# ITIS GALILEO FERRARIS

***San Giovanni Valdarno – Arezzo***

**Alunno: Giusti Andrea**
**Classe: IV (specializzazione elettronica e telecomunicazioni)**

*La dimostrazione è nelle pagine che seguono*

# Il problema di Dicembre 2003

Si consideri una generica corda AB della parabola Y^2=4ax tale che congiungendo i suoi estremi con il vertice si formi un angolo retto.

Dimostrare che tali corde passano tutte per uno stesso punto.

## ***Dimostrazione***

La parabola di equazione y^2=4ax ha vertice nell'origine ed asse parallelo all'asse x.

Per ottenere un angolo retto congiungendo gli estremi di una corda AB della parabola con il vertice, come indicato nel testo del problema, occorre che le due rette (*r* e *t* nella dimostrazione che segue), che passano rispettivamente per l'origine (vertice) e l'estremo A e per l'origine e l'estremo B, siano perpendicolari tra loro.

Le equazioni di queste due rette generiche sono:

$r)\ y = bx$

$t)\ y = -\frac{1}{b}x$

L'estremo A della corda si trova trovando l'intersezione tra la retta *r* e la parabola. Si risolve pertanto il sistema formato dalle equazioni di questi due luoghi geometrici:

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ y = bx \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2x^2 = 4ax \\ y = bx \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2x^2 - 4ax = 0 \\ y = bx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{12} = 0; \frac{4a}{b^2} \\ y = bx \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_A = \frac{4a}{b^2} \\ y_A = \frac{4a}{b} \end{cases} \end{matrix}$$

Come si vede la retta passa per l'origine (che è anche il vertice della parabola) e incontra la parabola in due punti di cui uno è il vertice e l'altro l'estremo A della corda che si vuole individuare.

L'estremo B della corda si trova risolvendo il sistema formato dall'equazione della parabola e quello della retta *t*.

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ y = -\dfrac{1}{b}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{b^2} = 4ax \\ y = -\dfrac{1}{b}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{b^2} - 4ax = 0 \\ y = -\dfrac{1}{b}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{12} = 0; 4b^2a \\ y = -\dfrac{1}{b}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = 4b^2a \\ y_B = -4ba \end{cases}$$

Anche in questo caso si può osservare che la retta incontra la parabola nell'origine come volevamo; il secondo punto trovato è l'estremo B della corda.

Gli estremi della corda sono dunque i punti A$\left(\dfrac{4a}{b^2}; \dfrac{4a}{b}\right)$ e B$\left(4b^2a; -4ab\right)$

Adesso si conoscono le coordinate dei due estremi della corda generica. Vogliamo trovare l'equazione della retta su cui giace la corda e per fare questo scriviamo l'equazione della retta che passa per i due estremi.

Ricordando la formula della retta che passa per due punti $\dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}$ otteniamo:

$$\frac{y - \dfrac{4a}{b}}{-4ba - \dfrac{4a}{b}} = \frac{x - \dfrac{4a}{b^2}}{4b^2a - \dfrac{4a}{b^2}}$$

$$\left(\frac{by - 4a}{b}\right) \cdot \left[-\frac{b}{4b^2a + 4a}\right] = \left(\frac{b^2x - 4a}{b^2}\right) \cdot \left[\frac{b^2}{4ab^4 - 4a}\right]$$

$$-\frac{by - 4a}{4a \cdot \left(b^2 + 1\right)} = \frac{b^2x - 4a}{4a \cdot \left(b^2 + 1\right) \cdot \left(b^2 - 1\right)}$$

$$-by = \frac{b^2x - 4a + 4a - 4ab^2}{b^2 - 1}$$

$$y = -\frac{b \cdot (x - 4a)}{b^2 - 1}$$

Questa è l'equazione della retta su cui giace la corda (la quale a sua volta rispetta le condizioni imposte dal problema) e quindi identificativa della corda stessa. Come si vede, oltre alle due variabili *x* e *y*, nell'equazione sono presenti due parametri. Il parametro *a* è caratteristico della parabola e non può essere variato. Il parametro *b* invece riguarda il coefficiente angolare delle rette *r* e *t* grazie alle quali abbiamo individuato i punti di intersezione tra la parabola e la corda. Corde differenti sono individuate da coppie di *r* e *t* diverse e quindi le rette su cui giacciono differiscono tra loro del solo parametro *b*.
Inoltre come si può vedere l'equazione della retta non esiste per $b=\pm 1$. In queste condizioni infatti la corda sarebbe il segmento che unisce i punti d'intersezione tra la parabola e le bisettrici del primo-terzo quadrante e secondo-quarto quadrante. Tale segmento giacerebbe su una retta parallela all'asse y e come noto un'equazione del tipo $y=mx+q$ non è in grado di descrivere tali rette.

Considerando quindi due corde generiche, diverse tra loro, di equazioni rispettivamente $y = -\frac{b_1 \cdot (x - 4a)}{b_1^2 - 1}$ e $y = -\frac{b_2 \cdot (x - 4a)}{b_2^2 - 1}$ troviamo il punto d'intersezione tra le due:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{b_1 \cdot (x - 4a)}{b_1^2 - 1} \\ y = -\dfrac{b_2 \cdot (x - 4a)}{b_2^2 - 1} \end{cases}$$

Sostituiamo la seconda equazione nella prima e sviluppiamo i calcoli su quest'ultima:

$$-\frac{b_2 \cdot (x - 4a)}{b_2^2 - 1} = -\frac{b_1 \cdot (x - 4a)}{b_1^2 - 1}$$

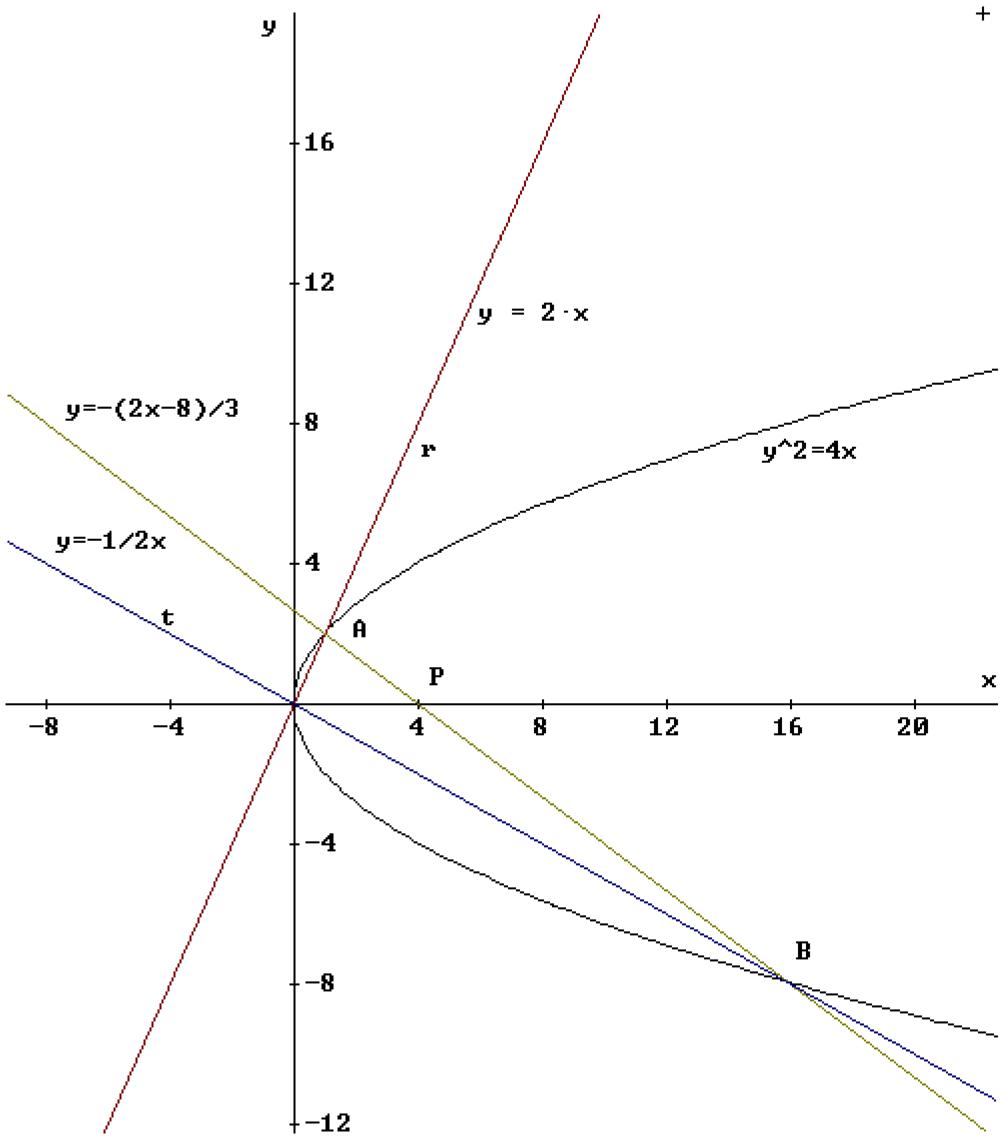
$$b_2b_1^2x - b_2x - b_2b_1^2 4a + b_2 4a = b_2^2b_1x - b_1x - b_2^2b_1 4a + b_1 4a$$

$$x \cdot (b_2b_1^2 - b_2 - b_2^2b_1 + b_1) = 4a \cdot (b_2b_1^2 - b_2 - b_2^2b_1 + b_1)$$

$$x = 4a$$

Portando a termine il sistema: $\begin{cases} x = 4a \\ y = 0 \end{cases}$

Il punto d'incontro tra le due corde è P(4*a*;0). Come si vede nelle coordinate del punto non si trovano i parametri *b*. Il punto quindi è indipendente dalle corde scelte e quindi unico come si voleva dimostrare. Tale punto è situato sull'asse di simmetria della parabola e la sua posizione su quest'asse dipende unicamente dal parametro *a* della parabola.




La rappresentazione soprastante è stata ottenuta considerando $a$=1 e $b$=2. La curva nera rappresenta la parabola. Il grafico rosso è la retta $r$ che incontra la parabola nel punto A. La retta $t$ è quella di colore blu che incontra la parabola nel punto B. La retta verde è quella su cui giace la corda. L'angolo sotteso tra $r$ e $t$ è retto. Si può notare nel grafico le equazioni di tali rette che rispettano quelle calcolate in maniera generale nella dimostrazione algebrica. La corda AB come dimostrato incontra l'asse x nel punto $4a$. Tale punto è anche il punto d'incontro di tutte le corde del tipo di quelle indicate dal problema (i cui estremi congiunti al vertice della parabola formano un angolo retto).