Il problema di Novembre 2002

Trovare una dimostrazione del seguente fatto.
Nella successione
1, 3, 5, 11, 21, 43, ...
in cui i primi due termini sono 1 e 3 e ciascuno dei successivi è la somma del precedente e del doppio dell'antiprecedente, la somma di due termini consecutivi qualunque è una potenza di 2.

Le risposte vanno inviate a probmat@arci01.scuole.bo.it

I termini della successione sono legati tra loro dalla seguente legge:

(*) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

Prima dimostriamo la proposizione per un caso particolare:

$3 + 5 = 8 = 2^3$

Poi, supponendo che sia vera per n, la dimostriamo vera per n+1, cioè:

Hp : $a_n + a_{n+1} = 2^{n+1}$

Ts : $a_{n+1} + a_{n+2} = 2^{n+2}$

Moltiplicando ambo i membri dell'ipotesi per 2 si ha:

$2(a_n + a_{n+1}) = (2)2^{n+1}$

$2a_n + 2a_{n+1} = 2^{n+2}$

$2a_n + a_{n+1} + a_{n+1} = 2^{n+2}$

$(2a_n + a_{n+1}) + a_{n+1} = 2^{n+2}$

Per la (*) si ha:

$a_{n+2} + a_{n+1} = 2^{n+2}$

e il teorema è dimostrato per ogni n.

Chiara Ciccarello e Maria Vittoria Mazzamuto
Classe terza sez. A P.N.I.
Liceo Scientifico "Enrico Boggio Lera" di Catania