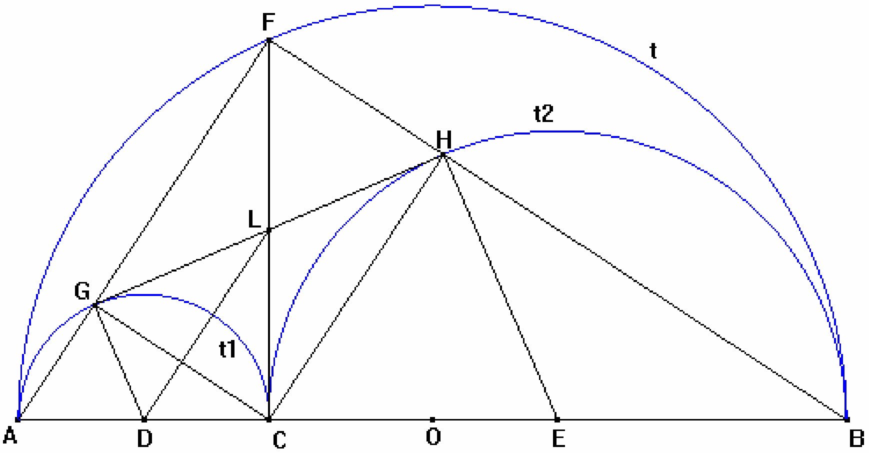
probleMATEMATICAmente

Problema di Ottobre 2002
Soluzione proposta da Daniele Urzì, classe V B, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Catania

Sia t una semicirconferenza di diametro AB e centro O e sia C un punto del segmento AB. Chiamiamo t_1 e t_2 le semicirconferenze, interne a t, di diametro rispettivamente AC e CB e centro rispettivamente D ed E. Nel *Libro dei lemmi*, Archimede chiama *arbèlos* la regione di piano compresa tra t, t_1, t_2. Sia F l'intersezione di t con la perpendicolare condotta da C ad AB.

In riferimento alla figura, essendo retti gli angoli AFB, AGC, CHB (perché inscritti in semicirconferenze), il quadrilatero FGCH è un rettangolo. La retta GH è tangente a t_1 e t_2: è semplicissimo dimostrare che i triangoli LGD, LCD sono uguali (hanno il lato LD in comune; DG=DC; LG=LC perché le diagonali FC e GH sono uguali e si tagliano scambievolmente a metà); l'angolo LCD è retto per cui DG è perpendicolare ad GH. In maniera analoga si dimostra che GH è tangente a t_2.

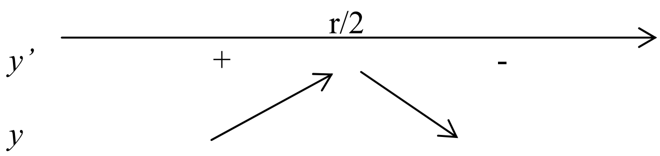


Sia r la misura del raggio OA. Indicando con x la misura variabile del raggio di t_1 ($0<x<r$), il raggio di t_2, come è ovvio, misura r-x. La misura dell'area dell'*arbélos* è

$$A=\frac{1}{2}\pi r^2-\left[\frac{1}{2}\pi x^2+\frac{1}{2}\pi\left(r-x\right)^2\right]=......=\pi\left(-x^2+rx\right).$$

Studiando il segno della derivata prima, massimizziamo la funzione di equazione $y=\pi\left(-x^2+rx\right)$:

$$y'=\pi\left(-2x+r\right)\quad;\qquad \pi\left(-2x+r\right)>0\quad\rightarrow\quad x<\frac{r}{2}$$



Dal grafico sopra si vede chiaramente che la funzione ammette massimo in $x=r/2$. Ciò significa che l'area dell'*arbélos* è massima quando il punto C coincide con il centro O di t. Avremo $A=\frac{\pi}{4}r^2$.

Senza utilizzare le derivate, si poteva osservare che $y=\pi\left(-x^2+rx\right)$ è l'equazione di una parabola che volge la concavità verso il basso e dunque il vertice $V\left(\frac{r}{2};\frac{\pi}{4}r^2\right)$ è il punto di ordinata massima.

Nel *Libro dei lemmi* Archimede dimostra alcune proprietà dell'*arbélos*, ad esempio la sua area è uguale a quella del cerchio di diametro FC (lo si può verificare dopo aver determinato la misura del segmento FC applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo AFB).