Soluzione del problema di novembre 2002

Trovare una dimostrazione del seguente fatto.
Nella successione
1, 3, 5, 11, 21, 43, ...
in cui i primi due termini sono 1 e 3 e ciascuno dei successivi è la somma del precedente e del doppio dell'antiprecedente, la somma di due termini consecutivi qualunque è una potenza di 2.

Hp : $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n$

Ts : $a_n + a_{n-1} = 2^n$

Per dimostrare tale tesi dividiamo il procedimento induttivo in due parti.

Nella prima parte dimostriamo il teorema per un caso particolare:
$1 + 3 = 2^2$, $3 + 5 = 2^3$
$a_1 + a_2 = 2^2$, $a_2 + a_3 = 2^3$
....

Come si vede dagli esempi, la somma di due numeri consecutivi è una potenza del 2 avente per esponente un numero uguale al pedice del secondo addendo.

Nella seconda parte, supponendo che il teorema sia valido per n, lo dimostriamo per il suo successivo n +1:

Hp : $a_n + a_{n-1} = 2^n$ $\qquad$ $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n$

Ts : $a_{n+1} + a_n = 2^{n+1}$

Dimostrazione:

$$a_{n+1} + a_n = 2a_{n-1} + a_n + a_n = 2a_{n-1} + 2a_n = 2a_n + 2(2^n - a_n) = 2a_n + 2^{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$$

(C.V.D.)

CLASSE IV A PNI

LICEO SCIENTIFICO STATALE "E. BOGGIO LERA" di CATANIA