpha} \cdot \sqrt{tg^6 + 1}$$

E quindi, ponendo:

$$\beta = V\hat{P}Q$$

calcoliamo:

$$sen\beta = \frac{\overline{Q}\,\overline{V}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\sqrt{tg^6 + 1}}$$

Definiamo H, il punto di intersezione delle corde con l'asse x. Dimostriamo ora che la misura di VH è costante al variare dell'angolo α, e quindi delle corde.

$$\gamma = V\hat{H}P$$

$$sen\gamma = sen(\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta) = sen\alpha \cdot sen\beta + \cos\beta \cdot \cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{tg^6\alpha}{tg^6\alpha + 1}} + \frac{sen\alpha}{\sqrt{tg^6\alpha + 1}} = \frac{\sqrt{tg^6\alpha} \cdot \cos\alpha + sen\alpha}{\sqrt{tg^6\alpha + 1}}$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo VHP si ha:

$$\frac{\overline{VH}}{sen\beta}=\frac{\overline{PV}}{sen(\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta)}$$

$$\overline{VH}=\frac{|4atg\alpha|\sqrt{tg^2\alpha+1}}{\sqrt{tg^6\alpha}\cdot\cos\alpha+sen\alpha}=\frac{|4a|\cdot\sqrt{tg^2\alpha+1}}{\cos\alpha(tg^2\alpha+1)}=\frac{|4a|}{\cos\alpha\cdot\sqrt{tg^2\alpha+1}}=$$

$$=\frac{|4a|}{\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}=|4a|$$

Ciò significa che le corde, al variare di α, si incontrano tutte nel punto H(4a;0).

Seconda Dimostrazione :

I punti della parabola saranno del tipo:

$$P(\frac{y^2}{4a};y)$$

Perciò presi due ipotetici punti:

$$P(\frac{y^2}{4a};y)$$

$$Q(\frac{y_1^2}{4a};y_1)$$

Visto che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa divide quest'ultima in due segmenti isometrici alla mediana stessa, dovrà essere:

$$\frac{\sqrt{(y-y_1)^2+(\frac{y^2-y_1^2}{4a})^2}}{2}=\sqrt{(\frac{y+y_1}{2})^2+(\frac{y^2+y_1^2}{8a})^2}$$

$$(y-y_1)^2+(\frac{y^2-y_1^2}{4a})^2=(y+y_1)^2+(\frac{y^2+y_1^2}{4a})^2$$

$$4\cdot16a^2(y-y_1)^2+4(y^2-y_1^2)^2-4\cdot16a^2(y+y_1)^2-4(y^2+y_1^2)^2=0$$

$$4\cdot16a^2(y-y_1)^2+4(y^2-y_1^2)^2-4\cdot16a^2(y+y_1)^2-\left[(y+y_1)^2+(y-y_1)^2\right]^2=0$$

$$4\cdot16a^2(y-y_1)^2+2(y^2-y_1^2)^2-4\cdot16a^2(y+y_1)^2-(y+y_1)^4-(y-y_1)^4=0$$

$$\left[(y+y_1)^2-(y-y_1)^2\right]\left[4\cdot16a^2+(y+y_1)^2-(y-y_1)^2\right]=0$$

Cioè:

$y = y_1 = 0$

oppure:

$y = \dfrac{-16a^2}{y_1}$

Le coordinate degli estremi delle corde saranno perciò:

$P(\dfrac{y^2}{4a}; y)$

$Q\left(\dfrac{(4a)^3}{y^2}; \dfrac{-16a^2}{y}\right)$

Calcoliamo l'equazione del fascio di rette passante per questi due punti(y è il parametro, x2 e y2 le variabili):

$$\frac{y_2 + \frac{16a^2}{y}}{y + \frac{16a^2}{y}} = \frac{x_2 - \frac{(4a)^3}{y^2}}{\frac{y^2}{4a} - \frac{(4a)^3}{y^2}}$$

$$(y_2 + \frac{16a^2}{y})\left[y^4 - (4a)^4\right] = (x_2 - \frac{(4a)^3}{y^2}) \cdot 4ay \cdot \left[y^2 + (4a)^2\right]$$

$$(y_2 + \frac{16a^2}{y})\left[y^2 - (4a)^2\right] = 4ax_2 y - \frac{(4a)^4}{y}$$

$$y_2\left[y^2 - (4a)^2\right] + (4a)^2 y - 4ax_2 y = 0$$

$$y\left(y_2 y + (4a)^2 - 4ax_2\right) - (4a)^2 y_2 = 0$$

Il punto ricercato è l'intersezione tra le rette generatrici del fascio. Le soluzioni del sistema sono:

$y_2 = 0$

$x_2 = 4a$

Il punto ricercato è P(4a:0).