Problemat di Dicembre

Alessandro Marco Boutari, Filippo Cavallari, Alessandro Coglitore.
5° D, Liceo Morgagni ROMA.

A. Costruiamo un rettangolo inscritto in una circonferenza e tracciamo i diametri perpendicolari ai lati come in fig. 1. Se e solo se eseguiamo una dilatazione lungo i diametri tracciati otteniamo un'ellisse con inscritto un rettangolo come in fig. 2; altrimenti se applichiamo una dilatazione lungo una direzione non parallela ai diametri tracciati otterremo un'ellisse con inscritto un parallelogramma. Risulta quindi necessario che affinché un rettangolo sia inscritto in un'ellisse i suoi lati siano paralleli agli assi dell'ellisse.

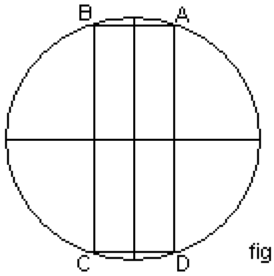

fig.1

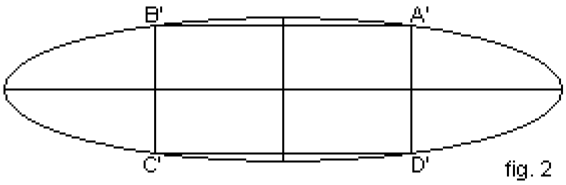

fig. 2

B. Per semplificare il problema cominciamo col determinare il rettangolo di area massima inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ disegnata in fig. 3. L'area del quadrilatero è uguale a:

$$S = 4\cos\alpha \cdot sen\alpha$$

applicando le formule di duplicazione

$$sen(2\alpha) = 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha$$

l'area S risulta uguale a

$$S = 2 \cdot sen(2\alpha)\,.$$

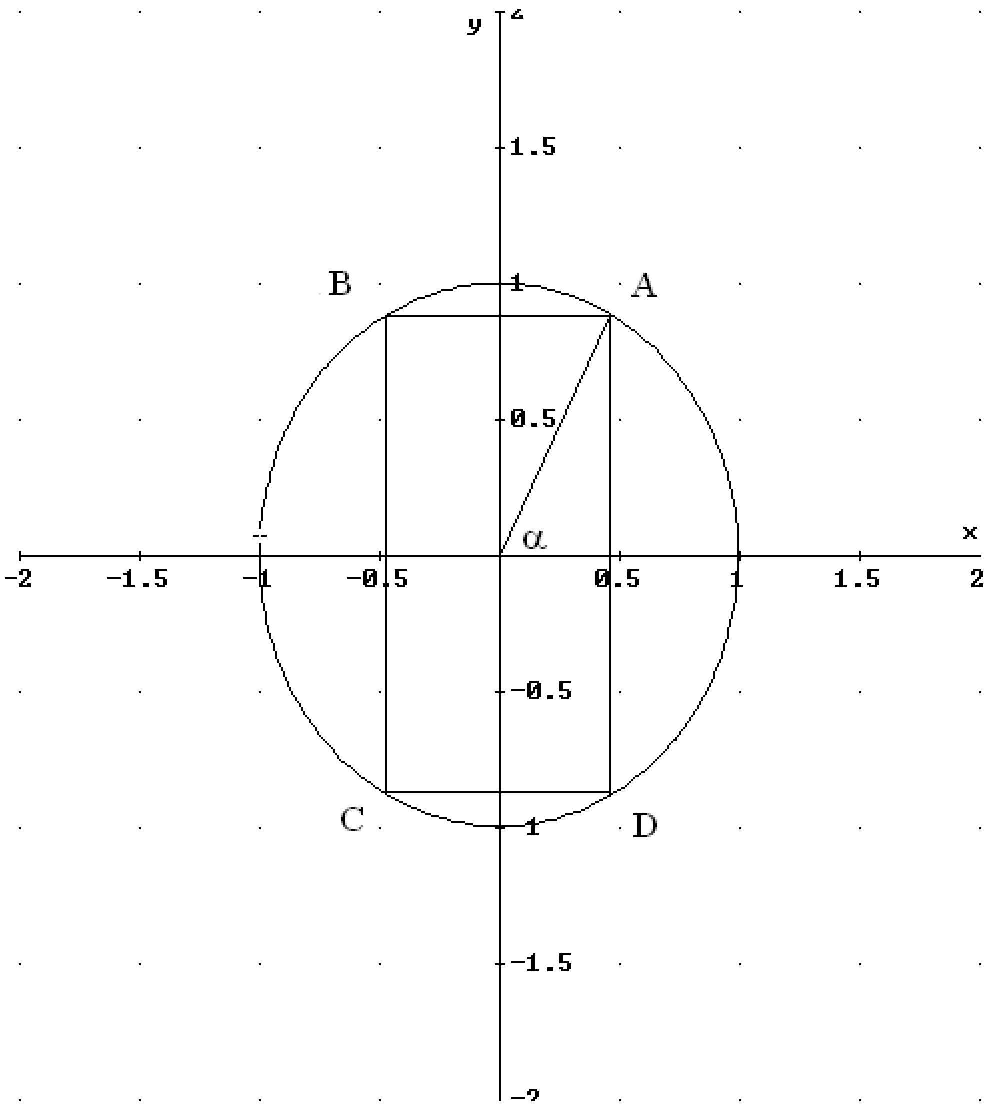

fig. 3

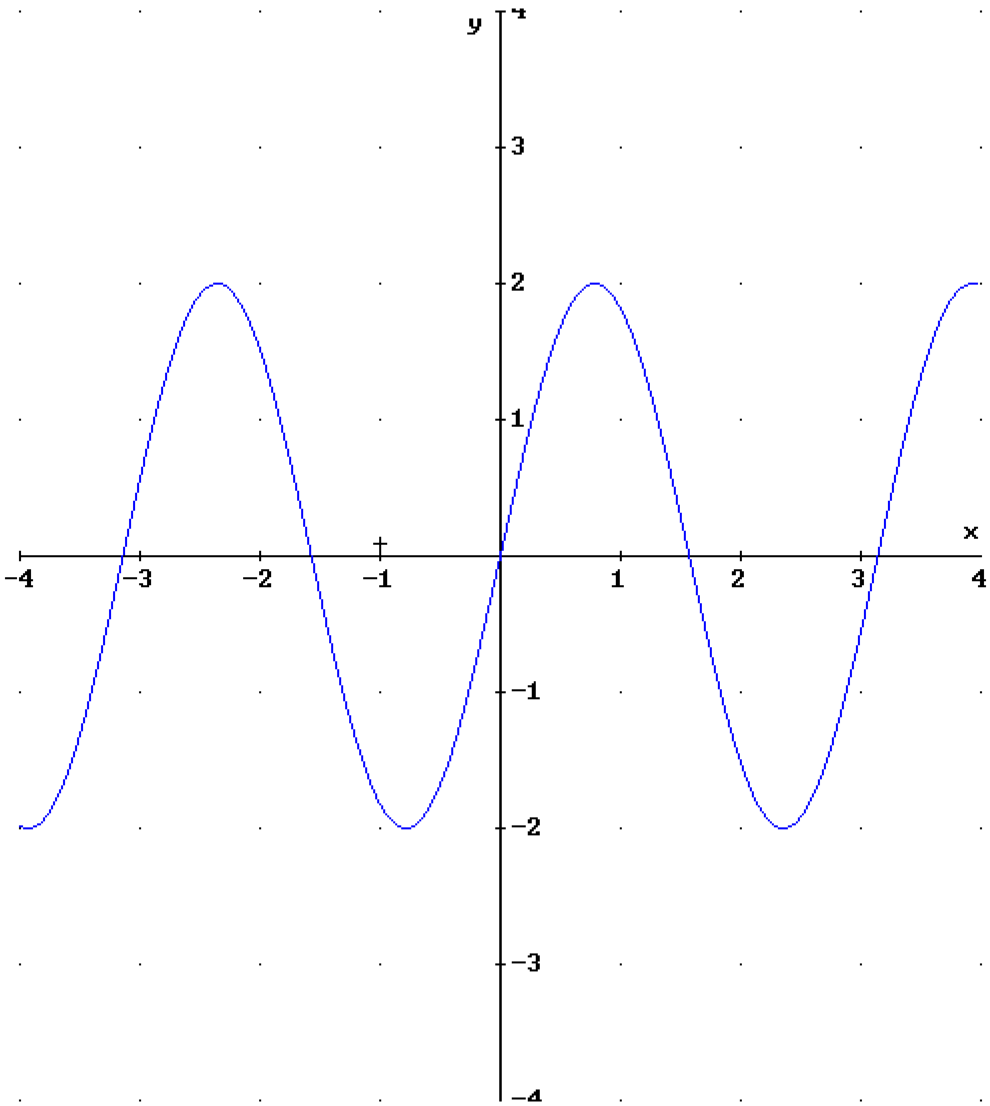

fig. 4

In fig. 4 è disegnato il grafico della funzione $y = 2 \cdot sen(2x)$. Il massimo assoluto nell'intervallo [0; π/2] (intervallo in cui varia l'angolo α) in corrispondenza di α = π/4 e vale due. Il rettangolo quindi cercato è un quadrato in quanto sen(45°)=cos(45°). Se applichiamo al piano in fig. 3 una dilatazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

otteniamo un ellisse di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

e il rettangolo di area massima inscrivibile in questo ellisse poiché l'area di questo rettangolo S' è uguale a S'=abS, dove S è l'area del quadrato prima considerato. I vertici avranno quindi coordinate:

$$A'\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right); B'\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right); C'\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right); D'\left(\frac{a}{\sqrt{2}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$