Problema :

Trovare una dimostrazione del seguente fatto.
Nella successione
1, 3, 5, 11, 21, 43, …
in cui i primi due termini sono 1 e 3 e ciascuno dei successivi è la somma del precedente e del doppio dell'antiprecedente, la somma di due termini consecutivi qualunque è una potenza di 2.

Soluzione :

Per prima cosa tramutiamo in lettere il testo del problema, indicando con *a* un numero della successione (es. 5) e con *n* la sua posizione nella successione (es. $n_5 = 3$) :

$$a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2}$$

Quindi svolgiamo i seguenti passaggi matematici:

- Sommiamo ad entrambi i membri il termine a_{n-1}: $a_n + a_{n-1} = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} + a_{n-1}$
- Raggruppiamo i termini del 2° membro: $a_n + a_{n-1} = 2\,(a_{n-1} + a_{n-2})$

Come si può notare da quest'ultima equazione, la somma di due termini successivi ($a_n + a_{n-1}$) è il doppio della somma tra il termine inferiore e quello ancora precedente ($a_{n-1} + a_{n-2}$).
Es. n = 5 $\Rightarrow$ 21 + 11 = 2 (11+5)

Perciò, partendo dai due numeri dati: 1 e 3, se ne fa la somma: 4 e cioè 2^2, proseguendo, la somma dei due termini successivi 3 e 5 sarà il doppio, cioè 2*4 ovvero 2^3 e così via.
Infatti 1 + 3 = 4
3 + 5 = 4*2 = 8
5 + 11 = 8*2 = 16
11 + 21 = 16*2 = 32
21 + 43 = 32*2 = 64
43 + …

E' perciò dimostrato che la somma di due termini consecutivi qualunque è una potenza di 2.