Soluzione proposta da Daniele Urzì, classe VB, liceo scientifico “G.Galilei” (Catania)

La successione 1, 3, 5, 11, 21, 43, ... è definita per ricorsione nel seguente modo:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \ ; \ \alpha_1 = 3 \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2\alpha_{\nu-2} \qquad \textbf{(1)} \end{cases}$$

Nella **(1)** sommiamo membro a membro $\alpha_{\nu-1}$, ottenendo così la somma di due termini consecutivi della successione:

$$\alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu = 2(\alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1}). \qquad \textbf{(2)}$$

Dunque la somma di due termini consecutivi è uguale al doppio della somma dei loro rispettivi precedenti. Anche $\alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1}$ è la somma di due termini consecutivi, per cui possiamo applicare la **(2)** ricorsivamente ottenendo (se $\kappa \in \mathrm{N}$ e $1 \le \kappa \le \nu$):

$$\alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu = 2(\alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1}) = 2 \cdot 2(\alpha_{\nu-3} + \alpha_{\nu-2}) = \ldots = 2^{\kappa-1}(\alpha_{\nu-\kappa} + \alpha_{\nu-\kappa+1}) = \ldots = 2^{\nu-1}(\alpha_0 + \alpha_1) = 2^{\nu-1} \cdot 4 = 2^{\nu+1}$$

Resta così dimostrato che la somma di due termini consecutivi $\alpha_{\nu-1}$ e α_ν è una potenza di 2 ed è uguale a $2^{\nu+1}$.