SOLUZIONE DEL QUESITO DI MARZO 2003

Per risolvere il problema, poniamo i tre radar e la mongolfiera in un sistema di coordinate cartesiane spaziali XYZ, dove Z è la quota. Le coordinate dei tre radar, che per semplificare chiameremo A, B, C, e della mongolfiera, M, risulteranno quindi essere:

$A(X_A; Y_A; Z_A)$

$B(X_B; Y_B; Z_B)$

$C(X_C; Y_C; Z_C)$

$M(X; Y; Z)$

Per rendere il tutto più semplice poniamo A nell'origine degli assi, B sull'asse X e lasciamo C libero sul piano XY; la mongolfiera M invece può ovviamente essere ovunque nello spazio. Le nuove coordinate saranno:

$A(0;0;0)$

$B(X_B;0;0)$

$C(X_C; Y_C;0)$

Le distanze dei radar dalla mongolfiera, che noi chiameremo a,b,c, rispettivamente riferite ad A,B e C, sono il risultato della formula generale che ci permette di calcolare la distanza tra due punti, ad esempio tra A e M ,di coordinate:

$A(X_A; Y_A; Z_A)$

$M(X; Y; Z)$

,posti nello spazio:

$$\overline{AM} = \sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}$$

Se quindi in un determinato istante la mongolfiera dista a da A, b da B e c da C, significa che l'equazione precedente riferita ad A con M, B con M ed a C con M <u>è verificata contemporaneamente in tutti e tre i casi</u> è quindi così possibile interpretare questa situazione con un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} (X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2 = a^2 \\ (X_B - X)^2 + (Y_B - Y)^2 + (Z_B - Z)^2 = b^2 \\ (X_C - X)^2 + (Y_C - Y)^2 + (Z_C - Z)^2 = c^2 \end{cases}$$

A questo punto si può procedere a risolvere il sistema rispetto alle tre incognite, X, Y, Z, le coordinate di M, che in esso compaiono; prima però, riguardando le coordinate che avevamo trovato per semplificare l'esecuzione del problema, possiamo modificare il precedente sistema, per rendere più semplice l'esplicitazione delle tre incognite, in questo modo:

$$\begin{matrix} 1) \\ 2) \\ 3) \end{matrix} \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 \\ (X_B - X)^2 + Y^2 + Z^2 = b^2 \\ (X_C - X)^2 + (Y_C - Y)^2 + Z^2 = c^2 \end{cases}$$

-I numeri 1), 2), 3) sono stati messi per individuare meglio ciascuna delle tre equazioni del sistema durante la risoluzione-

Ora possiamo iniziare a risolvere il sistema.

$$\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 \\ (X_B - X)^2 + Y^2 + Z^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{cases} Z^2 + Y^2 = a^2 - X^2 \\ Y^2 + Z^2 = b^2 - (X_B - X)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - X^2 = b^2 - (X_B - X)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - X^2 = b^2 - X_B^2 + 2XX_B - X^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - X_B^2 + 2XX_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2XX_B = a^2 - b^2 + X_B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X = \frac{a^2 - b^2 + X_B^2}{2X_B} = \frac{a^2 - b^2}{2X_B} + \frac{X_B}{2}}$$

$$\begin{cases} 1) & X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 \\ 3) & (X_C - X)^2 + (Y_C - Y)^2 + Z^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) & Z^2 = a^2 - X^2 - Y^2 \\ 3) & Z^2 = c^2 - (X_C - X)^2 - (Y_C - Y)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - X^2 - Y^2 = c^2 - X_C^2 + 2XX_C - X^2 - Y_C^2 + 2YY_C - Y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 - X_C^2 + 2XX_C - Y_C^2 + 2YY_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2YY_C = a^2 - c^2 + X_C^2 + Y_C^2 - 2XX_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Y = \frac{a^2 - c^2 + X_C^2 + Y_C^2 - 2XX_C}{2Y_C} = \frac{a^2 - c^2 + X_C^2 + Y_C^2}{2Y_C} - \frac{X_C}{Y_C} \cdot \frac{a^2 - b^2 + X_B{}^2}{2X_B}}$$

$$\boldsymbol{Z = +\sqrt{a^2 - X^2 - Y^2}}$$

Dopo la discussione generale della risoluzione del problema applico le stesse formule scritte sopra (con la stessa scelta del sistema di riferimento opportuno) per il caso particolare da voi richiesto ossia i vertici A B C sono vertici di un triangolo equilatero di lato 2l. Possiamo ora anche riscrivere le coordinate dei radar in questo modo:

$$A(0;0;0) \Rightarrow A(0;0;0)$$

$$B(X_B;0;0) \Rightarrow B(2l;0;0)$$

$$C(X_C;Y_C;0) \Rightarrow C(l;\sqrt{3}l;0)$$

$$\boldsymbol{X = \frac{a^2 - b^2 + 4l^2}{4l} = \frac{a^2 - b^2}{4l} + l}$$

$$\boldsymbol{Y = \frac{a^2 - c^2 + l^2 + 3l^2 - 2Xl}{2\sqrt{3}l} = \frac{a^2 - c^2 + 4l^2}{2\sqrt{3}l} - \frac{l}{\sqrt{3}l} \cdot \frac{a^2 - b^2 + 4l^2}{4l} = \frac{a^2 - c^2 + 4l^2}{2\sqrt{3}l} - \frac{a^2 - b^2 + 4l^2}{4\sqrt{3}l} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2a^2 - 2c^2 + 8l^2 - a^2 + b^2 - 4l^2}{4\sqrt{3}l} = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2 + 4l^2}{4\sqrt{3}l} = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{4\sqrt{3}l} + \frac{l}{\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{Z = +\sqrt{a^2 - X^2 - Y^2}}$$

Ecco dunque come si ricava la quota Z della mongolfiera (l'ultima formula scritta, quella per trovare la quota Z, è in forma contratta perché esplicitando X e Y sarebbe diventata troppo lunga e complessa). È stato scelto il valore positivo della radice per determinare la quota Z in quanto supponendo che le tre postazioni radar siano sul piano terra (quota = 0) la mongolfiera non può che avere una quota positiva stando in aria.
Da notare che le formule per calcolare le tre coordinate della mongolfiera sono indipendenti del sistema di riferimento da me scelto.

L'alunno FRANCESCO GUESCINI,
classe 3^D, Liceo Scientifico "Torelli"
– Fano