ProbleMATEMATICAmente

PROBLEMA DI OTTOBRE 2002

Soluzione di Simone Carli, classe V A Programmatori dell'ITCG "Ruffini" di Imperia.

Prima parte

Ho considerato un caso particolare, scegliendo un riferimento cartesiano con origine in B' ed attribuendo a B le coordinate (5,0) e al punto E le coordinate (1,0); dunque D(1/2,0), A(5/2,0), C(3,0). Calcolo CB=2; DE =1/2.

Una retta generica del piano ha equazione y=mx+p; perché sia tangente ad una circonferenza, la sua distanza dal centro deve essere uguale al raggio, perciò :

$\frac{|3m+p|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$ (condizione di tangenza aΓ_2)

$\frac{|(1/2)m+p|}{\sqrt{m^2+1}} = 1/2$ (condizione di tangenza aΓ_1); dunque ottengo il sistema

$\begin{cases} |3m+p| = 2\sqrt{m^2+1} \\ |(1/2)m+p| = (1/2)\sqrt{m^2+1} \end{cases}$ da cui

$\frac{|3m+p|}{2} = 2|(1/2)m+p| \quad \to \quad \frac{3m+p}{2} = +-2((1/2)m+p) \to \begin{cases} m = 3/4 \\ p = 1/4 \end{cases}$

oppure 0=4 (impossibile)

La retta tangente alle due semicirconferenze ha dunque equazione y=(3/4)x+(1/4)

Per determinare F , utilizzo la proprietà per cui il coefficiente angolare della retta DF è –(4/3)

Risolvo il sistema $\begin{cases} y = (3/4)x + (1/4 \\ \frac{y-0}{x-(1/2)} = -(4/3) \end{cases}$ ed ottengo F(1/5,2/5)

In modo analogo trovo H dal sistema $\begin{cases} y = (3/4)x + (1/4 \\ \frac{y-0}{x-3} = -(4/3) \end{cases}$ $\to$ H(9/5,8/5)

Trovo poi il punto di intersezione tra le rette B'F e BH. Sia I', così ottenuto:

- equazione della retta B'F : y=2x
- equazione della retta BH: y=(5/2)-(1/2)x
- sistema $\begin{cases} y = 2x \\ y = (5/2) - (1/2)x \end{cases}$

dunque I' (1,2)

Controllo se I'$\in \Gamma$, sostituendo le coordinate di I' nell'equazione di Γ (x-5/2)^2+y^2=25/4 .

Controllo se I'= I, calcolando le coordinate di I come soluzione del sistema tra l'equazione di Γ (x-5/2)^2+y^2=25/4e l'equazione x=1 della retta per E perpendicolare ai due diametri B'E e BE, ossia perpendicolare all'asse x. Ottengo I = (1,2).

Il quadrilatero **IHEF è un rettangolo** perché, grazie alle considerazioni precedenti, posso dire: B',F,I sono allineati;B,H,I sono allineati; gli angoli B'FE, BHE, BIB' sono tutti retti perché inscritti in semicirconferenze.

Osservo che quindi le diagonali sono congruenti. Infatti IE=2 ed
FH=$\sqrt{(1/5-9/5)^2+(2/5-8/5)^2}=2$.

Il procedimento può essere generalizzato ponendo: B(b,0) ed E(x_E ,0) con 0<=0 x_E <=b.

Seconda parte

Dimostro la seconda parte facendo riferimento ad un piano cartesiano in cui A(r;0) D(x;0) E(2x;0) B(2r;0) B'(0;0). Quindi B'D = x e B'A = r
x_C=(2r-2x)/2=r-x→ C(r-x;0)→CB = r-x
Area semicerchio Γ_1:$\pi x^2/2$
Area semicerchio Γ_2:$\pi(r-x)^2/2= (\pi r^2+\pi x^2-2x\pi r)/2$
Area semicerchio Γ:$\pi r^2/2$
Area della regione delimitata dalle 3 semicirconferenze: $y= (\pi r^2-\pi x^2-(\pi r^2+\pi x^2-2x\pi r))/2 = -\pi x^2+\pi xr$
Si tratta dell'equazione di una parabola concava verso il basso avente, quindi, massimo nel vertice di ascissa $\pi r/2\pi=r/2$. L'area massima si ottiene perciò quando E coincide con A.