Liceo scientifico “G.Peano”, Monterotondo
classe V F
soluzione problema Novembre 2002

Dimostrazione a

$a_n + a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_n + 2a_{n-1} =$

$a_{n\,n} + 3a_{n-1} + 2\ \ a_{n-2} =$

$a_n + 3(a_n - 2a_{n-2}) + 2a_{n-2} =$

$a_n + 3a_n - 6a_{n-2} + 2a_{n-2} =$

$4a_n - 4a_{n-2} =$

$4(a_n - a_{n-2}) =$

$4(2^{n-1}) =$

2^{n+1}

Pertanto è dimostrato che la somma di due numeri successivi è sempre uguale a potenze di 2 per valori di n >1

Dimostrazione b

Dato che

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \qquad (1)$$

e $$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \qquad (2)$$

Allora $a_n + a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$; dalla (1) si ricava che $2a_{n-2} = a_n - a_{n-1}$
Perciò ponendo a sistema le ultime due equazioni si ottiene:

$$a_n + a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1} + a_n - a_{n-1}$$

raccogliendo si ottiene che

$$a_n + a_{n+1} = 2(a_n + a_{n-1}) \ (3)$$

Si ottiene dalla (3) una definizione analitica che esprima il valore totale della coppia c_n, pari a $a_n + a_{n+1}$ con n>0

$$C_n = 2^{n+1}$$

Dimostrazione a cura di Gianluca Ciuffa, Dimostrazione b a Cura di Francesco Palone