Problemat di Novembre

Filippo Cavallari e Alessandro Coglitore, 5°D, Liceo Morgagni ROMA

1. **Definizione** ricorsiva della successione:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 3 \\ F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1} \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

2. **Dimostrazione** della proprietà assegnata
   La proposizione da dimostrare è

   $P(n) \equiv$ «$F_n + F_{n-1} = 2^n$ »

   - Si dimostra la validità della base:

     $P(2) \equiv$ «$3 + 1 = 2^2$ » vera

   - Si dimostra la validità del passo induttivo:
     - si assume vera l'ipotesi induttiva
       $P(k) \equiv$ «$F_k + F_{k-1} = 2^k$ »
     - si dimostra la validità di
       $P(k+1) \equiv$ «$F_{k+1} + F_k = 2^{k+1}$ »

   Considero il primo membro della P(k+1) ed esprimo F_{k+1} tramite la definizione ricorsiva.

   $$\mathbf{F_{k+1}} + F_k = \mathbf{F_k + 2F_{k-1}} + F_k = 2\,F_k + 2\,F_{k-1} = 2(F_k + F_{k-1})$$

   Per l'ipotesi induttiva ho che

   $$F_k + F_{k-1} = 2^k$$

   Perciò ottengo

   $$2(F_k + F_{k-1}) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

   In conclusione, P(k) implica P(k+1) e questo conclude la dimostrazione ricorsiva.