Capitolo 7

Standard per i livelli 9-12

Per alcuni studenti la matematica imparata nella scuola secondaria è il culmine della preparazione matematica formale per la vita e per il lavoro. Per altri, è la piattaforma sulla quale un ulteriore studio verrà realizzato al college e oltre. In entrambi i casi, è importante chiedersi di quali generi d'abilità e di comprensione matematiche gli studenti avranno bisogno quando lasceranno la scuola superiore, in modo che siano preparati a seguire con profitto un'ampia parte della propria carriera raggiungendo gli obiettivi didattici. Le risposte a questa domanda dovrebbero suggerire gli obiettivi per l'istruzione matematica superiore.

Sguardo generale sui contenuti e sui processi

La matematica nella scuola secondaria si estende, si formalizza, e si costruisce sulla matematica imparata nei livelli precedenti. I fondamenti sono stati fissate in molte aree di contenuto e hanno bisogno di non essere rivisti. Per esempio, in *Numeri e operazioni*, presumendo che ci sia familiarità con i numeri interi e razionali, gli studenti nei livelli 9-12 dovrebbero progredire nello studio del sistema dei numeri reali, dei numeri complessi, e delle matrici. Nell'algebra, gli studenti entrano nella scuola secondaria, con una esperienza che permette loro di percepire e costruire modelli e di operarci sopra con simboli. Nei livelli 9-12, dovranno impegnarsi più intensamente con sistemi formali e costruirli facilmente allo scopo di produrre modelli. Impareranno ad applicare un più largo numero di classi o funzioni, incluse funzioni trigonometriche ed esponenziali. Nella geometria, nella misura, nell'analisi dei dati, e nella probabilità gli studenti consolidano, espandono quanto hanno imparato nelle classi precedenti, e sviluppano nuove conoscenze di contenuto.

Gli studenti dovranno anche costruirsi un'abilità sempre più sofisticata nei processi matematici specialmente nel problem solving, nelle rappresentazioni e nel ragionamento. Le connnessioni tra le aree di contenuto e le aree esterne alla matematica possono divenire sempre più ricche via via che cresce la conoscenza matematica degli studenti. Gli studenti dovranno impegnarsi in problemi complessi, che richiedono una conoscenza tratta da molte aree della matematica, e alla quale possono essere applicate varie strategie di soluzione. Il ragionamento e le abilità di comunicazione degli studenti diventano anche molto più sofisticate. Nella scuola superiore gli studenti imparano a sviluppare catene di ragionamento coerenti e accurate e a rendere le loro argomentazioni chiare e logiche, sia oralmente sia per scritto. Questi argomenti dovrebbero fare corretto uso del linguaggio e della rappresentazione matematica. Inoltre, gli studenti dovrebbero essere capaci di produrre giustificazioni matematiche formali per le affermazioni che fanno. I promossi in matematica nella scuola superiore devono avere quell'alto grado di "alfabetizzazione" matematica che è necessario per ricoprire efficacemente una posizione nella società.

Quindi gli studenti delle scuole superiori continueranno a sviluppare la disposizione e l'abilità nel ragionare sulla matematica. Dovranno imparare a usare una tecnologia per sviluppare una più profonda conoscenza matematica. L'obiettivo chiave per l'educazione matematica nei livelli superiori è lo sviluppo di una robusta capacità di collegare le idee algebriche, geometriche e statistiche.

Necessità matematiche di tutti gli studenti

Indipendentemente dalle intenzioni di carriera, i diplomati delle scuole superiori del XXI secolo entreranno in un mondo con esigenze matematiche molto diverse da quelle dei diplomati dell'ultima parte del XX secolo. Inoltre dovranno affrontare cambiamenti rapidi, che verranno da almeno due fronti.

In primo luogo, la tecnologia e l'accelerazione verso una "società dell'informazione" richiederà a tutti i cittadini un buon grado di familiarità con strumenti tecnologici e di capacità nel trattare un gran numero di informazioni date in modo che solo alcuni anni fa era inimmaginabile. Anche se l'utente sta prendendo decisioni sagge come consumatore (p.e. scegliere il migliore piano del cellulare o analizzare le opzioni sul mutuo) o acquisendo abilità aggiuntive per il suo lavoro (p.e. gestire banche dati, fare previsioni o ricavare dati da Internet), i nostri diplomati devono lasciare la scuola secondaria con una conoscenza matematica e con conoscenze tecnologiche sofisticate che saranno molto utili. Inoltre, tutti gli studenti dovrebbero essere in grado di imparare parti diverse della matematica usando strumenti tecnologici per rappresentare dati, creare grafici, manipolare e analizzare espressioni simboliche in modo fin ora inaccessibile a tutti, tranne che agli studenti più preparati. Questa tecnologia dovrebbe essere abitualmente accessibile agli studenti e dovrebbe essere sfruttata sapientemente per aiutare gli studenti a sviluppare una più profonda comprensione della matematica.

In secondo luogo, la capacità di ragionare e di risolvere problemi aumenterà in tutti i percorsi della vita. Le persone stanno cambiando lavoro con una frequenza sempre maggiore e tale cambio richiede flessibilità e una larga serie di abilità. Anche da quelli che rimangono nello stesso lavoro ci si aspetta in modo crescente che avanzino e che aggiornino le loro abilità per tenersi al passo con i cambiamenti nel loro campo. Permanenza e successo nel mondo del lavoro richiedono che le persone siano pensatori flessibili, bene informati, e ingegnosi. Lo stesso, chiaramente, sarà richiesto a quelli che perseguono carriere che dipendono direttamente dalla matematica imparata in istituzioni postsecondarie e oltre.

In breve, tutti gli studenti nei livelli 9-12 devono imparare ad affrontare problemi complessi che coinvolgono più aspetti della matematica. Devono essere in grado di analizzare e risolvere i problemi che incontrano, senza conoscere a priori quali aree della matematica applicare, perché né nel mondo reale né nella matematica astratta i problemi arrivano con l'etichetta dei metodi di algebra o di geometria he essi richiedono. Infatti, i problemi più significativi richiedono l'utilizzo di più aree della matematica per essere risolti e possono essere affrontati da diversi punti di partenza. Quando si lavora su problemi complessi, da soli o in gruppo, gli studenti devono saper applicare conoscenze multidisciplinari e varie abilità di ragionamento e di risoluzione di problemi, in maniera integrata.

E' improbabile che gli studenti sviluppino le capacità di ragionamento e di risoluzione dei problemi a meno che non le pratichino, il che significa che il piano di studi deve offrire agli studenti l'opportunità di impegnarsi con problemi complessi che sono ricchi e abbastanza vari per incoraggiare lo sviluppo di queste abilità. Approcci curricolari nei quali, per esempio, gli studenti studiano l'algebra in maniera completamente separata dalla geometria e la geometria completamente a parte della misura o dell'analisi dei dati, è improbabile che siano metodi efficienti per aiutare gli studenti a sviluppare i collegamenti di cui hanno bisogno. I piani di studio devono aiutare gli studenti a creare collegamenti tra le differenti aree della matematica e a sottolineare l'utilità della matematica in contesti matematici e della vita reale.

Curricoli differenziati (il percorso)

Poiché le necessità matematiche di tutti continueranno a crescere negli anni che verranno, gli studenti hanno bisogno d'essere provvisti di un solido nucleo matematico su cui costruire, e non di dubbi su quali potrebbero essere le loro prospettive. Ogni studente dovrà avere un minimo di tre anni di corsi di matematica della scuola superiore che includono l'algebra e le funzioni, la geometria, l'analisi dei dati, e la matematica discreta. Numeri e misure dovranno anche essere presi in considerazione, ma il loro ruolo è meno esplicito nei livelli 9-12. Gli standard e la discussione nelle seguenti sezioni tentano di elaborare una solida base della matematica.

Siccome non possiamo predire con nessuna certezza di cosa un particolare studente di matematica potrebbe avere bisogno nel futuro, l'attenzione dovrebbe essere posta sul fornire a tutti gli studenti una base di conoscenza e di comprensione matematica. Si può facilmente immaginare che alcuni studenti potrebbero affrontare più profondamente temi o aree particolari della matematica. E' tempo di rifiutare l'idea di un'accelerazione sia verso un curricolo piatto sia lungo il percorso concepito per quegli studenti con interessi e inclinazioni speciali per la matematica e per le aree di studio relative alla matematica, e invece concentrarsi immediatamente sull'apprendimento che offra una profondità maggiore. Inoltre, non c'è una giustificazione alla prassi di avere un percorso curricolare unico per gli studenti che hanno intenzione di frequentare un college, e una serie di percorsi morti per quegli studenti che non sono interessati a continuare gli studi.

Tutti gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a studiare matematica a ogni livello. L'organizzazione dei curricoli dovrebbe andare incontro agli interessi degli studenti, alle intenzioni di carriera e ai piani futuri. Per esempio, gli studenti che progettano di entrare nel business o nelle scienze sociali dovrebbero proseguire il lavoro nella statistica e nella raccolta di dati oltre alla base proposta qui; l'attenzione estesa alla matematica discreta dovrebbe essere appropriata per gli studenti che progettano carriere informatiche. Il quarto anno potrebbe essere differenziato per gli studenti, a seconda dei loro piani futuri. In questo momento, gli interessi degli studenti dovrebbero essere più evidenti. Per gli studenti intenzionati a proseguire una carriera nei campi della matematica o vicini a essa, un quarto anno di matematica potrebbe provvedere più allo studio formale della matematica di quanto sia necessario a tutti gli altri studenti.

In generale, le affermazioni del programma di matematica delle scuole superiori, anche se basato sugli interessi, dovrebbero essere relativamente minori e non dovrebbero ostacolare l'obiettivo di fornire a tutti gli studenti una preparazione matematica sostanziale e di alta qualità per qualunque percorso vogliano proseguire in futuro.

Articolazione della matematica nella scuola postsecondaria

I contenuti base della matematica descritti in questo capitolo dovrebbero permettere a molti più studenti di studiare matematica al livello postsecondario e dovrebbero soddisfare alcune aspirazioni della loro carriera. L'obiettivo è fornire una profonda e ampia preparazione per tutti gli studenti, inclusi quelli che studieranno più matematica.

Bisognerebbe notare che benché una volta fosse il più importante corso di matematica al college, attualmente, al livello postsecondario, l'analisi è un corso meno centrale. Molti corsi di analisi che sono offerti al college fanno un ampio uso della tecnologia. E, migliorati o no tecnologicamente, molti corsi postsecondari di analisi richiedono agli studenti uno sforzo maggiore per considerare un numero minore di argomenti più approfonditamente. Mentre l'importanza che l'analisi ha al livello postsecondario è incerta, l'analisi è senz'altro una delle scelte obbligate per gli studenti che entreranno in campi tecnologici e scientifici.

È essenziale per il curricolo di matematica della scuola superiore provvedere adeguatamente a una preparazione per gli studenti che vorranno studiare matematica al college. Come indicato sopra, il curricolo matematico per tutti gli studenti dovrebbe garantire conoscenze di base ed esperienza con strumenti computazionali, per aiutare quegli studenti che entreranno in ambienti altamente tecnologici al college. Allo stesso tempo, il curricolo di matematica dovrebbe aiutare gli studenti a costruirsi una facilità procedurale nell'apprendimento, in modo che possano contare sui loro strumenti mentali quando ne hanno bisogno. Il curricolo di matematica deve essere concettualmente più ricco, in modo che gli studenti che entrano nei corsi postsecondari di matematica siano preparati a recepire idee matematiche significative.

#9 Reazione del lettore

Siamo interessati alla tua impressione sullo stile e sul tono del capitolo 7

- **Se sei un insegnante, come potrebbe essere di maggior aiuto? Se sei un matematico, come dovrebbe essere migliorato? Quali sezioni sono più efficaci?**

Il capitolo usa esempi soprattutto per indicare il genere di compiti matematici che gli studenti dovrebbero essere in grado di fare.

- **E' un approccio che aiuta? Potrebbero essere più utili altri approcci?**
- **Potrebbero essere di maggior aiuto altri esempi? Di che genere? Hai suggerimenti?**

Il capitolo descrive una base comune di matematica per tutti gli studenti.

- **Questa base è ragionevole e realistica?**
- **Sono queste le aree che dovrebbero essere enfatizzate di più? O di meno?**

Standard 1: Numeri e operazioni

I programmi di matematica devono facilitare lo sviluppo della percezione dei numeri e delle operazioni in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici;
- capiscano il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro;
- usino gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e facciano stime in modo appropriato.

Elaborazione: livelli 9-12

Gli studenti delle classi intermedie dovrebbero aver acquisito una solida comprensione dei numeri interi e razionali e delle loro proprietà, così come una certa facilità di calcolo, e dovrebbero aver cominciato a lavorare con i numeri irrazionali. Dovrebbero essere in grado di riconoscere e di usare le proprietà degli interi e dei razionali, ma potrebbero non aver avuto molte opportunità di mettere a confronto le proprietà dei differenti sistemi. Durante i livelli 9-12, la comprensione degli studenti sui sistemi di numerazione dovrebbe crescere lavorando con i numeri complessi e con i sistemi di matrici che presentano proprietà diverse da quelle dei numeri reali. Quando la conoscenza degli studenti sul concetto di numero si estende a nuovi domini, cominciano a capire la struttura comune ai vari sistemi di numerazione così come le loro caratteristiche differenti. La loro accresciuta abilità nel riflettere e nel controllare la propria attività con i numeri dovrebbe condurre a una migliore astrazione e a una capacità di generalizzazione. Gli studenti dei livelli 9-12 dovrebbero incontrare anche nuove idee matematiche. Per esempio, lo studio delle successioni e delle serie apre loro nuovi modi di analizzare strutture e relazioni numeriche.

All'inizio del livello 9, gli studenti dovrebbero possedere alcune conoscenze di tecniche computazionali che sono utili nei problemi di calcolo combinatorio. Dovrebbero aver fatto alcune esperienze di analisi e di confronto di algoritmi di calcolo e dovrebbero aver sviluppato strategie per la stima e l'aritmetica mentale. Durante la scuola secondaria, gli studenti dovrebbero migliorare le proprie conoscenze sulle permutazioni e sulle combinazioni considerando casi in cui l'applicazione diretta delle formule di permutazione e di combinazione non è sufficiente. L'attività degli studenti con l'analisi dovrebbe richiedere attenzione per gli errori numerici che si presentano nei calcoli generati dall'uso della tecnologia. La tecnologia del calcolo mette in luce il problema delle approssimazioni. Gli studenti hanno bisogno di distinguere e di scegliere fra i risultati esatti e quelli approssimati in una varietà di problemi.

Punti nodali per i livelli 9-12

- **Capire i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici;**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- migliorare la loro conoscenza dei sistemi per rappresentare i numeri e le grandezze, incluse le rappresentazioni matriciali per i vettori;
- confrontare le proprietà dei numeri e dei sistemi di numerazione;
- cominciare a capire i numeri complessi come un insieme che comprende quello dei numeri reali e come un sistema contenente le soluzioni per le equazioni che non sono risolubili nell'insieme dei numeri reali;
- prendere confidenza con le successioni e le serie finite, comprendere gli esempi aritmetici e geometrici e sviluppare una conoscenza informale di alcune successioni e serie infinite, specialmente della serie geometrica.

- **Capire il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- ampliare la conoscenza del significato e delle rappresentazioni per le operazioni sui vettori e le matrici e, con una tecnologia appropriata, essere in grado di usare queste operazioni per risolvere sistemi di equazioni lineari;
- sviluppare una certa facilità di calcolo coi numeri reali e complessi, coi vettori e le matrici, usando le operazioni a mano per i casi semplici e la tecnologia per quelli più complicati;
- continuare ad ampliare la conoscenza delle permutazioni e delle combinazioni come anche le tecniche di calcolo in situazioni sempre più complesse.

- **Usare gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e facciano stime in modo appropriato**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- analizzare gli algoritmi per le operazioni con i numeri, riconoscere alcune delle funzioni e delle limitazioni di particolari algoritmi, ed essere in grado di verificare l'applicabilità di algoritmi scelti;
- ampliare la conoscenza degli effetti dell'errore di misura sui valori calcolati;
- sviluppare l'abilità di distinguere fra stima e approssimazione e usare ognuna di queste in modo appropriato in ambiti tecnologici e non tecnologici.

Discussione

- **Il concetto di numero e le sue proprietà**

L'attività degli studenti con i numeri e con le loro proprietà nei livelli 9-12, dovrebbe tendere al potenziamento dell'abilità di riflettere sulle relazioni fra i numeri. Dall'analisi delle relazioni numeriche basate sulla posizione dei numeri su una retta numerica, come nell'esempio in Figura 7.1, gli studenti possono sviluppare abilità di astrazione e di generalizzazione.

Dati i punti ordinati come sulla retta dei numeri qui sotto,

a* *b* *c* *d* *e* *f* *g

— —• —• • — — • • —•—— ——•— —— ——

-1 0 1 2

- **determina quale punto è il più vicino ad *ef*? E quale ad $\frac{1}{f}$?**
- **Decidi se le seguenti affermazioni sono vere, false, o indeterminate:**
  - $a > b$
  - $ab > de$
  - $\sqrt{bc}$ è immaginario
  - $|c+1| < |fg|$

Figura 7.1. Ragionare senza valori esatti.

Le conoscenze degli studenti sui numeri naturali possono essere usate in problemi dalla teoria elementare dei numeri. Nei livelli 9-12, gli studenti dovrebbero formulare e provare semplici proprietà numeriche. Per esempio, facendo riferimento alla precedente esperienza circa l'esplorazione delle strutture e delle relazioni numeriche, gli studenti dovrebbero essere in grado di spiegare perché l'insieme dei numeri pari è chiuso rispetto all'addizione e l'insieme dei numeri dispari non lo è. Sebbene si possano convincere di ciò usando *mattonelle* o schizzi, dovrebbero essere in grado di *portare avanti* l'argomento usando anche i simboli algebrici. Allo stesso modo, dovrebbero essere in grado di argomentare in maniera convincente che ogni numero primo più grande di 3 è sia 1 in più che 1 in meno di un multiplo di 6, con un'argomentazione come la seguente: "Tutti i numeri naturali sono di una delle forme: $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, o $6n+5$ (dove n è un intero). Tutti tranne $6n+1$ e $6n+5$ sono divisibili o per 2 o per 3 o per entrambi. Poiché $6n+1$ e $6n+5$ sono 1 in più ed 1 in meno di un multiplo di 6, gli unici candidati possibili come numeri primi (oltre che 2 e 3) sono i numeri che sono o 1 in più o 1 in meno di un multiplo di 6". Dovrebbero essere in grado di esaminare alcune delle proprietà degli insiemi numerici speciali, come le terne pitagoriche e i numeri *poligonali*.

Sebbene non sia necessario dare un'eccessiva importanza al linguaggio dell'algebra astratta, gli studenti possono cominciare ad apprezzare i sistemi matematici confrontando e mettendo in contrasto i differenti insiemi numerici. Per esempio, gli studenti possono notare che i numeri interi sono chiusi rispetto all'addizione e alla moltiplicazione, gli interi sono chiusi anche rispetto alla sottrazione, i razionali diversi da zero sono chiusi anche rispetto alla divisione e così via.

Quando gli studenti lavorano con risultati che si riferiscono a tutti i numeri naturali, gli insegnanti possono introdurre l'induzione matematica. È importante, tuttavia, che gli studenti affrontino l'induzione matematica a un livello di astrazione consono al loro pensiero. Per esempio, le formule per la somma delle serie aritmetiche e geometriche e per le somme della potenza k-esima dei primi n numeri naturali possono essere ben capite usando l'induzione matematica, ma l'aspetto centrale dovrebbe rimanere la comprensione del procedimento piuttosto che la produzione di dimostrazioni in un formato richiesto. Gli studenti possono usare il concetto d'induzione matematica nelle loro indagini dei fenomeni ricorsivi come il triangolo di Pascal, i numeri di Fibonacci e l'interesse composto.

Con una solida base di esperienze sulla risoluzione delle equazioni (specialmente le equazioni lineari) nei livelli 6-8, gli studenti della scuola secondaria possono esplorare condizioni sotto le quali le funzioni polinomiali hanno radici. Questa ricerca può motivare l'introduzione dei numeri complessi. Quando gli studenti risolvono equazioni quadratiche (*di secondo grado*) mediante calcolatrici con manipolazione simbolica o con programmi, la visione delle radici immaginarie che vengono fuori potrebbe condurre a una discussione in classe sul significato di questi numeri. Gli studenti dovrebbero intendere i numeri complessi come un sistema che permette la soluzione di un insieme più vasto di equazioni.

Gli studenti potrebbero incontrare successioni infinite e serie nella loro analisi dei decimali che si ripetono all'infinito. Per esempio, dopo aver sviluppato una formula per la somma di una serie geometrica infinita, gli studenti dovrebbero essere in grado di utilizzarla per giustificare che $0.\overline{9} = 1$.

Quando gli studenti estendono il loro studio ai numeri irrazionali, dovrebbero mostrare una più profonda rivalutazione della distinzione fra numeri razionali e numeri irrazionali. Per esempio, gli studenti dovrebbero arrivare a rendersi conto che ci sono molti più irrazionali che i soli p , e e $\sqrt{2}$ e che gli irrazionali infatti sono di gran lunga più numerosi dei razionali.

- **Operazioni e loro proprietà**

Quando gli studenti lavorano con le matrici, incontrano un sistema in cui alcune delle proprietà dei numeri reali e complessi non si mantengono. Usando una calcolatrice simbolica, programmi per computer, o calcolando a mano, gli studenti possono verificare le proprietà delle matrici. Esaminando diversi esempi di moltiplicazione di matrici, possono arrivare a capire giustamente che formano un sistema non commutativo. Interpretando le matrici come regole per le trasformazioni del piano, gli studenti acquisiscono un modello visivo per pensare alle operazioni con le matrici. Possono poi usare questa potente connessione fra algebra e geometria per capire perché la moltiplicazione delle matrici non è commutativa.

Gli studenti dovrebbero apprezzare anche la connessione algebra - geometria che offre la rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Il diagramma e i dati in Figura 7.2 mostrano il prodotto di due numeri complessi, 4+3*i* e 1+2*i*, che suggerisce una connessione fra i numeri complessi e i vettori. Gli studenti dovrebbero studiare un simile esempio per esaminare la relazione fra la lunghezza dei vettori che rappresentano i due fattori e la lunghezza del prodotto, o fra gli angoli coinvolti. L'esplorazione simultanea dei numeri complessi e dei vettori, aiuta a evidenziare le loro relazioni e può arricchire le conoscenze degli studenti su entrambi.

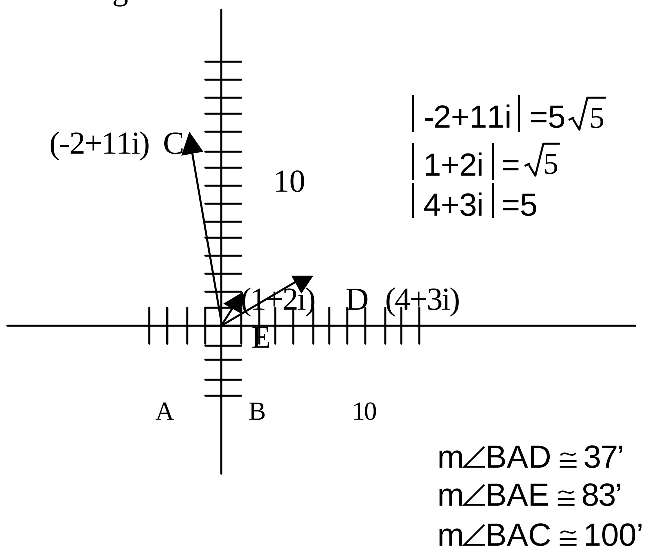


Figura 7.2. Prodotto di due numeri complessi

Gli studenti possono usare gli strumenti tecnologici, per mostrare le intuizioni sul significato del prodotto e della somma di numeri complessi, e dei vettori che li rappresentano. Possono produrre e raccogliere i dati su un'ampia gamma di esempi e verificare le loro osservazioni geometriche attraverso l'indagine delle rappresentazioni simboliche. La facilità di creare esempi dà agli studenti la fiducia di andare in cerca di una verifica più formale. Quando gli studenti acquisiscono familiarità con il sistema dei numeri complessi, potranno capire le *proprietà* dei numeri reali come sottoinsieme dei numeri complessi.

L'attività degli studenti con le combinazioni e le permutazioni nei livelli 9-12 dovrebbe accrescere le loro conoscenze dei metodi di calcolo per includere casi più complicati. Per esempio, dovrebbero essere in grado di analizzare la matematica dei giochi d'azzardo, apprendere una gamma di argomenti sulla probabilità di *combinazioni* del DNA e ragionare sui *rapporti* probabilistici fatti sui test per una malattia.

- **Calcolo e stima**

Le analisi degli studenti sugli algoritmi dovrebbero diventare sempre più sofisticate rispetto alle analisi che avevano condotto durante i livelli intermedi. Per esempio, basandosi sulla conoscenza dell'algoritmo della divisione, gli studenti dovrebbero capire perché ogni numero razionale può essere espresso sia come decimale finito sia come decimale infinito periodico. (Vedi la sezione *Ragionamento e Dimostrazione* in questo capitolo per una discussione ulteriore).

Gli studenti dovrebbero mostrare un più ampio apprezzamento del significato degli errori di misura quando studiano la loro propagazione nel calcolo. Alla luce delle nuove tecnologie, l'analisi degli effetti degli errori di arrotondamento e la grandezza dei pixel nei risultati dei calcoli e nei grafici è importante. Gli studenti dovrebbero avere un'idea di cosa una calcolatrice o un computer fa mentre mostra dei grafici. Per esempio, se gli studenti stanno esplorando i grafici di funzioni del tipo $y = \sin(kx)$, potrebbero notare che incrementando il valore di k si ha che il periodo della sinusoide – la distanza lungo l'asse delle x necessaria per completare un "ciclo" – diminuisce. Viceversa, se k diventa abbastanza grande, come in Figura 7.3, il grafico sembra non avere più lo stesso tipo di periodo. Una discussione ulteriore di questa discrepanza può condurre a una più profonda comprensione dei concetti di periodicità e di oscillazione.

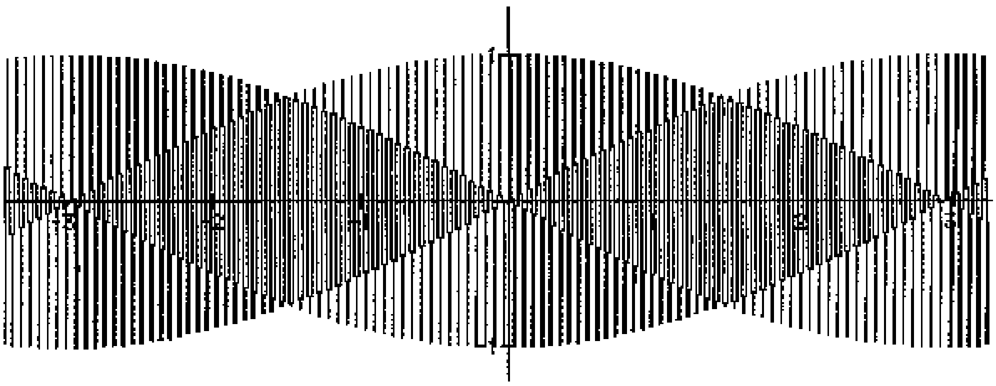


Figura 7.3. Grafico al computer di $y = \sin(100x)$

I concetti e le abilità per i livelli 9-12, nell'area dei numeri e delle operazioni, rappresentano nuovi contenuti matematici con forti connessioni alle precedenti conoscenze degli studenti. Quando gli studenti lavorano e riflettono sui nuovi sistemi, procedure e metodi matematici, imparano di più circa i sistemi con cui sono già familiari.

Standard 2: Modelli, funzioni e algebra

I programmi di matematica devono porre attenzione ai modelli, alle funzioni, ai simboli in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali;
- usino forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche;
- usino modelli matematici e analizzino le variazioni in contesti sia reali sia astratti.

Elaborazione: livelli 9-12

Un aspetto fondamentale della matematica nei livelli 9-12 è che fornisce agli studenti strumenti versatili e potenti per comprendere il loro mondo dando loro accesso alla forza e alla bellezza della struttura matematica. Nella scuola secondaria, gli studenti dovrebbero sviluppare ed espandere le loro abilità per descrivere e ragionare su una varietà di contesti usando i costrutti matematici delle funzioni e delle relazioni e il linguaggio simbolico dell'algebra.

Gli studenti dovrebbero arrivare alla scuola secondaria con esperienza nel creare e usare le rappresentazioni simboliche e grafiche delle strutture, specialmente quelle legate alla crescita aritmetica e geometrica. Dovrebbero aver esaminato l'efficacia e le debolezze delle varie rappresentazioni (verbali, numeriche, simboliche e visuali) per rispondere alle domande su come una situazione viene modellata. Nei livelli 9-12, il repertorio delle funzioni in possesso degli studenti si espande per includere le funzioni periodiche, quelle *definite a tratti* e altre funzioni non lineari, così come le funzioni definite per ricorsione. Gli studenti usano anche le funzioni per definire le curve in modo parametrico. L'abilità degli studenti con le funzioni diventa sempre più flessibile e sofisticata quando imparano a ragionare su nuove funzioni ricavate da quelle familiari per composizione, inversione, trasformazione lineare e combinazione aritmetica. Per esempio, sapendo che $f(x)=\sin(x)$ oscilla con ampiezza fissa e che $g(x)=e^{-x}$ è positiva e decrescente, uno studente dovrebbe ragionare che il prodotto $g(x)f(x)=e^{-x}\sin(x)$ produce un'onda sinusoidale smorzata. Gli studenti dovrebbero anche cominciare ad avere familiarità con le rappresentazioni verbali, grafiche, numeriche e simboliche delle funzioni in due variabili.

L'algebra nei livelli 9-12 include sia lo studio delle relazioni fra le quantità che lo studio delle strutture. Una volta, ognuna poteva essere studiata separatamente, ma una matematica efficace può essere ottenuta quando queste prospettive vengono integrate. La questione è che si deve trovare un punto di equilibrio. Semplificare espressioni e risolvere equazioni e disequazioni è parte dell'algebra insegnata nella scuola secondaria. Fatte separatamente, queste manipolazioni potrebbero lasciare agli studenti la sensazione che l'algebra sia una manipolazione di simboli non legata al contesto. Nel risolvere problemi che scaturiscono da situazioni reali, il linguaggio simbolico dell'algebra può essere efficace per trovare e interpretare una soluzione. Gli studenti dovrebbero lasciare la scuola secondaria con una conoscenza equilibrata delle funzioni e dell'algebra. Ciò comprende una consistente conoscenza delle forme e delle proprietà di un ampio insieme di funzioni e l'abilità di usare queste forme e proprietà per risolvere problemi in una vasta gamma di contesti. Gli studenti dovrebbero capire le differenze nel sapere fornito dalle varie rappresentazioni ed essere in grado di ragionare all'interno di queste rappresentazioni.

Gli studenti dovrebbero ampliare la conoscenza di come le altre discipline usano l'algebra per fare modelli dei fenomeni reali. Gli insegnanti dovrebbero capire come la contestualizzazione della matematica attraverso modelli reali possa aiutare alcuni studenti a capire meglio l'algebra. Quando gli studenti passano dagli anni di corso intermedi a quelli secondari, passano da fenomeni principalmente retti da un modello lineare che hanno *ritmi di variazione costante* (come un'auto che si muove a velocità costante), a fenomeni retti da un modello non lineare che hanno *ritmi di variazione non costante* (come la velocità crescente di un oggetto che cade o le popolazioni con la crescita che aumenta in modo esponenziale). Una conoscenza delle relazioni fra le funzioni non lineari, come queste funzioni cambiano e come questo cambiamento si riflette sui grafici delle funzioni non è solo necessaria per interpretare i modelli ma è anche un prerequisito per imparare l'*analisi*.

Punti nodali per i livelli 9-12

- **Capire i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- riconoscere forme equivalenti di un'espressione, di un'equazione, di una funzione o di una relazione;
- avere familiarità con le classi di funzioni, comprese le funzioni lineari, quadratiche, potenze, polinomiali, razionali, valore assoluto, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e a scalino; capire le funzioni definite a tratti e le loro proprietà; analizzare gli effetti dei cambiamenti del parametro e descrivere il comportamento locale e globale;
- selezionare le rappresentazioni appropriate (numerica, grafica, verbale e simbolica) per le funzioni e le relazioni incluse in situazioni quantitative, *convertire* con flessibilità all'interno delle rappresentazioni, interpretare le rappresentazioni e usarle per interpretare le situazioni rappresentate;
- usare una varietà di rappresentazioni simboliche, comprendendo le definizioni ricorsive e le equazioni parametriche, per esplorare il comportamento delle funzioni e delle relazioni;
- ragionare (partendo da grafici, tabelle e formule) sulle funzioni derivate da altre funzioni attraverso trasformazione (per esempio, $g(x)=3f(x-2)+5$), inversione, composizione e combinazione aritmetica.

- **Usare forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- rappresentare situazioni che coinvolgono grandezze variabili con espressioni, equazioni, disequazioni e sistemi di equazioni usando una varietà di forme equivalenti;
- sviluppare una certa facilità di calcolo con polinomi, vettori e matrici, usando le operazioni a mano per i casi semplici e la tecnologia per quelli più complicati;
- riconoscere l'algebra simbolica come aritmetica astratta;
- essere in grado di spiegare, confrontare ed evidenziare le differenze tra le maggiori proprietà degli oggetti e delle operazioni definite all'interno e attraverso sistemi (ad esempio, numeri razionali, polinomi, matrici e funzioni) quando seguono determinate regole o leggi della struttura;
- sviluppare strategie per decidere se i risultati simbolici generati con strumenti tecnologici sono ragionevoli e interpretare questi risultati in modo significativo.

- **Usare modelli matematici e analizzare le variazioni in contesti sia reali sia astratti**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- modellare un'ampia gamma di fenomeni con una varietà di funzioni che comprende le funzioni lineari, quadratiche, esponenziali, razionali, trigonometriche e definite per ricorsione e riconoscere che un particolare tipo di funzione può modellare situazioni molto differenti;
- approssimare e interpretare *l'aumento e gli andamenti della variazione*, sia graficamente che numericamente, per funzioni che rappresentano una varietà di situazioni;
- approssimare e trovare le intersezioni, i massimi e minimi e il comportamento asintotico di funzioni e interpretare tali risultati in contesti assegnanti.

Discussione

- **Strutture, funzioni e relazioni**

L'attività sulle strutture, le funzioni e l'algebra nei livelli 9-12 si fonda fortemente sulle esperienze precedenti degli studenti. L'interpretazione e il ragionamento sulle forme grafiche, numeriche e simboliche dovrebbe essere un atteggiamento abituale nelle classi della scuola secondaria. Gli studenti dovrebbero essere in grado di muoversi con flessibilità fra le varie rappresentazioni di una funzione. L'esempio che segue richiede di passare dalla rappresentazione verbale a quella grafica.

> Un volo dall'Aeroporto SeaTac di Washington all'Aeroporto LAX di Los Angeles deve girare su LAX diverse volte, prima di essere autorizzato ad atterrare. Tracciare un grafico della distanza dell'aereo da Washington in funzione del tempo dal momento del decollo fino all'atterraggio.

Gli studenti con un concetto di funzione non ancora formato spesso perdono di vista le variabili che stanno rappresentando sul grafico e confondono il grafico con il percorso dell'aereo, come mostrato in Figura 7.4.

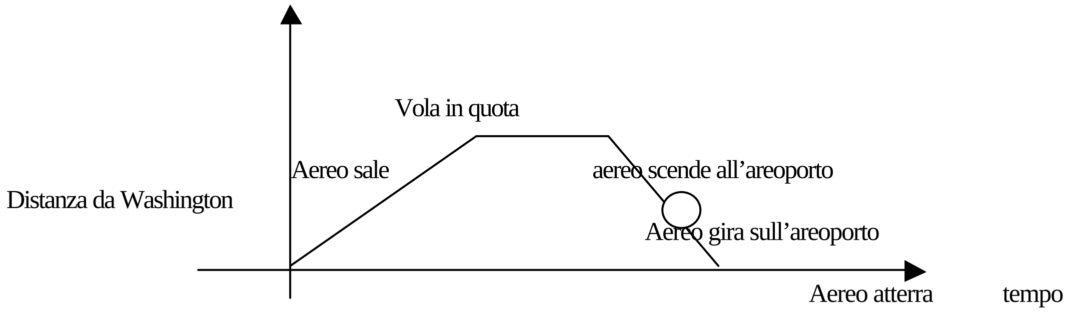


Figura 7.4. Soluzione di uno studente al problema dell'areoplano

Dopo una discussione in classe sulle varie rappresentazioni di questa situazione, dovrebbero essere aiutati a concentrarsi sulle relazioni tra quantità che sono rappresentate nel grafico in modo che possano vedere che il percorso circolare dell'aereo non risulterà un cerchio sul grafico. Piuttosto, si concretizzerà in un'oscillazione nella distanza dal punto in cui ha origine, come mostrato in Figura 7.5. Con questa soluzione, si potrebbe poi chiedere agli studenti di stimare la distanza dell'aereo dall'aeroporto a un certo istante o di elencare tre istanti in cui la distanza dell'aereo dall'aeroporto è la stessa.

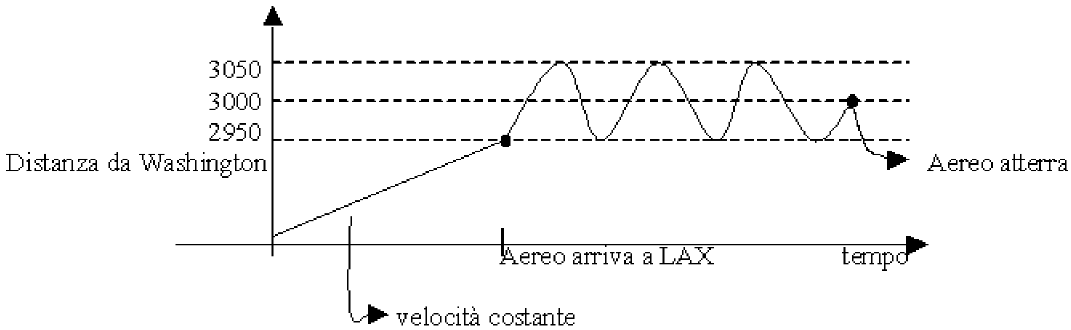


Figura 7.5. Soluzione corretta al problema dell'aereo

.

La disponibilità della tecnologia permette agli studenti di fare domande che comportano un esame più approfondito delle proprietà delle famiglie di funzioni. Con la grafica, gli studenti possono aumentare o diminuire velocemente la scala in un grafico di una funzione per vedere sia il comportamento locale sia globale. Siccome è spesso difficile mescolare chiaramente le visioni sia locali che globali, gli studenti devono capire il comportamento *funzionale* allo scopo di risolvere problemi come quello mostrato in Figura 7.6.

Per i valori $x \in [-10,10]$, $y \in [-10,10]$ è tracciato il grafico di un polinomio cubico. Lo schema evidenzia due linee che sembrano essere verticali. Ci sono già esattamente due radici nel diagramma. Occorre che ce ne sia un'altra? Se così, dove dovrebbe essere? Abbozzare le possibilità per il grafico completo.

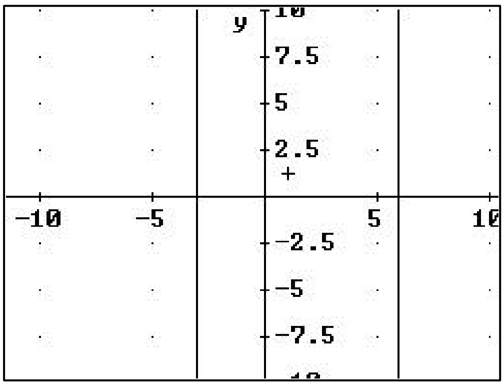


Figura 7.6. Grafico parziale di un polinomio cubico.

Un software grafico può aiutare gli studenti a esaminare come il cambio di un parametro abbia effetto sul grafico di una funzione. Lo studio dei cambiamenti di parametro, aiuta gli studenti a capire i modi in cui le famiglie di funzioni possono essere rappresentate, come nel seguente problema:

- Esplora il grafico $f(x)=nx^2$ per differenti valori di n. I cambiamenti su n che effetto hanno sul grafico?
- Considera come si possa rappresentare questa famiglia di funzioni usando un "asse n" per mostrare come il grafico cambia quando n cambia.

La conoscenza della famiglia di funzioni dovrebbe permettere allo studente di capire il grafico tridimensionale in Figura 7.7. Si potrebbe chiedere agli studenti di ricavare le relazioni fra questo grafico e una rappresentazione nel piano *xy* di alcuni elementi della famiglia, dati da specifici valori di *n*, preparando così la strada per la discussione sulle carte topografiche e su altri usi delle curve di livello per rappresentare in due dimensioni i fenomeni tridimensionali.

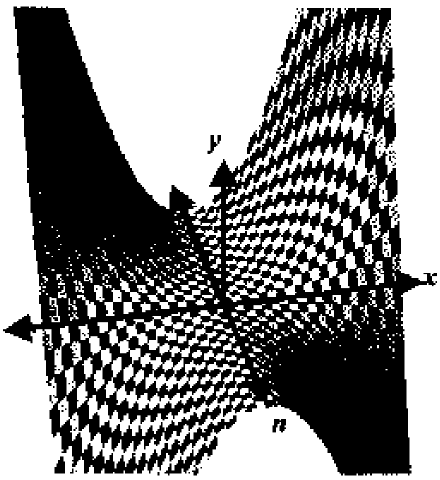


Figura 7.7. Rappresentazione tridimensionale di $f(x)=nx^2$

Gli studenti possono usare le loro conoscenze dei concetti *funzionali* per risolvere problemi che possono essere interessanti per loro. Ad esempio, un insegnante potrebbe aiutare gli studenti a mettere insieme le idee su raccolta dei dati, misura e funzioni proponendo un esperimento per scoprire l'effetto della pendenza di una salita sul tempo di caduta. In questo esperimento, un'asse orizzontale lunga 3 metri viene innalzata come una rampa che può essere sistemata a varie altezze fra 0 e 100 centimetri. Gli studenti sganciano uno skate-board dalla cima della rampa e cronometrano lo skate-board finché si ferma. L'altezza della rampa dovrebbe essere modificata durante tutto l'esperimento a altezze come 15, 30, 45 e 60 cm. Più corse dovrebbero essere fatte a ogni altezza e registrate in una tabella. Gli studenti dovrebbero poi essere in grado di rappresentare graficamente i dati e fare stime per i tempi di corsa ad altre altezze della rampa. Gli insegnanti dovrebbero incoraggiare gli studenti a discutere quali fattori possono spiegare le differenze fra i tempi stimati e i tempi effettivi di corsa, o a stimare il tempo di corsa per un altezza della rampa di 90 cm. Una volta che gli studenti hanno svolto l'esperimento e raccolto i dati, possono usare uno *strumento tecnologico di adattamento curve* per generare possibili leggi di funzione per descrivere i dati e poi decidere quale famiglia di funzioni descrive meglio la situazione. Questa discussione può condurli a pensare come la situazione fisica si mette in relazione alle varie possibilità per le funzioni; per esempio, un modello lineare non è una scelta giusta perché il *ritmo della variazione* non è costante (adattamento da Fey e al. 1999).

- **Struttura e notazione simbolica**

Le persone che conoscono i principi algebrici fondamentali e il simbolismo dell'algebra lo usano per molte ragioni: per generalizzare i loro calcoli, per mettere per scritto un pensiero, per esternarlo quando il procedimento è troppo complicato per farlo mentalmente e per illustrarlo agli altri. Gli studenti nella scuola secondaria hanno bisogno di acquisire dimestichezza con il simbolismo dell'algebra, e hanno bisogno di usare le proprietà inerenti alla struttura algebrica in una vasta gamma di situazioni. Questo richiede una combinazione di esperienza nel fare manipolazioni con carta e penna delle espressioni algebriche e della soluzione delle equazioni, e di esperienza nell'usare gli strumenti tecnologici, come i CAS (calculator algebra system), per le espressioni e per la soluzione delle equazioni.

La dimestichezza nel manipolare i simboli algebrici è uno strumento utile, anche se non necessario, per la soluzione di problemi interessanti e pratici come il seguente. Supponiamo che un'organizzazione non a scopo di lucro abbia appena ricevuto 40.000$ da utilizzare in un progetto. L'organizzazione valuta una spesa generale del 19% a fronte di tutti i costi diretti del progetto. Quando a uno studente della scuola media viene chiesto di ricavare quanti soldi l'organizzazione debba effettivamente spendere nel progetto, dovrebbe indirizzarsi verso una soluzione che si basa sui simboli e sui principi algebrici; cioè, se C rappresenta la cifra che può essere spesa per i costi diretti, allora $C + 0{,}19C = 40.000$. Usando i principi algebrici, inclusa la distributività, per calcolare C, lo studente trova che solo 33.613,44$ possono essere spesi nei costi di progetto.

Quanto accade nell'esempio mostrato in Figura 7.8 (adattamento da Tucker 1995) richiede più della manipolazione simbolica.

Se $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=(x+1)^2$, completa la tabella seguente.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
2			80	16
		4		81

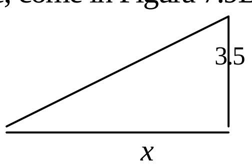
Figura 7.8 Problema di composizione di funzioni.

Per completare la prima riga di questa tabella, gli studenti hanno bisogno di conoscere solo come calcolare $f(x)$ e $g(x)$ dato x. Tuttavia, per completare la seconda riga, gli studenti devono sapere cosa rappresentano i simboli $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e che cosa significa comporre funzioni, così come capire il ruolo della funzione "interna" ed "esterna" in una composizione. Gli studenti possono ragionare, usando la conoscenza intuitiva dell'idea di inversa di una funzione, che siccome $g(x) = 4$, allora x può essere sia 1 che –3. Possono allora determinare che x non può essere 1, perché $g(f(1))$ è 1, non 81. Alternativamente, gli studenti potrebbero notare che poiché $g(f(x))$ è 81, allora $f(x)$ deve essere 8 oppure –10. Siccome $f(x)$ è sempre maggiore o uguale di –1, deve essere $f(x) = 8$. Allora x può essere sia 3 che –3. Ma poiché $g(3) = 16$ e $g(-3) = 4$, la soluzione è $x = -3$. Quindi, ci sono diversi modi per affrontare questo problema, e ognuno richiede abilità con simboli, concetti e ragionamenti algebrici.

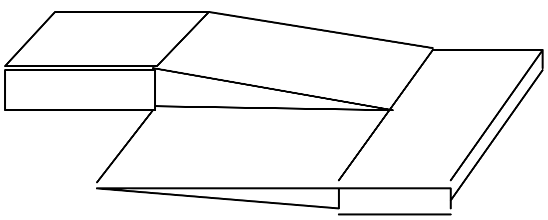
Il simbolismo dell'algebra può essere utile per registrare le informazioni provenienti dalle situazioni reali in un modo che permette comodamente l'analisi. Considera cosa dovrebbero fare gli studenti con il seguente problema:

> La massima pendenza delle rampe per l'accesso handicap è 8.33%. (Cioè, l'inclinazione è 0.0833). La massima distanza da terra permessa per una singola rampa alla massima pendenza è 30 piedi. Disegnare una rampa per una porta che ha la sua soglia a 3.5 piedi sulla superficie. Qual è la lunghezza minima della rampa che può essere usata in questa situazione? (Adattamento da Core Plus 1997.)

L'insegnante potrebbe guidare gli studenti chiedendo: "quanto lunga deve essere una rampa per alzarsi di 3.5 piedi alla massima pendenza?". Usando la loro conoscenza di inclinazione, gli studenti dovrebbero disegnare un grafico, scrivere e risolvere equazioni, come mostrato in Figura 7.9A. Poi, dopo aver realizzato che una rampa di 30 piedi non è sufficiente, potrebbero arrivare a un disegno che utilizza due rampe, come in Figura 7.9B.



$3.5/x = .0833$
$3.5 = .0833x$
$x = 42.01$



A B

Figura 7.9 Soluzioni per il problema della rampa.

L'importanza del ragionamento simbolico è particolarmente evidente agli studenti nel contesto degli ambiti applicativi. Considera il seguente problema:

> Ogni anno la tua scuola fa una campagna pubblicitaria per vendere le T-shirt della scuola. Supponi che tu abbia il compito di ordinare una fornitura di T-shirt e di fissarne il prezzo. Il tuo scopo è pianificare in modo da massimizzare il profitto per il progetto. Stima la funzione della domanda osservando la tua classe e calcolando quante T-shirt sarebbero acquistate a ognuno dei prezzi che seguono. Poi usa l'effettivo numero di studenti nella scuola per stimare il numero di T-shirt che sarebbero vendute a ognuno dei prezzi.

Prezzo in dollari	Numero totale delle T-shirt che i tuoi compagni di classe dicono di comprare a questo prezzo	Numero medio delle T-shirt comprate da ogni compagno di classe	Numero stimato di T-shirt per l'intera scuola
4			
8 12			
16			
20			

Gli studenti potrebbero portare avanti problemi come quelli che seguono:

- Trovare una funzione domanda $v(p)$ che predica le vendite di T-shirt in funzione del prezzo p.
- Trovare una regola che predica l'entrata in funzione del prezzo.
- Trovare il prezzo che dà la massima entrata. Poi, calcolare il numero che ci si aspetta di vendere e l'entrata totale a quel prezzo.
- Supponendo che ogni T-shirt costi 5$, trovare una regola che dia il costo in funzione del prezzo.
- Trovare una regola che predica il profitto in funzione del prezzo.
- Trovare il prezzo che dà il massimo profitto. Poi calcolare il numero che ci si aspetta di vendere e il profitto totale a quel prezzo.

Le risposte a questi problemi possono dare origine a indagini più approfondite. Il prezzo che rende massima l'entrata è uguale al prezzo che rende massimo il profitto? perché? cosa succede se viene offerto uno sconto quantitativo per grandi quantità di T-shirt? Gli studenti possono unire la conoscenza del simbolismo, la struttura, e il contesto per portare avanti questi problemi. (Adattamento da Heid e al. 1995.)

Gli studenti nei livelli 9-12 sviluppano conoscenze sempre più consistenti dei concetti di variabile, espressione, equazione e funzione. C'è un centro di interesse aggiuntivo nello sviluppare in loro la capacità di ragionamento simbolico e la facilità nella manipolazione simbolica, fino all'abilità di intendere l'algebra come aritmetica generalizzata e l'abilità di riconoscere e di ragionare sulle forme simboliche.

- **Variazione e creazione di modelli**

Il concetto di *andamento della variazione* di una funzione dovrebbe essere ampliato nella matematica della scuola secondaria. L'esempio fornito in Figura 7.10 prefigura le idee dell'*analisi.* Sia le informazioni grafiche che numeriche suggeriscono che $y = x^2$ è quasi lineare per valori di x molto vicini a 3.

Descrivere il grafico $f(x)=x^2$ usando i valori $x \in [2.995,3.005]$, $y \in [8.97,9.03]$. Sembra una parabola?
Considera la tabella di dati (i valori di x^2 sono arrotondati alla terza cifra decimale). I dati confermano la tua risposta? Crea un grafico dei valori nella tabella.

x	2.995	2.996	2.997	2.998	2.999	3.000	3.001	3.002	3.003	3.004	3.005
$f(x)=x^2$	8.970	8.976	8.982	8.988	8.994	9.000	9.006	9.012	9.018	9.024	9.030

Come potresti utilizzare i dati per approssimare l'"inclinazione" di $f(x)=x^2$ in $x=3$?

Figura 7.10. Esame della variazione

Considerare il concetto di "inclinazione" per una parabola può portare all'idea di *andamento della variazione* istantanea, un concetto centrale nell'*analisi*. Questo è anche un ambito in cui la conoscenza degli studenti sulle funzioni lineari può essere rafforzata e in cui le connessioni fra i grafici, le tabelle e i simboli possono essere evidenziati.

Un altro uso importante delle funzioni è nella creazione di modelli matematici. La creazione di modelli comporta decidere in merito agli aspetti attinenti alla situazione del mondo reale, rappresentare quegli aspetti con funzioni, analizzare e ragionare sulle proprietà della situazione di cui si crea il modello e considerare la coerenza del modello alla situazione di cui si vuole trovare un modello.

Alcuni problemi sulla creazione di modelli danno origine all'iterazione, un concetto importante per studiare i processi che si ripetono. I fogli elettronici sono piuttosto utili per risolvere problemi simili, molti dei quali possono essere usati con studenti ai vari livelli della scuola secondaria, usando metodi di approccio che dipendono dal grado di raffinatezza che gli studenti hanno con il ragionamento simbolico e con alcune idee come lo scrivere l'espressione per una funzione ricorsivamente. Considera l'esempio seguente:

Una studentessa si è fatta una distorsione al ginocchio durante una partita di pallavolo indoor e il suo dottore le ha prescritto un farmaco anti-infiammatorio per ridurre il gonfiore. Deve prendere due pastiglie da 220 mg ogni 8 ore per 10 giorni. Il suo rene filtra il 60% di questo farmaco dal suo corpo ogni 8 ore. Quanta medicina c'è nel suo organismo dopo 10 giorni? (Consiglio Nazionale di Ricerca 1998, p.80).

Uno studente potrebbe abbozzare questo problema creando una tabella dei valori mettendo in relazione il numero dei periodi di 8 ore con la quantità di farmaco che resta nell'organismo della studentessa (Tabella 7.1). Questa tabella può essere continuata per 10 giorni. Gli studenti che sono ai primi stadi nel loro studio della notazione algebrica potrebbero notare che un valore nella colonna a_n si trova moltiplicando il precedente valore per 0,4 e aggiungendo 440, determinando perciò il bisogno di una notazione più conveniente come l'equazione ricorsiva, $a_{n+1} = 0,4\ a_n + 440$, che può essere usata per generare velocemente la tabella in un foglio elettronico. Le situazioni come questa possono fornire ai ragazzi l'opportunità di trovare le variabili fondamentali in un problema e di determinare le relazioni fra di esse.

n	Giorno	Tempo (ore)	a_n = farmaco che rimane (mg)
0	1	0	440
1	1	8	0,40(440)+440=616
2	1	16	0,40(616)+440=686.4
3	2	24	0,40(686.4)+440=714.56
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
n			$0,40(a_{n-1})+440$

Tabella 7.1 Soluzione parziale al problema della ritenzione del farmaco.

Usando il foglio di calcolo o apposite calcolatrici grafiche, gli studenti facendo il grafico dei punti (n,a_n) possono osservare che i valori si avvicinano a un asintoto orizzontale, che potrebbe essere utile per illustrare la nozione di equilibrio. Nei livelli superiori, gli studenti possono esplorare la natura esponenziale del grafico e ottenere un'equazione *in forma chiusa* $a_n = -293(0,4)^n + 733$. Le funzioni definite per ricorsione sono uno strumento prezioso per risolvere e analizzare le situazioni reali. Dal momento che ci sono situazioni di cui si può trovare un modello ricorsivamente ma dove una espressione *in forma chiusa* non si riesce a trovare, la creazione di modelli e il ragionamento ricorsivi dovrebbero essere incoraggiati.

Attraverso uno studio equilibrato e coerente delle funzioni, delle relazioni e del linguaggio simbolico dell'algebra, gli studenti dovrebbero completare la scuola secondaria in modo da riconoscere l'equivalenza fra le espressioni e di *convertire* con flessibilità all'interno delle varie rappresentazioni delle funzioni. Dovrebbero essere in grado di riconoscere la struttura di un problema, di rappresentarlo matematicamente e di interpretarne i risultati. Gli insegnanti dovrebbero sfruttare le opportunità offerte dagli strumenti tecnologici per promuovere la conoscenza degli studenti su questi concetti, e per sviluppare le capacità matematiche necessarie nel mondo.

Standard 3: Geometria e senso dello spazio

I programmi di matematica devono essere attenti alla geometria e al senso dello spazio in modo che tutti gli studenti:

- analizzino le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali;
- selezionino e usino diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici;
- riconoscano l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche;

- usino la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica.

Elaborazione: livelli 9-12

L'insegnamento della geometria nei livelli 9-12 dovrebbe costruire negli studenti esperienze dai livelli più facili fino ai livelli più formali e complessi di conoscenza geometrica.
La precedente conoscenza geometrica degli studenti diventa più profonda, acquisiscono nuovi strumenti importanti che possono essere usati in un'ampia gamma di applicazioni, e diventano competenti nella prova.

Le classi di oggetti che formano il nucleo della geometria della scuola superiore (linee, angoli, poligoni, cerchi, e una varietà di oggetti tridimensionali) sono tante quante nei livelli precedenti. L'insegnamento della geometria nei livelli 9-12 dovrebbe essere centrato più sulle relazioni attorno questi oggetti che sugli oggetti di per se stessi o sulle loro proprietà individuali.

Un elemento critico nello studio della geometria per gli studenti nei livelli 9-12 è sapere come giudicare, costruire, e comunicare le dimostrazioni. La tecnologia elettronica mette in grado gli studenti di esplorare dinamicamente le relazioni geometriche, offre agli studenti la visuale e la misura di come investigano le situazioni geometriche. Gli insegnanti della scuola superiore affrontano un'importante sfida nel bilanciare questo uso di tecnologia per esplorare idee e sviluppare congetture attraverso l'uso del ragionamento deduttivo. Gli studenti dovrebbero essere in grado di formulare da se stessi particolari conclusioni sugli oggetti geometrici o sulle relazioni tra solidi. Invece non è importante che gli studenti dominino un particolare formato per presentare delle dimostrazioni. Mentre lo è che gli studenti vedano la forza della dimostrazione nello stabilire affermazioni generali (teoremi) e che siano capaci di comunicare effettivamente le loro dimostrazioni nello scrivere.

Gli studenti dovrebbero possedere una gamma di rappresentazioni, comprese le coordinate, le relazioni trigonometriche, le reti, le trasformazioni, i vettori e le matrici, che possono flessibilmente applicare nelle situazioni che sono inerenti alla geometria e anche dove la geometria non è l'ambiente originale. Non tutte le situazioni geometriche che gli studenti incontreranno li guideranno all'analisi all'interno del sistema euclideo. Altri sistemi alternativi, come grafici, la geometria sferica o i frattali possono fornire vie per esplorare queste situazioni. Lo studio della geometria nella scuola secondaria fornisce un mezzo di descrizione, di analisi, di osservazione, e di comprensione del mondo fisico e della bellezza delle sue strutture.

Punti nodali per i livelli 9-12

- **Analizzare le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- esplorare relazioni, fare e testare congetture, e risolvere i problemi che coinvolgono classi di oggetti geometrici a due e a tre dimensioni;
- connettere la geometria ad altri argomenti di matematica (per esempio, la misura, l'algebra, la trigonometria), metterla in relazioni con altre aree di interesse (per esempio, arte, architettura) e usarla per risolvere problemi;
- riconoscere che la geometria è un esempio di sistema deduttivo, costruito con termini primitivi, assiomi, definizioni e teoremi; e usare la deduzione per stabilire la validità delle congetture geometriche e per dimostrare teoremi.

- **Selezionare e usare diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- indagare e verificare congetture e risolvere problemi che coinvolgano figure a due e a tre dimensioni, rappresentate con coordinate rettangolari;
- esplorare altri sistemi di coordinate (p.e. di navigazione, polare, sferico) e i loro usi;
- esplorare sistemi geometrici discreti/finiti (reti) e le loro caratteristiche e applicazioni;
- usare relazioni trigonometriche per risolvere problemi.

- **Riconoscere l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- rappresentare traslazioni, riflessioni, rotazioni, e dilatazioni/contrazioni di oggetti nel piano usando schizzi, coordinate, vettori, o matrici e usare queste rappresentazioni per guadagnare informazioni sulla trasformazione;
- estendere le trasformazioni alle tre dimensioni, includendo la simmetria riflessa e rotazionale dei solidi;
- comprendere che le trasformazioni (con l'operazione di composizione) sono un sistema algebrico di funzioni.

- **Usare la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- disegnare e interpretare oggetti a due e a tre dimensioni inclusi quelli che coinvolgono la sovrapposizione di figure/oggetti e quelli che richiedono linee ausiliarie;
- analizzare le sezioni, i troncamenti, le composizioni e le scomposizioni di oggetti tridimensionali;
- visualizzare oggetti tridimensionali da diverse prospettive.

Discussione

- **Forma e struttura**

Dalla scuola superiore, gli studenti dovrebbero avere acquisito una larga serie di oggetti e di proprietà geometriche. Dovrebbero avere avuto l'esperienza di fare e giustificare semplici congetture a proposito delle relazioni fra questi oggetti. Nei livelli 9-12 la complessità delle relazioni, se presentate staticamente o dinamicamente, deve essere estesa e approfondita. Usando software dinamici di geometria o modelli fisici, gli studenti possono esplorare velocemente una serie di esempi. Possono analizzare quello che sembra cambiare e quello che sembra rimanere invariato, e possono creare collegamenti a proposito di una data situazione geometrica. Per esempio, gli studenti possono osservare che le diagonali del parallelogramma appaiono incontrarsi nei loro rispettivi punti medi. Molti studenti potrebbero essere contenti di fermarsi a questo punto, convinti che la loro osservazione deve essere generalizzata perché si può prestare a più esempi. Comunque, l'insegnamento effettivo deve affrontare queste ipotesi. Possono trarre vantaggio da queste opportunità per incoraggiare gli studenti a sviluppare una conoscenza più approfondita attraverso la formulazione verificabile di congetture, l'esplorazione di chiarimenti possibili, e infine la soluzione.

I software di geometria dinamica offrono l'opportunità di esplorare e di fare collegamenti. Per esempio, usando tali software gli studenti possono disegnare un triangolo e costruire il punto medio dei lati. I punti medi di questi tre lati possono essere congiunti e il rapporto tra l'area del triangolo dei punti medi e l'area del triangolo originale può essere calcolata (Figura 7.11A). Comunque gli studenti trascinino un vertice per creare triangoli differenti, si vede che il rapporto rimane costantemente uguale a 0.25. Una domanda è se questa relazione è sempre la stessa; risolvere il problema richiede un'argomentazione logica e una dimostrazione da parte dello studente. La dimostrazione potrebbe comprendere: una rappresentazione sintetica che sfrutta la proprietà delle trasversali di linee parallele; o una rappresentazione analitica che usufruisce dell'algebra.

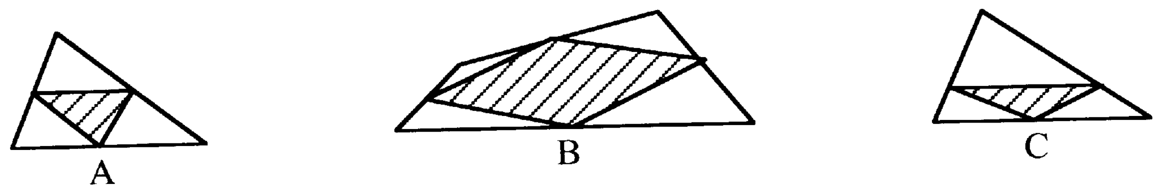
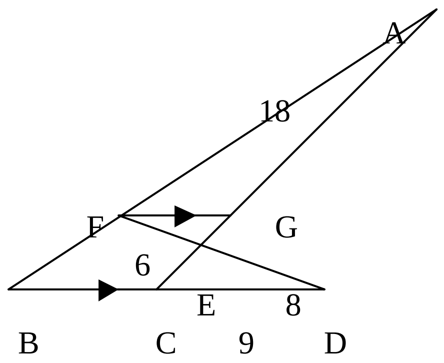


Figura 7.11 Esplorare i risultati dei punti medi

Una naturale estensione è quella di guardare se tale rapporto costante esiste per quadrilateri convessi. Dopo aver testato questi collegamenti, appare che il rapporto delle aree è ancora costante (questa volta 0.5) nel caso dei quadrilateri (Figura 7.11B). Cosa succede a proposito dei pentagoni convessi? Gli studenti che sono incoraggiati a esplorare questa idea dovrebbero scoprire che, quando i punti medi dei lati di un pentagono generale sono congiunti, non emerge nessun rapporto di aree. Un contro esempio potrebbe essere il risultato atteso dell'indagine.

Una seconda possibilità di estensione è congiungere il punto medio di un lato del triangolo con il punto che divide in tre parti uguali ciascuno degli altri due lati, come è mostrato in Figura 7.11C (e la costruzione del punto di trisezione è un problema di per sé impegnativo). Man mano che vengono esplorate altre divisioni proporzionali del triangolo, diventa interessante analizzare le suddivisioni dell'area. In questo tipo di metodo esplorativo gli studenti possono porre domande per un'estensione e per un'esplorazione più avanzata.

Gli studenti nei livelli 9-12 dovrebbero essere capaci di rispondere a domande, e verificare i teoremi a proposito delle situazioni geometriche anche quando i diagrammi che tracciano sono un po' complessi. Gli insegnanti potrebbero modificare il problema come nella Figura 7.12 per valutare la capacità degli studenti a trovare relazioni in un modo meno strutturato. Per esempio, gli insegnanti potrebbero fornire solo la figura e la domanda agli studenti che devono trovare una coppia di triangoli congruenti o una coppia di triangoli simili, o elencare altre relazioni della figura. Agli studenti può poi essere richiesto di giustificare le loro affermazioni sulla base dei teoremi e dei fatti precedenti.

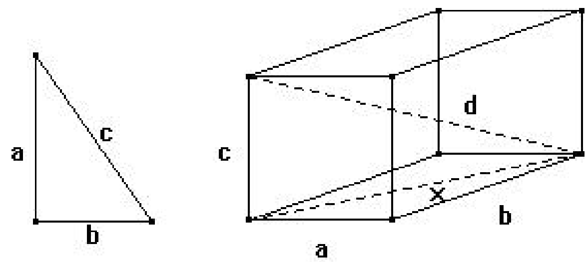


Nella figura a sinistra AF = BD, FG = FB, e FG è parallelo a BD.

a) Indica il triangolo che è congruente a AFG
b) Dimostra che AFE è simile a DCE,
c) Dato che AF = 18cm, FE = 6cm, CD = 9cm, e DE = 8cm, calcola CE e EG

Figura 7.12. Figura geometrica complessa (da Beng 1995).

Analogie tra situazioni uni, bi e tridimensionali offrono l'opportunità di accrescere le conoscenze dello studente. Per esempio, gli studenti potrebbero pensare come i due punti che sono equidistanti da un punto fisso su di una linea (situazione unidimensionale) sono analoghi a un cerchio quando un punto fissato è dato nel piano (situazione bidimensionale) e a una sfera quando il punto è dato nello spazio (situazione tridimensionale). L'uso del Teorema di Pitagora per calcolare la distanza tra due punti in due dimensioni (Figura 7.13A) ha una controparte in tre dimensioni (Figura 7.13B). Applicando due volte il Teorema di Pitagora si ottiene un metodo generalizzato per il calcolo della distanza.



$c^2 = a^2 + b^2$

A

$x^2 = a^2 + b^2$ e $d^2 = x^2 + c^2$

Così $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

B

Figura 7.13. Il Teorema di Pitagora in due e tre dimensioni

Il teorema descrive ancora la distanza tra due punti, ma nello spazio i punti dovrebbero essere agli angoli opposti di un parallelepipedo e richiederebbe tre coordinate per analizzarlo analiticamente.

La geometria fornisce metodi per visualizzare problemi che vengono da ambienti non geometrici. Per esempio, nella probabilità i problemi possono essere ideati in maniera più accessibile quando sono visti geometricamente. Il problema nella Figura 7.14 richiede l'uso della diseguaglianza triangolare.

Un segmento, lungo 18 pollici, è diviso in modo casuale in tre pezzi. Qual è la probabilità che i tre pezzi possono essere usati come i lati di un triangolo?

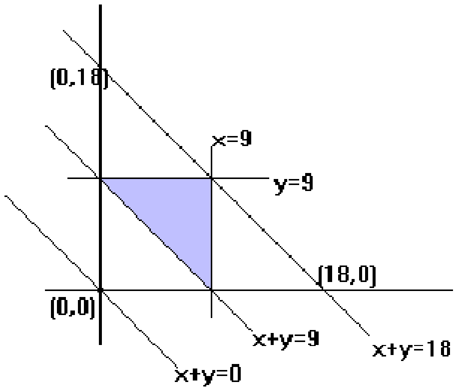


Figura 7.14. Probabilità di costruire un triangolo

Supponiamo che x e y rappresentino due delle tre parti. Poiché sono lunghezze devono non essere negative. Quando il totale di tutti i tre i lati è 18 la loro somma deve essere meno di 18. Così tutti i possibili valori per x e y devono essere contenuti nella regione limitata $x>0$, $y>0$ e $x + y<18$ - cioè, all'interno del triangolo con i vertici (0,18), (0,0), e (0,18) mostrato nella Figura 7.14. Nel formare il triangolo, la diseguaglianza triangolare implica che x e y devono essere inferiori a 9, ma la loro somma deve essere più di 9. Così il triangolo ombreggiato nella Figura 7.14 contiene tutte le soluzioni possibili. Poichè il triangolo ombreggiato è un quarto dell'area del triangolo più largo, c'è il 25% di probabilità che il triangolo si formi.

Le applicazioni della geometria in situazioni pratiche abbondano. la progettazione di un impacchettamento ottimale, parti e attrezzi di macchine, arte, architettura, tutto si fonda sull'analisi geometrica per la loro creazione. Il mondo fisico naturale attorno a noi è più comprensibile quando è visto attraverso una lente geometrica.

- **Coordinate geometriche e altri modelli geometrici**

I problemi geometrici coinvolgono spesso la creazione di una scelta tra le molte rappresentazioni possibili. È necessario che gli studenti nei livelli 9-12 sviluppino una sufficiente facilità nell'apprendimento dei vari modelli in modo che possano beneficiare da approcci alternativi di problem solving, percorsi alternativi per la comprensione dei concetti, e le ricche connessioni che questi modelli permettono.

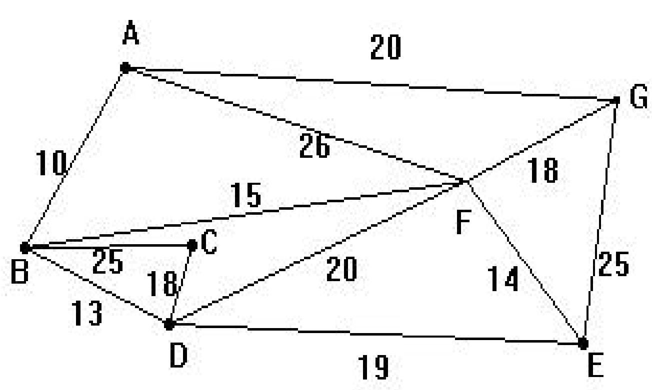
La geometria analitica offre agli studenti un mezzo potente per legare concetti algebrici e geometrici, arricchendo così entrambi. Per esempio, quando si generalizzano le possibili soluzioni di un'equazione di secondo grado, l'esame del grafico della parabola rende chiaro che esiste uno solo dei tre casi: due soluzioni se la parabola interseca l'asse delle x, una se è tangente ente, e nessuna se non l'interseca. D'altra parte, la formula quadratica fornisce un'interpretazione algebrica di questi casi. La formula quadratica può essere scritta come segue:

$$\text{Se } ax^2+bx+c = 0 \text{ e } a \neq 0, \text{ allora } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Gli studenti dovrebbero vedere che questa formula dà origine a due radici reali, una radice reale, o due radici complesse, a seconda dal valore dell'espressione sotto radice. Inoltre, questi casi corrispondono esattamente ai tre casi geometrici elencati sopra. L'espressione $b^2 - 4ac$ è chiamata il *discriminante*, perché discrimina queste possibilità.

Gli studenti della scuola superiore dovrebbero anche esplorare i problemi per i quali i sistemi di coordinate polari, di navigazione, o sferiche sembrano essere una rappresentazione più utile. La trigonometria, incluse le leggi del seno e del coseno, è importante per stabilire una larga varietà di formule per le aree. Provvede anche al naturale collegamento con il concetto di funzione circolare in algebra e con la teoria della misura e incoraggia altri approcci per risolvere problemi. Gli studenti dovrebbero muoversi agevolmente tra tutti questi sistemi di rappresentazione e fare valutazioni a proposito dei vantaggi di ciascuno circa un problema particolare.

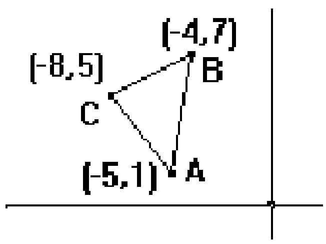
Due ulteriori sistemi di rappresentazione sono sorti da settori della matematica più recenti, e dovrebbero essere parte della geometria che gli studenti incontrano nella scuola superiore. Il primo di questi sono i grafi finiti (strutture di vertici e spigoli) insieme con le loro rappresentazioni matriciali. Nei problemi dove un numero finito di oggetti devono essere uniti da linee (cioè posti in rete), i grafici discreti forniscono un modello efficiente per rispondere alle domande sul numero delle possibili strade, le lunghezze di ciascuna e la rotta migliore sotto condizioni fissate. La riflessione algoritmica può essere valorizzata dalla considerazione di metodi per soddisfare queste condizioni. Segue un esempio.

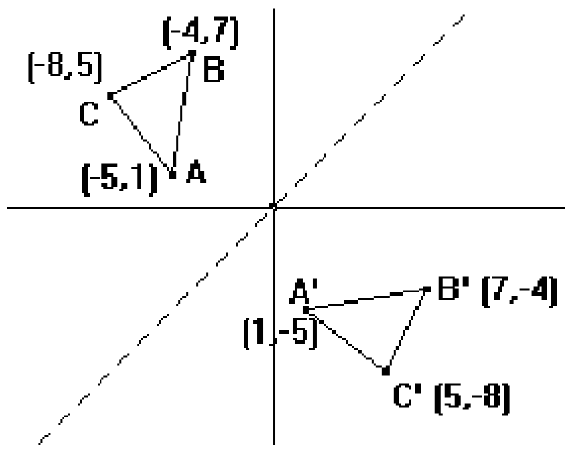


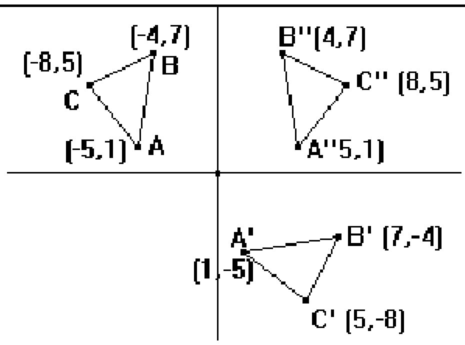
Ci sono sette piccole città nella contea di Smith che sono connesse l'un l'altra da strade sterrate come nel diagramma a sinistra. (Il diagramma non è in scala). Le distanze sono in chilometri. La contea, che ha un bilancio limitato, vuole costruire delle strade in modo che le persone possano spostarsi di città in città su strade asfaltate, sia direttamente sia indirettamente, ma in modo che il numero totale di miglia sia minimizzato. Trova una rete di vie asfaltate che rispondano ai requisiti della contea. Elimina ogni strada non asfaltata dal tuo disegno (adattato da Coxford 1996)

- **Trasformazioni e simmetrie**

Dalla scuola superiore, lo studente dovrebbe avere un'esperienza con le trasformazioni della geometria elementare: traslazioni, riflessioni, rotazioni e dilatazioni/contrazioni. Gli studenti della scuola superiore dovrebbero essere pronti a usare in percorsi sempre più generali queste trasformazioni fino a includere grafici, rotazioni come $R_{90°}$ e matrici. La rappresentazione matriciale permette lo studio di trasformazioni come oggetti con proprietà proprie, e rende evidenti collegamenti naturali e potenti ai concetti trovati per i numeri e per l'algebra. Si consideri come il seguente esempio potrebbe aiutare gli studenti a capire le matrici come strumenti rappresentativi e anche a giungere a una profonda conoscenza delle trasformazioni geometriche. Agli studenti potrebbe essere domandato di leggere la seguente spiegazione e rispondere nei dettagli in modo che possano spiegarla adeguatamente a sè stessi e ai loro compagni.

Il triangolo ABC con A(-5,1), B(-4,7) e C(-8,5) può essere rappresentato dalla matrice: $\begin{bmatrix} -5 & -4 & 8 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ **ALLO STUDENTE:** Cosa rappresentano le righe e le colonne della matrice ?	

La riflessione del triangolo ABC rispetto alla retta $y = x$ può essere rappresentata dalla seguente moltiplicazione $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -4 & -8 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -5 & -4 & -8 \end{bmatrix}$ in modo che i vertici dell'immagine sono A'(1,-5), B'(7,-4), C'(5,-8) . **ALLO STUDENTE:** Perché la moltiplicazione per $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rappresenta questa riflessione?	

<table>
<tr>
<td>Una successiva rotazione di 90° in senso orario attorno all'origine può essere rappresentata come segue:
$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 7 & 5\\ -5 & -4 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 8\\ 1 & 7 & 5\end{bmatrix}$$
cosicché i vertici della seconda immagine sono A"(5,1), B"(4, 7) e C"(8, 5).
ALLO STUDENTE: Perché la moltiplicazione per $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ rappresenta questa rotazione?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Nota, come mostrato a destra, che il prodotto delle matrici di due trasformazioni, dà la matrice di un'altra trasformazione. Questa matrice rappresenta una riflessione rispetto all'asse delle y, la trasformazione che manda il triangolo ABC nel triangolo A"B"C".

ALLO STUDENTE: usa la moltiplicazione fra matrici per trovare l'immagine del triangolo ABC con la trasformazione rappresentata da $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Qual è il risultato per i vertici A"B"C"?</td>
<td>$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Le matrici sono un modo utile per rappresentare le trasformazioni, dove il loro prodotto rappresenta una composizione di trasformazioni.

ALLO STUDENTE: Spiega che cosa significa, basandoti sulle discussioni di cui sopra.</td>
</tr>
<tr>
<td>Nota che l'ordine delle operazioni è importante. Se i due fattori sono invertiti, rappresenteranno una trasformazione differente.

ALLO STUDENTE: Che trasformazione rappresenta questa matrice? Come comporresti le due trasformazioni date per produrre questa trasformazione? Disegna l'immagine del triangolo ABC usando questa composizione di trasformazioni e verifica la tua risposta usando la moltiplicazione fra matrici.</td>
<td>$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$</td>
</tr>
</table>

Ci sono interessanti generalizzazioni per questo problema. La trasformazione del quadrilatero può essere rappresentata usando la moltiplicazione di matrici? Cosa, oltre questa trasformazione, può essere rappresentata dalle matrici? Ci sono condizioni sotto le quali la moltiplicazione di matrici è commutativa?

Gli studenti nei livelli superiori dovrebbero formalizzare la simmetria per oggetti a due o tre dimensioni, riconoscendo le simmetrie come riflessioni o rotazioni notevoli di una figura su se stessa. Gli insiemi di trasformazioni e le operazioni definite su di essi possono essere studiate come oggetti con le loro proprietà. Questioni strutturali, come la chiusura, l'esistenza dell'inverso, e la commutatività possono essere investigati e applicati quando si analizzano insiemi di trasformazioni.

- **Visualizzazione e ragionamento spaziale**

Gli studenti devono imparare a fare attenzione ai dettagli di un disegno o di una descrizione di un oggetto fisico, e dovrebbero lavorare per formare un'immagine mentale di esso se devono analizzare le sue relazioni con gli altri oggetti. Un diagramma simile a quello della Figura 7.12 è complesso. È difficile per uno studente rispondere a problemi su di esso a meno che le sue caratteristiche chiave possano essere identificate e isolate. In Figura 7.12, FG è parallelo a BD. I segmenti AB, FD, e AC sono tutti trasversali a questa coppia di segmenti paralleli. Gli studenti devono essere capaci di concentrarsi sui segmenti paralleli e su ognuna di queste trasversali per identificare le coppie di angoli congruenti o supplementari e rispondere alle questioni avanzate. È attraverso molte esperienze, prima con figure semplici, e dopo con quelli più complessi, che gli studenti possono sviluppare quest'abilità visiva.

Mentre gli studenti dovrebbero arrivare nella scuola superiore con esperienze ottenute creando oggetti a tre dimensioni a partire da disegni a due dimensioni, trovando il volume e stimando la superficie, è necessario nei livelli 9-12 un'esperienza concreta supplementare per aiutare gli studenti a estendere la loro conoscenza degli oggetti nello spazio. Visualizzare oggetti quali il solido ottenuto quando una figura è ruotata intorno a un asse, quali la forma di una sezione obliqua formata quando un piano taglia un cono (una sezione conica) o un altro solido, o quali la forma dei solidi troncati, richiede che gli studenti elaborino sia modelli fisici sia disegni. Il software visivo può essere utile in questo tentativo.

Interessarsi ai problemi geometrici sviluppati in un contesto di disegni con la prospettiva può costruire la capacità di visualizzare. Si consideri il seguente problema (adattato da ARISE):

Nel disegno ci sono due pali telefonici disegnati in prospettiva. Vorremmo disegnare un altro palo, EF, che abbia la stessa distanza dal palo CD che questo ha dal palo AB.

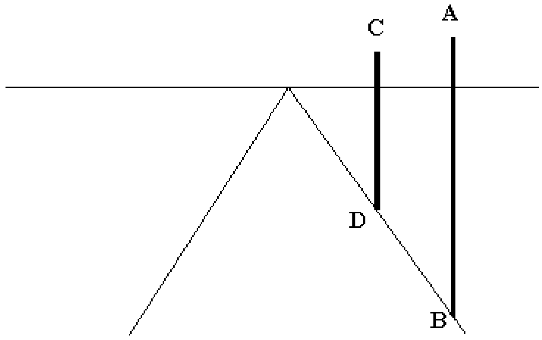
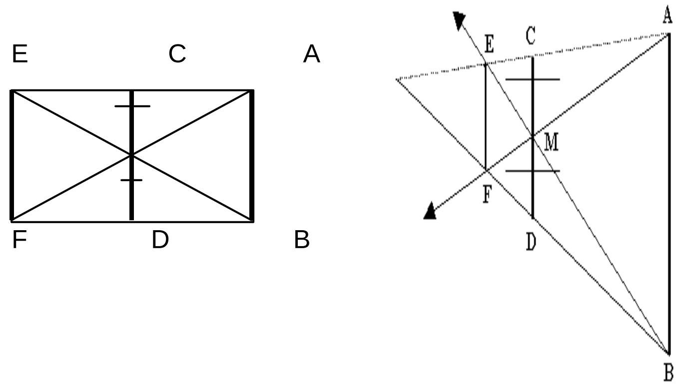


Figura 7.15A

Se gli studenti pensassero alla situazione in due dimensioni, potrebbero riconoscere che ABFE sarà un rettangolo, e che le diagonali del rettangolo si intersecano nel punto medio di CD, come è mostrato nella Figura 7.15A. Applicando queste relazioni alla situazioni mostrata in prospettiva si potrebbe rendere chiaro cosa occorre fare, come è mostrato nella Figura 7.15B.



A B

Figura 7.15. Soluzione del problema dei pali telefonici

Pensare e raffigurare oggetti tridimensionali è difficile per molti studenti. Creare e analizzare disegni in prospettiva, pensare come si formano linee e angoli su una superficie sferica, lavorare per comprendere le orientazioni e disegnare in un sistema di coordinate rettangolari tridimensionali contribuisce all'abilità degli studenti di pensare e ragionare spazialmente. Queste cose, con l'esperienza nelle due dimensioni e con un solido bagaglio di ragionamenti deduttivi possono essere le componenti dello studio della geometria nella scuola superiore.

Standard 4: Misura

I programmi di matematica devono dare spazio ai problemi di misura in modo che tutti gli studenti:

- capiscano le grandezze, le unità, e i sistemi di misura;
- applichino diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure.

Elaborazione: livelli 9-12

Solitamente, la misura è vista come un processo di assegnazione di uno o più numeri alle grandezze di un oggetto, come la descrizione del peso e le dimensioni di alcuni oggetti, oppure della loro velocità e accelerazione. A livelli superiori, il concetto di misura si amplia.

Gran parte della matematica consiste nel definire il problema dello spazio dentro il quale la situazione ha senso e, in seguito, nello scegliere una rappresentazione che tenga conto di un'efficiente misurazione delle parti di questo spazio. Le strutture più comunemente usate ai livelli 9-12 sono: la retta dei numeri reali, il sistema di coordinate rettangolari e il sistema di coordinate polari. Per esempio, un problema che coinvolge la densità di traffico su una porzione di autostrada, potrebbe essere organizzato razionalmente con una retta numerica usando rilevatori di miglia per determinare le coordinate. Un problema che coinvolge uno spostamento in una città, potrebbe essere considerato usando un sistema di coordinate rettangolari, basato su un isolato cittadino come unità, benché la misura delle distanze dipenda sia dal fatto che le lunghezze degli isolati sono uniformi, sia dal fatto che le distanze possono essere misurate attraverso l'isolato cittadino. Un problema che coinvolge la densità di popolazione circostante una città, potrebbe essere visualizzato su un sistema di coordinate rettangolari. Comunque, la struttura di un sistema di coordinate polari, sarebbe molto più conveniente in questo caso, poiché la densità della popolazione tende a diminuire con la distanza radiale da una grande città. La Figura 7.16 mostra la densità della popolazione attorno alla città di Bellingham.

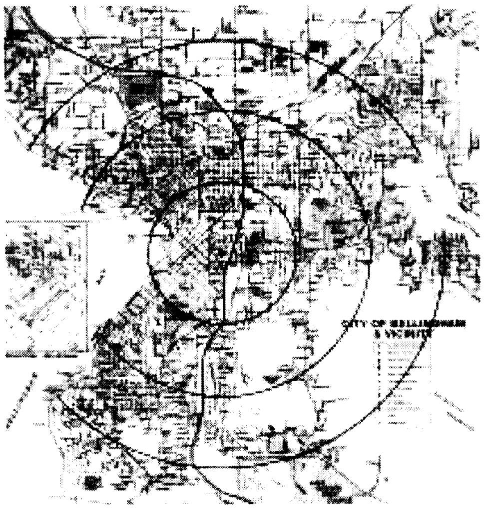


Figura 7.16. Densità della popolazione attorno a Bellingham.

Oltre a scegliere una rappresentazione appropriata, gli studenti della scuola superiore dovrebbero essere in grado di scegliere un'unità appropriata al problema considerato. Per esempio, la velocità di un insetto, calcolata come 4 cm/sec, è più semplice da capire che l'equivalente 0,00004 km/sec. Le misure derivate, come la densità di popolazione, la pressione o l'accelerazione, possono essere formate dalla combinazione di varie misure dirette. Una particolare attenzione dovrebbe essere dedicata alle proporzioni tra misure, come il tasso di variazione. Le misure indirette, come la velocità istantanea e l'area all'interno di una figura irregolare, possono essere raggiunte attraverso approssimazioni successive.

Nozioni sulle scale metriche e sulle variazioni delle stesse, dovrebbero essere considerate a livello di scuola superiore. Esempi di variazioni di scale includono il posizionamento di uno schermo su un calcolatore grafico per osservare il comportamento locale o globale di una funzione, o l'utilizzo di graduazioni logaritmiche per linearizzare il grafico di dati esponenziali. Gli studenti dovrebbero essere consapevoli degli errori di misura e di come questi aumentino durante un calcolo, e dovrebbero essere in grado di scegliere un margine accettabile di errore per una determinata situazione problematica.

Aree di interesse per i livelli 9 –12

- **Capire le grandezze, le unità, e i sistemi di misura**

Nei livelli 9-12 tutti gli studenti dovrebbero:

- selezionare un'adeguata unità di misura o scala e capire le scelte che vengono fatte;
- analizzare come i cambiamenti nella misura della grandezza di un oggetto si colleghino ad altri: ad esempio, come il modo in cui la variazione nel raggio o l'altezza di un cilindro influenza l'area della superficie o il volume del cilindro;
- capire il tasso di variazione come quoziente di due diverse misure;
- usare approssimazioni successive per trovare aree e tassi di variazione.

- **Applicare diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure**

Ai livelli 9-12 tutti gli studenti dovrebbero:

- applicare tecniche di cambiamenti di scala per osservare un problema da diverse prospettive come cambi di "finestra" nei grafici di funzione;
- usare misure in gradi e radianti;
- capire e applicare i concetti di varianza e deviazione standard come misure di dispersione in una distribuzione;
- usare l'analisi dimensionale per convertire le unità di misura e per verificare che le espressioni e le equazioni abbiano un significato;
- determinare la precisione, l'accuratezza e gli errori di misurazione; identificare origini (rilevazione di errori di arrotondamento) e ampiezza di possibili errori in sistemi di misura; capire come gli errori aumentano con i calcoli e determinare quanta imprecisione è ragionevole per misure diverse;
- usare approssimazioni successive per illustrare e usare le formule per il volume di una sfera, un cilindro, un cono;
- applicare informalmente concetti di limite per sviluppare ulteriormente i concetti d'area e di tasso istantaneo di variazione;
- combinare misure (per esempio, lunghezza, tempo, massa, area, volume) usando rapporti per produrre misure come l'accelerazione, la velocità, la pressione e la densità oltre a misure prive di dimensioni come i rapporti trigonometrici;
- combinare misure (per esempio, massa, accelerazione, distanza) usando la moltiplicazione per produrre misure come forza, lavoro e ore uomo.

Discussione

- **Grandezze, unità, sistemi di misurazione.**

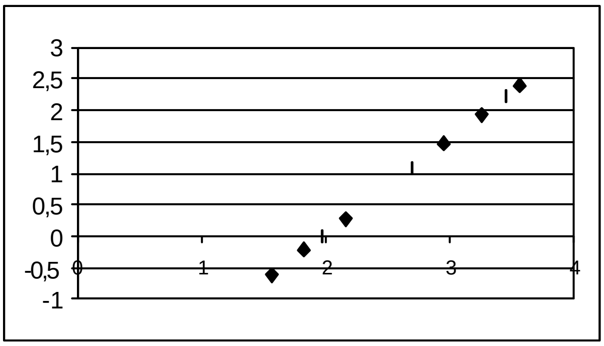
Ai livelli che precedono la scuola secondaria, la misurazione è principalmente l'assegnazione di un valore numerico alla grandezza di un oggetto. Questa misura può essere determinata, o intesa come, confronto dell'unità scelta rispetto a quella grandezza. Questo concetto di misura continua ai livelli 9-12 quando gli studenti vengono introdotti alla misura in radianti e alla deviazione standard. Allo stesso tempo, l'importanza data alla misura si estende oltre alla misura di una grandezza, fino alla scelta di un'unità o scala che permetta una chiara rappresentazione di un problema. Per esempio, la scala dei logaritmi può essere utilizzata per rappresentare potenze e dati esponenziali in modo da "linearizzare" i dati, rendendone più facile l'interpretazione. Gli studenti della scuola secondaria dovrebbero capire quando e perché tali cambiamenti di scala sono usate. Dovrebbero inoltre capire che la composizione di funzioni inverse gioca un ruolo critico in questo fenomeno di linearizzazione.

Si consideri il seguente problema. Agli studenti vengono date le prime tre colonne della tabella 7.2 contenente alcuni dati per i pianeti del nostro sistema solare e viene loro chiesto di fare un'ipotesi sul numero di anni che un immaginario decimo pianeta situato a 10 miliardi di miglia dal sole impiegherebbe per girare intorno al sole.

	Lunghezza (Milioni di Miglia) del semiasse maggiore dall'orbita (x)	Tempo richiesto (anni) per orbitare intorno al sole (y)	log(x)	log(y)
Mercurio	36	0,241	1,5563	-0,61798
Venere	67	0.615	1,82607	-0,21112
Terra	93	1	1,96848	0
Marte	142	1,88	2,15229	0,27416
Giove	483	11,9	2,68395	1,07555
Saturno	886	29,5	2,94743	1,46982
Urano	1782	84	3,25091	1,92428
Nettuno	2793	165	3,44607	2,21748
Plutone	3670	248	3,56467	2,39445

Tabella 7.2 Dati dei pianeti

Quando i dati vengono rappresentati graficamente, come nella Figura 7.17A, sembrano non essere lineari e in alcune circostanze persino esponenziali. I dati di riferimento per i quattro pianeti più vicini al sole non possono essere facilmente distinti, rendendo il rapporto più difficile da determinare. Comunque, rappresentando graficamente i logaritmi di entrambi i gruppi di valori (una trasformazione "log-log"), come nella Figura 7.17B, il rapporto può essere più facilmente calcolato dal momento che i logaritmi hanno una ben definita relazione lineare.



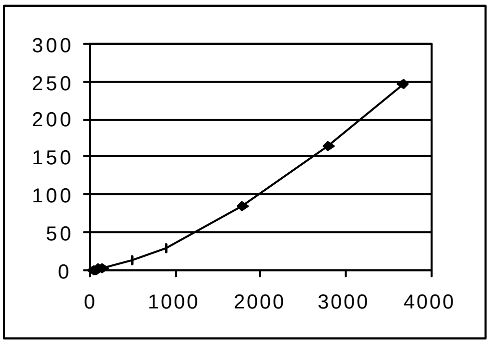


Figura 7.17 Rappresentazione della distanza dei pianeti in scale diverse

Gli studenti possono poi fare uso di un pacchetto di elaborazione di dati statistici per trovare una linea di regressione relativa ai logaritmi, in questo caso $\log(y) = 1,5\cdot\log(x) - 2,95235$. Usando la loro conoscenza delle funzioni inverse possono determinare che $y = 10^{-2,95235}x^{1,5} = 0,00111596\ x^{1,5}$. Perciò, il decimo pianeta dovrebbe impiegare circa 1118 anni per compiere un'orbita completa intorno al sole. Gli studenti possono confrontare questo modello con un modello lineare senza una trasformazione logaritmica. La previsione in questo modello è circa di 645 anni. Se paragoniamo la previsione dei valori dei due modelli ai valori effettivi, è chiaro che la regressione con la trasformazione log-log ha portato a risultati molto più precisi. In ogni caso, il valore previsto ha una percentuale d'errore minore dell'1%. L'errore nel modello lineare è molto più elevato, indicando che 1118 anni possano essere la miglior risoluzione al problema.

Molti altri fenomeni sono rappresentati in maniera più chiara per mezzo di scale logaritmiche simili. Le orecchie umane, per esempio, hanno la capacità di distinguere tra basse intensità sonore che sono ravvicinate tra loro, mentre non sono in grado di distinguere così bene alte intensità sonore molto distanziate tra loro. Cioè, le persone possono facilmente sentire la differenza tra intensità di suono di 10^{-3} e 10^{0} pascal. Ma non riescono a sentire molta differenza tra intensità di suono di 10^{7} e 10^{8} pascal. A causa di questo fenomeno non uniforme, i valori relativi all'intensità del suono sono spesso rappresentati su una scala logaritmica di riferimento, creando unità in decibel disposte a intervalli regolari.

Gli studenti possono far ricorso a un'analisi dimensionale per tenersi al corrente delle unità al momento in cui convertono le misure tra le unità, così come quando 60 miglia/h è espresso come 88 piedi/secondo. Ancora più importante è il fatto che un'analisi dimensionale aiuta a tenersi al corrente di quali entità si usano (e in quali modi), in problemi più complessi come il seguente:

> Determinare il lavoro compiuto da un aeroplano antincendio che solleva fino a 200 piedi un recipiente cilindrico riempito d'acqua. Il recipiente pesa 500 libbre. Il suo raggio è di 4 piedi e la sua altezza di 6 piedi. Gli studenti possono cominciare con la formula per il lavoro compiuto.
>
> Lavoro = Forza x Spostamento
>
> Possono poi riscrivere la formula usando le unità di misura appropriate.
>
> ft – lbs = [(densità dell'acqua) x (volume dell'acqua) + peso del contenitore] x spazio percorso durante il sollevamento. Ciò conduce poi a scelte di unità più coerenti.

$$\text{ft} - \text{lbs} = [\ \frac{\text{lbs}}{\text{ft}^3} \times \text{ft}^3 + \text{lbs}\ ] \text{ x ft}$$

Il calcolo finale è quindi chiaro.

$$\text{Lavoro} = [\,62{,}4\ \frac{\text{lbs}}{\text{ft}^3} \times\ 16\pi \cdot 6\ \text{ft}^3 + 500\ \text{lbs}\ ] \text{ x } 200\ \text{ft} = 3{,}864 \cdot 10^6 \text{ft} - \text{lbs}$$

Risolvendo problemi che coinvolgono dati provenienti dal mondo reale, gli studenti dovrebbero anche essere consapevoli dell'esistenza della propagazione dell'errore. Se una sbarretta di un metro viene usata con attenzione per misurare il bordo di un tavolo misurandolo al millimetro, dando con un risultato di 3,431 m $\times$ 2,627 m, dovrebbero capire che è sbagliato riportare l'area della superficie del tavolo come 9,013237 m^2. Le loro misurazioni sono precise fino a 0,0005 m su ogni lato, così i lati potrebbero effettivamente avere le lunghezze comprese nei seguenti intervalli: 3.431 $\pm$ .0005 e 2.627 $\pm$ .0005. Il calcolo con gli estremi dà un massimo di 9.01626625 ed un minimo di 9.01020825, che dimostra che il conteggio è affidabile solo fino a due cifre decimali.

- **Tecniche, strumenti e formule di misura**

Gli studenti dei livelli 9-12 possono sviluppare qualche conoscenza delle formule base per la superficie e per il volume, e possono dedicarsi a esplorazioni che rivelano come differenti attributi dei solidi geometrici influenzino i volumi di questi solidi. Si consideri come gli studenti potrebbero affrontare il seguente problema:

> Data una circonferenza di raggio R, trovare la misura approssimativa dell'angolo al centro del settore circolare che dovrebbe essere rimosso dalla circonferenza in modo che il volume del cono formato dalla rimanente porzione sia il più grande possibile.

Gli studenti possono affrontare in un primo momento questo problema empiricamente. L'insegnante può fornire delle circonferenze di carta, farle tagliare dagli studenti lungo il raggio (verificare che abbiano trovato il centro dopo aver applicato le conoscenze tratte dalla geometria), e poi usare una graffetta per valutare la posizione che credono dia il volume più grande. Potrebbero riempire il cono con del riso e poi rimuovere la graffetta per vedere se il livello del riso cala o trabocca. Per molti studenti il risultato è controintuitivo. Spesso credono che il volume più esteso si verifica quando l'altezza e il raggio del cono sono approssimativamente gli stessi. Comunque, la formula del volume, $V = (1/3)pr^2h$, indica che il raggio del cono dà un contributo più grande al volume di quello dell'altezza, perciò il raggio ha bisogno di essere maggiore dell'altezza. Notando che $r^2 = R^2 - h^2$, gli studenti possono scrivere il volume V come funzione di h, e usare una calcolatrice grafica per trovare l'altezza approssimativa alla quale il volume è massimo per valori dati di R. Servirsi di questi risultati dovrebbe aiutare gli studenti a determinare l'angolo vero e proprio e notare che non dipende da R, un fatto che sulla base di certe riflessioni potrebbe non sorprendere poiché i coni di massimo volume dovrebbero essere simili.

Di conseguenza, agli studenti può essere assegnato il problema correlato di determinare le dimensioni di un contenitore, il cui volume è 1 litro, e la cui superficie sia la più piccola possibile.

Considerando l'ipotesi che il contenitore con la superficie più piccola è più economico da fare, questo problema può portare a discutere del perché molti contenitori nel supermercato hanno certe dimensioni.

Lo studio formale dei limiti e dei relativi argomenti non è parte degli argomenti centrali qui proposti per i livelli 9-12. In sostanza, comunque, i concetti di limite, l'area contenuta in una curva e i tassi istantanei di variazione possono essere raggiunti informalmente attraverso approssimazioni successive. Gli studenti possono elaborare buone approssimazioni per la circonferenza e l'area di un cerchio, per esempio. Le aree possono essere divise in rettangoli "sottili" e i tassi immediati di variazione possono essere approssimati calcolando il tasso medio di variazione fra due punti che sono "vicini" tra loro. Grazie a questi procedimenti, gli studenti possono comprendere alcune nozioni complesse a livello intuitivo e porre le basi per studi più precisi dei limiti nel caso in cui ne debbano aver bisogno più tardi.

Standard 5: Analisi dei dati, statistica e probabilità

I programmi di matematica devono porre attenzione all'analisi dei dati, alla statistica e alla probabilità in modo che tutti gli studenti:

- si pongano domande e vi rispondano raccogliendo, organizzando e rappresentando dati;
- interpretino dati usando metodi analitici;
- sviluppino e valutino deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati;
- capiscano e applichino nozioni di base su caso e probabilità.

Elaborazione: livelli 9-12

Alla fine dell'ottavo livello, gli studenti dovrebbero essere in grado di formulare domande, progettando esperimenti e indagini per raccogliere dati, progettando e riassumendo i dati che aiutino a rispondere a quelle domande. L'enfasi dovrebbe essere posta sui dati univariati con un'introduzione informale ai dati bivariati. Gli studenti dovrebbero essere introdotti, in modo non formale, ai concetti di casualità e di sorte. Come in altre aree del curricolo, queste esperienze saranno ampliate e approfondite negli anni della scuola superiore. Partendo dalla loro conoscenza numerica e dall'algebra, gli studenti formalizzerebbero le loro conoscenze delle relazioni sul grafico di una distribuzione e delle misure di forma, centro e diffusione. Le distribuzioni bivariate dovrebbero essere studiate in qualche misura, osservando la comune variazione di due caratteristiche dei soggetti in una popolazione. Varie tecniche dovrebbero essere introdotte, comprese le curve di regressione e le tecniche per adattare i modelli matematici. In generale, calcolatrici manuali e computer possono essere usati efficacemente per tutta la durata degli studi relativi all'analisi dei dati, alla statistica e alla probabilità per illustrare concetti, eseguire calcoli, creare rappresentazioni e fornire dati da simulazioni.

Nella scuola superiore i ragazzi dovrebbero approfondire il significato e l'uso delle distribuzioni di probabilità. Questo studio includerà un'introduzione a distribuzioni speciali che includono quelle binomiali e quelle normali. Potrebbero usare le distribuzioni per prevedere le probabilità di eventi e anche per valutare la qualità di una stima basata su un campione.

Gli studenti dovrebbero raggiungere una conoscenza più formalizzata di ciò che è in gioco nella progettazione di indagini ed esperimenti volti a fornire risposte a quesiti ben posti. Le indagini campionarie selezionano campioni a caso da una popolazione ben definita, allo scopo di stimare un parametro della popolazione, ad esempio una media o una proporzione. Certi esperimenti assegnano a caso i trattamenti a cui sottoporre unità sperimentali pre-selezionate, allo scopo di scoprire differenze nei trattamenti , sempre che esse esistano. La casualità viene usata in entrambi i casi per ridurre gli errori sistematici e rendere ripetibile lo studio, in modo che si possa calcolare un prevedibile tasso di errore. E' proprio questa ripetibilità che fa sì che le simulazioni possano essere usate per studiare empiricamente gli errori di campionamento e gli errori sperimentali. Questo è il cuore della Statistica, e gli studenti delle superiori possono sviluppare un certo livello di comprensione di queste idee di base.

Gli studenti dovrebbero rivedere l'argomento della progettazione degli esperimenti e guardare con maggiore attenzione alle altre caratteristiche che possono influenzare la bontà con cui un campione rappresenta la popolazione da cui esso è tratto. Gli studenti dovrebbe capire meglio l'influenza della dimensione del campione sulla probabile vicinanza della stima della statistica della popolazione al suo valore effettivo. Essi dovrebbero applicare il Teorema Centrale del Limite per comprendere meglio che quanto più grandi sono i campioni e tanto più piccola è la gamma delle stime ragionevoli, tratte dai campioni, per la statistica della popolazione.
Questi sono esempi dei modi con cui gli studenti applicano conoscenze statistiche quando fanno inferenze circa una popolazione. Una certa comprensione informale della probabilità, con la sua capacità di descrivere la casualità, viene richiesta, dato che essa costituisce la base concettuale su cui poggia l'inferenza statistica.

Punti nodali per i livelli 9-12

- **Porsi domande e rispondervi raccogliendo, organizzando e rappresentando dati**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- progettare e dimostrare di conoscere metodi appropriati per raccogliere dati univariati, in modo da studiare la distribuzione di una variabile in una popolazione e confrontare le distribuzioni della stessa variabile in due diverse popolazioni.
- ideare metodi appropriati per raccogliere, registrare e organizzare dati per ottenere dati bivariati in modo da studiare le associazioni tra loro;
- selezionare rappresentazioni grafiche appropriate e riassunti numerici di dati:
- capire quanto un cambio di rappresentazione (per esempio, scale un grafico di dispersione, categorie in una tabella a doppia entrata, e ampiezze delle classi in un istogramma) influenza le informazioni che contiene;

- usare calcolatori e applicazioni dei computer (p.e. fogli elettronici, software di simulazione, software statistico) appropriati per un utilizzo relativo alla raccolta di dati, all'organizzazione e alla loro rappresentazione.

- **Interpretare dati usando metodi analitici**

Nei livelli 9-12, tutti gli studenti dovrebbero:

- calcolare, identificare e interpretare misure di centralità e di dispersione (p.e. campo di variabilità, varianza, deviazione standard, e interquartile);
- descrivere forme di insiemi di dati mono- e bi-dimensionali;
- cercare simmetrie e asimmetrie, raggruppamenti e lacune, e possibili dati fuori dalla norma, considerando i loro effetti sull'interpretazione dei dati stessi;
- riconoscere che la dimensione dei campioni e le trasformazioni dei dati influenzano la forma, il centro e la dispersione;
- usare le diverse rappresentazioni di dati, compresi i grafici a diffusione, le distribuzioni di frequenza, e tabelle a doppia entrata;
- essere capaci di distinguere andamenti in dati a due variabili, visualmente e numericamente, e usare tecnologie per determinare quanto meglio i differenti modelli (p.e. lineari, esponenziali e quadratici) si adattino ai dati, e comprendere che un adattamento perfetto è improbabile per i dati empirici.

- **Sviluppare e valutare deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati**

Nei livelli 9-12 tutti gli studenti dovrebbero:

- capire gli elementi coinvolti nel ritrovamento di modelli validi per un fenomeno;
- applicare modelli adatti a predire risultati non ancora osservati;
- valutare conclusioni basate su dati;
- usare dati campionari per stimare statistiche delle varie popolazioni;
- usare e interpretare le distribuzioni normali e binomiali in modo appropriato.

- **Capire e applicare nozioni di base su caso e probabilità**

Nei livelli 9-12 tutti gli studenti dovrebbero:

- capire e calcolare probabilità di eventi indipendenti, disgiunti e condizionati;
- capire che alcuni fenomeni sono casuali e applicare la legge dei grandi numeri per predire comportamenti a lungo termine;
- usare distribuzioni di probabilità per calcolare probabilità di eventi.

Discussione

- **Raccogliere, organizzare e rappresentare dati**

Come ha detto un gruppo di statistici “Risposte specifiche a domande di natura quantitativa non sono facili! Gli studenti dovrebbero avere un’idea di come sia difficile rispondere a domande come: ‘quale percentuale di votanti crede che l’anno scolastico dovrebbe essere allungato?’ oppure ‘una dieta ad alto contenuto di colesterolo aumenta la possibilità di un attacco cardiaco?’. Dovrebbero essere consapevoli dei fattori chiave di uno studio ben organizzato, al fine di avere una base per prendere decisioni sui vari argomenti che ruotano attorno a tali studi. Questa comprensione può iniziare nei livelli 9-10 e può essere approfondita e ampliata per tutti gli anni successivi.”

Alla scuola superiore, la maggior estensione dello studio dei dati, delle statistiche e della probabilità rispetto a quella elementare comporta maggior enfasi sui dati multivariati. Anche quando uno studio riguarda soltanto una variabile (p.e. il reddito) di una popolazione, gli studenti dovrebbero essere consapevoli del fatto che questa variabile potrebbe essere influenzata da molte variabili di fondo, come età, esperienza lavorativa, educazione o tipo di lavoro. L’associazione tra le variabili è uno degli elementi chiave di ogni indagine statistica.

Lo studio della covarianza di due caratteristiche dovrebbe rappresentare la parte più importante nell’analisi dei dati nei livelli 9-12. Riflettendo sulle tendenze recenti nell’analisi statistica e traendo vantaggio dalla tecnologia in rapida evoluzione, gli studenti imparano a interpretare le informazioni da tabelle a doppia entrata e da varie rappresentazioni grafiche di dati bivariati. La facilità di creare grafici a dispersione, curve di regressione e linee di tendenza con strumenti tecnologici aiuta gli studenti a vedere come coppie di caratteristiche sono collegate. Gli studenti dovrebbero analizzare e rappresentare i dati in modo da aumentare la propria comprensione e facilitare la comunicazione dei dati stessi.

Alla scuola media la raccolta dei dati è il fulcro dello studio dell’analisi dei dati e della statistica. Gli studenti sperimenteranno dati forniti da altre fonti; per esempio, dai loro compagni di classe o da esperimenti. Alla scuola media, diventano più raffinati nel formulare domande e approntare mezzi appropriati per raccogliere i dati attraverso osservazioni, esperimenti e altri mezzi che saranno utili per rispondere a quelle domande. Possono conoscere l’importanza di raccogliere campioni e di creare rapporti ed esperimenti.

- **Descrivere, analizzare e interpretare dati**

Gli studenti dei livelli 9-12 sfruttano le precedenti esperienze con i vari modi di mostrare i dati univariati, in modo che la loro conoscenza possa essere più formale e possa essere utilizzata per fare paragoni. Gli studenti dovrebbero utilizzare misure centrali e di dispersione per paragonare popolazioni diverse, in modo da vedere se la variabile presa in considerazione ha la stessa distribuzione in entrambe le popolazioni. Dovrebbero sapere il perché del fatto che aggiungere una costante a tutti i valori osservati modifica le misure di centro, ma non modifica le misure di dispersione. Gli studenti dovrebbero anche comprendere che la moltiplicazione di ogni valore considerato, per una stessa costante, produce una nuova deviazione standard che rappresenta il prodotto della deviazione standard originale per la costante stessa. Gli studenti dovrebbero anche avere esperienza nel costruire punteggi standard partendo dalla media e dalla deviazione standard dei dati osservati. Successivamente, dovrebbero applicare la loro conoscenza della distribuzione normale per comprendere la probabilità di un'osservazione che sia, ad esempio di due deviazioni standard sopra la media.

In quest'età dovrebbe esserci una maggior attenzione ai dati bivariati. L'idea della forma in un contesto di monovariabilità si trasforma ora in direzione. Per esempio, la nuvola di punti di un grafico a dispersione è inclinata verso l'alto o verso il basso? L'idea della linearità può essere affrontata nella domanda: "una linea che passa per il centro della nuvola appare dritta o curva?". E la nozione di dispersione diviene più sofisticata; per esempio, "quanto sono vicini i punti del grafico alla linea di centro? Simili tendenze possono essere analizzate nelle tabelle a doppia entrata.

L'analisi dei dati fornisce un collegamento naturale tra la matematica e le altre discipline. Per esempio, un esame della popolazione degli Stati Uniti ogni dieci anni, che denota delle tendenze esponenziali, induce a domandarsi che cosa causi le variazioni rispetto ai trend che ci si aspettava. Nella Figura 7.18 la popolazione, per ogni decennio, dal 1790 al 1980 è rappresentata graficamente e fissata tramite una curva esponenziale che si basa sui primi tre punti. E' interessante riflettere sul perché i dati cadano progressivamente al di sotto della curva che comincia intorno al 1860. Quest'esercizio potrebbe essere ripetuto iniziando intorno al 1860 appunto, e ancora più tardi, creando così discussioni su possibili cause storiche.

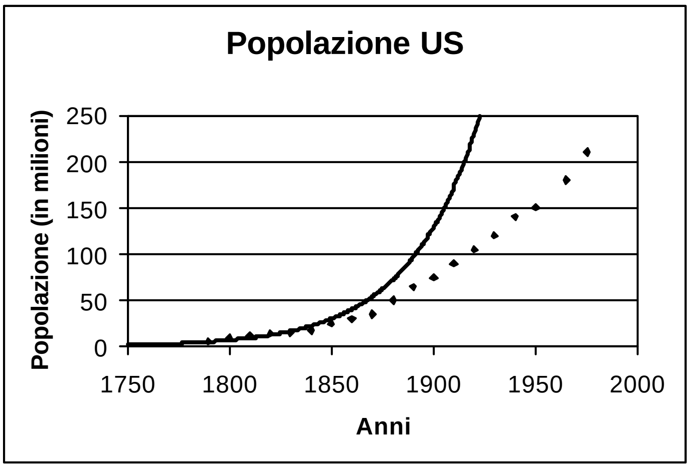


Figura 7.18. Crescita popolazione U.S.

- **Interferenza e previsione**

Gli studi delle scuole superiori dovrebbero fornire agli studenti un fondamento concettuale per l'inferenza statistica, con attenzione particolare all'idea di casualità. Questo è un concetto piuttosto difficile da capire per gli studenti. Non è naturale aspettarsi che l'insieme delle occorrenze di un evento incerto possa essere prevedibile basandosi su ciò che si può imparare da un campione. La statistica impone la casualità, come base dello studio per ridurre gli errori sistematici e fornire un errore prevedibile che crei la base per la deduzione statistica. Le simulazioni che mostrano le distribuzioni campionarie per statistiche, come la media e la mediana, sono strumenti d'istruzione di valore in quest'età, in quanto gli studenti possono vedere che la casualità può condurre alla previsione della forma, del centro e della dispersione della distribuzione dei campioni. Più gli studenti lavorano con dati bivariati nei livelli 9-12, più saranno in grado di investigare rapporti usando funzioni lineari, esponenziali, potenze, logaritmiche e altre ancora per scegliere la curva che meglio si adatta a un insieme di dati. Sia le stime per via grafica sia ancora per scegliere la curva che meglio si adatta a un insieme di dati. Sia le stime per via grafica sia i coefficienti di correlazione possono aiutare a determinare il migliore tipo di grafico per rappresentare i dati. Gli studenti inoltre devono sviluppare una certa facilità nel riconoscere punti anomali, e nell'apprezzare i loro effetti sull'andamento delle curve e analizzare gli scarti. Inoltre, fornendo più strumenti matematici disponibili per effettuare previsioni, i programmi delle scuole superiori metteranno a disposizione degli studenti strumenti più sofisticati per confrontare coppie di caratteri. La correlazione è un'importante parametro di associazione fra misure (continue) di dati.

Gli studenti della scuola superiore dovrebbero essere preparati a valutare accuratamente e in modo critico la progettazione complessiva, i processi di raccolta dei dati, le conclusioni tratte dagli esperimenti, il quadro generale e gli studi. Essi dovrebbero valutare se le parole, i dati e i grafici contenuti nella presentazione, nei rapporti, negli articoli di giornale, sono accurati e coerenti tra loro e supportano le conclusioni presentate. Gli studenti dovrebbero essere informati, analitici, attenti consumatori delle informazioni e dei dati creati da altri e dovrebbero essere abili a collezionare dati propri per rispondere a domande importanti.

- **Probabilità**

La probabilità è per molte persone contro-intuitiva; il ragionamento probabilistico deve essere affrontato direttamente in modo che gli studenti acquisiscano buone competenze. Devono verificare le loro intuizioni con i risultati di simulazioni e i dati empirici raccolti. È necessario che sviluppino l'abitudine a riflettere attentamente piuttosto che confidare nelle loro prime impressioni quando si trovano davanti a situazioni probabilistiche.

Nei livelli 9-12 gli studenti devono sfruttare i loro lavori informali precedenti che riguardano la casualità. I loro esperimenti con conclusioni probabilistiche, calcolando e determinando rapporti, aiutano a comprendere la nozione di spazio dei campioni e la nozione di eventi come punti di questo spazio. Gli studenti delle scuole superiori devono cominciare a sviluppare una comprensione del modo di calcolare la probabilità mediante la combinazione di eventi, considerando quelli indipendenti e le probabilità condizionate. L'esempio seguente illustra l'uso della tavola a doppia entrata (Hopfensperger et al. 1998):

> ELISA è un famoso test per esaminare campioni di sangue per la presenza dell' HIV. Per campioni di sangue contenenti HIV, ELISA mostra un risultato corretto il 99% delle volte. Questo significa che nel 99% dei casi il test identifica correttamente sangue che contiene HIV. Per campioni di sangue che non contengono HIV, ELISA dà un risultato positivo nel 2% dei casi. Questo significa che nel 2% dei casi viene identificata in modo scorretta la presenza di HIV. Detto questo un laboratorio esamina 1000 campioni di sangue con ELISA. Si assuma che il 50% dei campioni contenga HIV.
> Quanti campioni che contengono HIV ti aspetti che diano un risultato positivo? Quanti falsi positivi ti aspetti? Copia e completa la seguente tabella:

	Con HIV	Senza HIV	Totali
Testati HIV positivi			
Testati HIV negativi			
Totali	500	500	1000

Gli studenti delle scuole superiori devono imparare a capire le distribuzioni di probabilità. Per esempio devono avere qualche esperienza con la distribuzione binomiale, possibilmente mettendola in relazione con il triangolo di Pascal nel campo dei numeri e con il teorema binomiale in algebra. La domanda “qual è la probabilità che 10 persone su 50 che ricevono una promozione siano donne, quando il 65% degli aspiranti sono donne?” in un primo momento può essere affrontata mediante delle simulazioni per ottenere una risposta approssimativa, poi con la distribuzione binomiale per trovare la soluzione teorica.

Lo studio della probabilità nei primi livelli fornisce una solida base per il lavoro degli studenti della scuola superiore con le funzioni di densità. La probabilità di un accadimento all’interno di un intervallo è rappresentato dall’area sottesa da una funzione di densità su un certo intervallo. Ciò è particolarmente utile per capire la distribuzione normale e le altre distribuzioni continue. La probabilità può essere anche un campo di conoscenza per un’altra parte del curriculum, come illustrato inizialmente in questo capitolo nella Figura 7.14.

Standard 6: Problem Solving

I programmi di matematica devono concentrarsi sulla soluzione di problemi come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- costruiscano nuove conoscenze matematiche attraverso il loro lavoro con i problemi;
- sviluppino l’attitudine a formulare, rappresentare, astrarre e generalizzare in situazioni all’interno e all’esterno della matematica;
- applichino un’ampia varietà di strategie per risolvere problemi e le adattino a nuove situazioni;
- controllino e riflettano sul loro pensiero matematico nella risoluzione dei problemi.

Elaborazione: livelli 9–10

Le esperienze di Problem Solving che gli studenti hanno nell’istruzione matematica secondaria sono vitali per lo sviluppo delle loro conoscenze matematiche. Per quanto bagaglio di conoscenze abbiano acquisito, quella conoscenza da sola non sarà sufficiente ad aiutarli ad affrontare le nuove sfide nel campo del lavoro, della scuola o nella vita. Dovranno adattare e ampliare ciò che sanno, e farlo in modo efficace è il nucleo del problem solving.

Gli studenti che hanno successo hanno una certa predisposizione al problem solving, oltre alla fiducia in se stessi e alla voglia di assumersi compiti difficili. Questo essere predisposti comprende anche una certa tendenza a cercare la struttura, analizzare la situazione con attenzione e rappresentarla matematicamente, e a usare strumenti matematici in modo appropriato. Colui che risolve un problema con successo è dotato di risorse, sia nel cercare informazioni per risolvere il problema sia nel fare un uso efficace di quanto sa. La sua conoscenza strategica gli consente delle opzioni; se il primo approccio a un problema fallisce, ha accesso a un secondo o a un terzo approccio. Se questi approcci non funzionano, sa come riconsiderare il problema, sezionarlo e guardarlo da diverse prospettive che gli possano essere di aiuto per capirlo meglio o fare progressi verso la soluzione. Essere abile a risolvere problemi significa anche saper pianificare, ma senza aderire ciecamente a ciò che è stato progettato. Al contrario, chi si accinge a risolvere un problema controlla come vanno le cose e fa considerazioni e modifiche quando il progresso non sembra essere buono quanto dovrebbe. Il problem solving deve essere un elemento importante dell'esperienza di scuola secondaria.

- **Elementi caratteristici del problem solving nei livelli 9–12**

Nei livelli 9–12 ci sono sia elementi di continuità molto forti sia ampliamenti significativi dell'esperienza di problem solving dei livelli pre-K-8. La natura generale dell'impegno degli studenti con la matematica rimarrà la stessa: impareranno il problem solving, amplieranno la loro conoscenza attraverso quest'ultimo e risolveranno problemi.

Un approccio curricolare al problem solving permette agli studenti di costruire nuove conoscenze matematiche attraverso un lavoro sui problemi. Per esempio, poiché gli studenti lavorano sulla determinazione dei diversi modi in cui una rete stradale tra due città può essere attraversata, si possono indicare concetti fondamentali di teoria dei grafi. Si può chiedere agli studenti di giustificare la loro scelta di metodo dando origine a conversazioni molto vivaci in cui vengono confrontati i vari metodi di soluzione dei problemi.

Un altro problema in grado di promuovere concetti matematici interessanti riguarda la costruzione di un tunnel attraverso una montagna o sotto l'acqua, come ad esempio il tunnel sotto la Manica. Se per esempio, le squadre preposte alla costruzione scavano da entrambi i lati del tunnel, qual è la garanzia che s'incontrino a metà? Ci sono molti problemi simili che forniscono un contesto in cui gli studenti possono sviluppare e ampliare la loro comprensione dei fondamenti della matematica. Un insegnante potrebbe chiedere agli studenti di trovare un percorso attraverso una città partendo da un punto, terminando in un altro e passando in una strada esattamente una volta. Questo problema può introdurre un'unità didattica sulla teoria dei grafi. Allo stesso modo, nozioni sulla teoria dei giochi possono emergere quando gli studenti sono impegnati in un gioco, determinare se un gioco è corretto, e se è possibile trovare una strategia che decida una vittoria o la parità.

Un clima che favorisca l'indagine può aiutare gli studenti a sviluppare disposizioni produttive verso la matematica, e problemi sostanziosi permettono un coinvolgimento molto forte e dispongono all'apprendimento della matematica. La capacità degli studenti nel risolvere i problemi si amplia in misura notevole negli anni di scuola secondaria. L'insieme di strumenti matematici a loro disposizione è più vasto. Gli studenti di scuola superiore imparano a lavorare con diverse nuove classi di funzioni. Hanno a disposizione nuovi procedimenti come l'ottimizzazione e la randomizzazione. Imparano a usare nuovi oggetti matematici come i reticoli e le matrici. Imparano a esprimersi e a ragionare con nuovi strumenti come il pensiero algoritmico e ricorsivo.

Quando entrano nel livello 9 gli studenti hanno anche libero accesso a una serie di strategie e approcci per risolvere i problemi come pure una qualche idea di situazioni nelle quali queste strategie e approcci si possono dimostrare proficui. Questo repertorio di strategie dovrebbe essere in continua espansione. Alcune strategie diventano più complesse e ricche di sfumature a seconda di come vengono usate. Si consideri, per esempio, una strategia che dice "cercate uno schema tentando valori di n =1,2,3,4,5….". Gli studenti possono usare questa semplice strategia a livelli elementari. Ai livelli 9-12 l'uso di questa strategia si amplia fino a includere una matematica più difficile e può essere usata associata ad altre strategie o alla conoscenza di altri argomenti. Un semplice ampliamento della strategia è applicabile per risolvere un problema come il seguente:

Qual è la somma dei seguenti numeri?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Gli studenti potrebbero essere incoraggiati a creare una tavola e calcolare i valori della somma per piccoli valori di *n*.

Numero dei termini (*n*)	Somma dei termini	
1		1/2
2	1/2+1/6 =	2/3
3	1/2+1/6+1/12 =	3/4
4	1/2+1/6+1/12+1/20 =	4/5

Esaminando i dati, gli studenti potrebbero supporre che la somma dei primi n termini è $\frac{n}{n+1}$. Comunque, dovrebbero riconoscere l'importanza di dimostrare il loro risultato e la forza dell'induzione matematica nel verificare enunciati di questo tipo.

Altre strategie saranno nuove per gli studenti e dovrebbero essere apprese mentre gli studenti esplorano il nuovo territorio matematico. Gli studenti che stanno imparando la crittografia, per esempio, possono imparare varie strategie per codificare e decodificare. Alcune di queste ultime includono strategie generali come la scomposizione e la ricomposizione o lo stabilire sotto-obiettivi. Metodi quali la dimostrazione per assurdo, che spesso è una strategia scelta per dimostrare che qualcosa è unico, e dimostrazioni su casi particolari, ma senza perdita di generalità sono sofisticati e arrivano tardi nell'esperienza degli studenti, tuttavia continuano ad arricchire il loro bagaglio di strumenti matematici.

- **Qual è il ruolo dell'insegnante nel sostenere il problem solving nei livelli 9-12?**

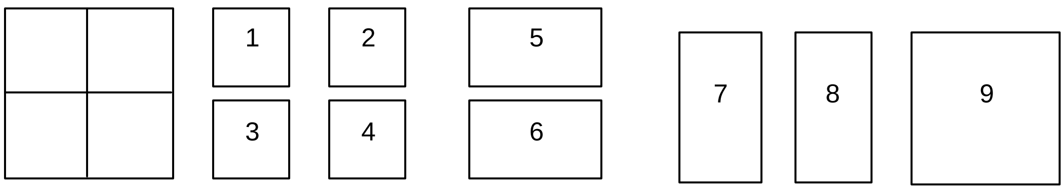
Nel problem solving, la principale responsabilità dell'insegnante è stabilire un clima che porti allo sviluppo delle disposizioni matematiche produttive degli studenti. La strada per la soluzione di un problema non è sempre evidente all'inizio. Gli studenti hanno bisogno di volersi tuffare nei problemi e "sporcarsi le mani" nell'esplorare gli aspetti del problema, prima di poter proporre approcci potenzialmente produttivi. Questo può sembrare molto rischioso agli studenti.

Gli studenti che provengono da un pre-K-8 sviluppato come proposto in questi standard, saranno più disposti ad accettare, piuttosto che evitare, l'insicurezza che accompagna il trattare problemi complessi. Tuttavia gli studenti arriveranno al livello 9 con grande diversità nella loro volontà di accettare insicurezze e rischi. Un ambiente scolastico in cui viene incoraggiata l'esplorazione e dove viene ricompensata la perseveranza può aiutare gli studenti a diventare bravi a risolvere i problemi. Con l'incoraggiamento e un'azione di feedback da parte degli insegnanti, gli studenti possono imparare a monitorarsi mentre hanno a che fare con problemi complessi. L'insegnante può fare domande e incoraggiare supposizioni da parte degli studenti, mentre rende chiaro che le soluzioni finali dei problemi devono uniformarsi a certi standard matematici.

All'interno di un qualsiasi curricolo, i problemi possono essere scelti o modificati in modo che offrano un alto potenziale per il progresso dello studente nel pensiero matematico. E' utile far lavorare gli studenti su problemi che possono essere risolti in molti modi. Questo permette paragoni di metodi, identificazione di collegamenti e discussione sulla programmazione, il monitoraggio e la sistemazione delle scelte durante il lavoro sul problema. Tali problemi esistono in ogni area matematica; si consideri il seguente problema di conteggio.

> Quanti rettangoli ci sono in una scacchiera 8×8? siate attenti nel contarli tutti – ogni rettangolo che ha come lati le righe di quadrettatura sulla scacchiera "conta".

Uno studente ha incominciato col lavorare su di una scacchiera 2×2:



Ha scoperto che c'erano nove rettangoli. Gli studenti potrebbero trovare utile notare che quando si contano i numeri dei rettangoli su una scacchiera 3×3 essi possono usare il loro risultato dalla scacchiera 2×2, in una soluzione iterativa.

Attraverso la soluzione di problemi, gli studenti sono in grado di comprendere la natura della matematica. Il problema della Figura 7.19 mostra che definizioni matematiche differenti hanno conseguenze differenti, e aumenta la questione di come e perché le definizioni sono quelle che sono.

> Qui sotto troverete una serie di rettangoli. Stabilite un'unità di misura che vi permetta di dire quale dei rettangoli sia ''il più quadrato'' e quale il ''meno quadrato''. Stabilite una differente misura che vi permetta di raggiungere il medesimo risultato. C'è una misura ''matematicamente superiore'' all'altra? Spiegate perché, e siate pronti a difendere la vostra tesi di fronte alla classe.

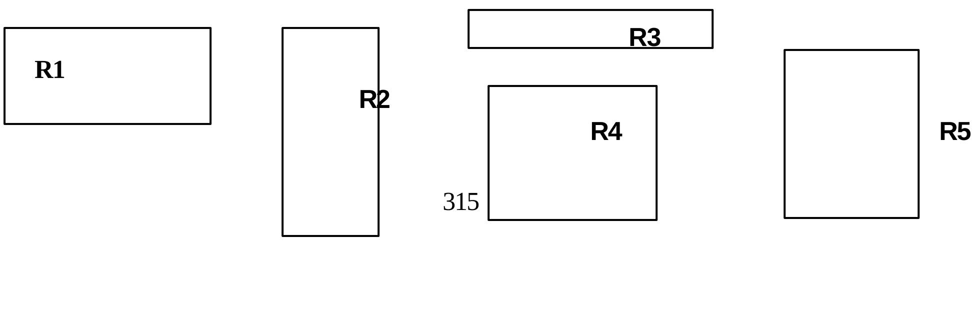


Figura 7.19. “Quadratura” di rettangoli

Nelle classi dove si affrontano di normaproblemi a soluzione aperta gli studenti potrebbero “tuffarsi” nel problema. E’ possibile, tuttavia, che gli studenti oppongano delle obiezioni, sostenendo che nessuno dei rettangoli è ‘‘quadrato’’. Stimolare gli studenti a pensare cosa potrebbe significare essere "quasi quadrato", farli ascoltare e riflettere sulle idee degli altri, e chiedere loro di considerare una serie di teorie può aiutare ad ampliare l’apprendimento degli studenti per quel che riguarda l’importanza della definizione nella comunicazione matematica.

I compiti possono essere strutturati in modo da renderli più simili a problemi che a esercizi. Ad esempio, ogni compito che comincia con ‘‘dimostra che...’’ può essere posto in un’ottica del tipo ‘‘Una mia amica afferma che... ha ragione?’’. Se affermazioni false sono presenti nel compito, gli studenti avranno bisogno di controllare la loro veridicità piuttosto che limitarsi a confermarle, e questa è un’attività che ha molto più del matematico.

La ricerca e l’esperienza degli insegnanti dimostrano che se gli studenti imparano strategie di risoluzione dei problemi e si limitano a usarle in modo isolato, è improbabile che le applichino affrontando nuovi problemi fuori di un dato contesto (Lexter 1994). L’attività di risoluzione di problemi deve essere ben radicata nell’apprendimento matematico degli studenti. Ugualmente importante è la consapevolezza che, se le strategie di risoluzione non sono insegnate in modo esplicito, è improbabile che gli studenti possano impararle. Le strategie per risolvere problemi sono complesse e sottili, e non ci si può aspettare che gli studenti le scelgano con un processo simile all’osmosi (Schoenfeld 1985). In diverse occasioni, le strategie dovrebbero essere il punto focale dell’istruzione. Dovrebbero essere rese chiare e il modo in cui sono usate dovrebbe essere motivo di discussione. Nel corso del curricolo, gli studenti dovrebbero incontrare problemi le cui soluzioni dipendono da una sapiente scelta e da un buon uso delle strategie. Gli insegnanti dovrebbero discutere come usare la strategia, e anche perché sarebbe potuto sembrare conveniente usare una particolare strategia per un particolare problema.

La natura delle discussioni in classe avrà un notevole impatto su quello che gli studenti apprendono dalle loro esperienze di problem solving. L’insegnante è in grado di creare una condizione volta a sviluppare una disposizione produttiva e una qualche conoscenza, entrambe attraverso la scelta dei problemi e il modo in cui i problemi sono discussi. Gli insegnanti possono mettere in rilievo strategie di risoluzione di problemi modellando il processo di risoluzione - a volte discutendo di nuovi problemi con l'aiuto di scarabocchi sulla lavagna luminosa o sulla lavagna vera e propria. Gli insegnanti possono anche sottolineare l’importanza del prendere decisioni durante le discussioni che coinvolgono l’intera classe. Se un problema è stato posto e un certo numero di proposte su come risolverlo è stato avanzato, l’insegnante può proporre che la classe valuti attentamente le possibilità, considerando le varie opzioni, e prenda una ragionevole decisione su quale percorso seguire.

Più importante, è che l'insegnante si assicuri che il tempo trascorso in classe venga impegnato a intraprendere attività utili. Durante la lezione, gli insegnanti possono porre domande che rinforzano i comportamenti produttivi. Ad esempio, gli studenti sono soliti pensare di aver finito con un problema non appena hanno trovato la soluzione corretta. Gli insegnanti possono tentare di eliminare quest'impressione chiedendo abitualmente ''c'è qualcuno in grado di risolvere questo problema in modo diverso?'' e assicurandosi di lasciare agli studenti abbastanza tempo per trovare approcci differenti. Gli insegnanti potrebbero anche risolvere un problema attraverso approcci alternativi per poi cercare delle connessioni tra loro. Quando tutta una serie di approcci è stata esaminata, l'insegnante può poi domandare, ''ci sono altri metodi di risoluzione che possiamo applicare a questo problema? possiamo generalizzarlo? possiamo trovare applicazioni o connessioni? ci sono problemi legati a questo che potremmo porre o analizzare?'' Le classi in cui c'è una produttiva atmosfera di risoluzione dei problemi sono quelle da cui è più probabile escano studenti che saranno effettivamente in grado di risolvere problemi.

Standard 7: Ragionamento e dimostrazione

I programmi di matematica devono spingere a ragionare e costruire dimostrazioni come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano il ragionamento e la dimostrazione come parti essenziali e fortemente efficaci della matematica;
- formulino e indaghino congetture matematiche;
- sviluppino e valutino ragionamenti e dimostrazioni matematiche;
- scelgano e usino vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriati.

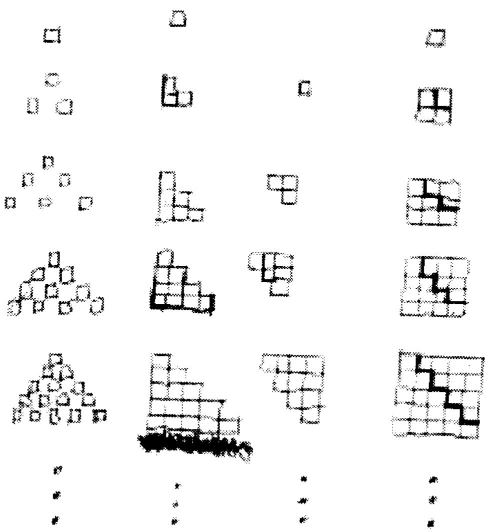
Elaborazione: livelli 9-12

Che cosa caratterizza il ragionamento e la dimostrazione nei livelli 9-12?

Gli studenti dovrebbero *uscire* dai loro programmi di matematica nei livelli 9-12 con l'inclinazione a cercare le giustificazioni matematiche, e con l'abilità di premunirsene per la gamma di generalizzazioni e argomentazioni matematiche che incontreranno. Gli studenti dovrebbero capire che cosa si intende per argomentazione matematica convincente. Nei livelli precedenti, gli studenti hanno generato e testato delle congetture e hanno costruito e difeso delle argomentazioni per supportare quelle congetture. Questo procedimento dovrebbe essere accaduto nelle classi dove dare spiegazioni e giustificazioni era un modo di procedere naturale della classe. Quando gli studenti passano alla scuola secondaria, dovrebbero sviluppare una conoscenza sempre più sofisticata della dimostrazione matematica e un insieme più ampio di tecniche. Saranno più forti i loro giudizi per accettare le spiegazioni e le loro abilità di ragionare nel tentativo di comprendere nuove idee matematiche.

In aggiunta alla comprensione del fatto che le affermazioni matematiche dovrebbero essere giustificate e dovrebbero tenere testa alla *verifica da parte dei compagni*, gli studenti dei livelli 9-12 dovrebbero avere dimestichezza con una gamma di tecniche di giustificazione. Per esempio, dovrebbero continuare a esercitarsi a fare congetture e a valutare la verità di tali congetture. Al livello della scuola secondaria, gli studenti dovrebbero anche essere in grado di costruire catene di ragionamenti a supporto di conclusioni matematiche; dovrebbero essere in grado di tornare indietro, riflettere sui propri ragionamenti e spiegare le proprie idee agli altri.

Quando gli studenti ampliano le giustificazioni, essi dovrebbero usare una gamma sempre più sofisticata di idee matematiche corredate di dimostrazione, che includono argomenti indiretti e controesempi. Gli studenti dovrebbero ragionare all'interno di aree matematiche specifiche usando metodi di ragionamento particolari di quelle aree (per esempio, ragionamento spaziale, probabilistico, statistico e simbolico). Le dimostrazioni formali capitano in tutte le aree della matematica, e l'esperienza scolastica degli studenti con la dimostrazione non si può limitare alla geometria. Per esempio, una classe del nono livello stava esplorando i numeri triangolari (1,3,6,10,…) e qualcuno ha notato che la somma di due numeri triangolari consecutivi poteva sembrare un quadrato. Un altro studente ha fornito la seguente "dimostrazione senza parole":



Gli studenti dovrebbero essere in grado di ragionare su situazioni sofisticate, come la successione delle cifre nello sviluppo decimale di qualsiasi numero razionale. Questo compito potrebbe cominciare con l'esplorazione delle rappresentazioni decimali delle frazioni e con la ricerca dei blocchi di cifre e delle caratteristiche della lunghezza dei blocchi di cifre che si ripetono. Gli studenti dovrebbero essere in grado di spiegare il risultato seguente in modo convincente: se un numero può essere espresso come una frazione con denominatore *n*, allora la rappresentazione decimale ha al massimo un blocco di cifre che si ripete (il "periodo" di lunghezza al più *n-1*. Potrebbero usare questo risultato per osservare che alcuni specifici numeri decimali non sono razionali (per esempio 0.01001000100001…), perché non c'è mai un blocco che si ripete.

Come la tecnologia influisce sul ruolo del ragionamento e della dimostrazione nei livelli 9-12?

Le classi tecnologicamente equipaggiate hanno dei loro particolari ausili e stimolazioni per lo sviluppo del ragionamento matematico. Da un lato, la tecnologia dà agli studenti la possibilità di selezionare gli esempi e di produrre molti esempi di qualcosa, dando così la possibilità del *possesso* degli esempi e delle idee che stanno sotto. Quando gli studenti possono verificare molti esempi per scoprirne le *strutture*, hanno bisogno di sviluppare strategie per determinare se le *strutture* che hanno trovato sono generali. Sebbene la tecnologia possa aiutare gli studenti a formulare congetture, può anche rendere difficile per gli studenti sentire il bisogno di una giustificazione più formale o di una dimostrazione.

Quando gli studenti acquistano più esperienza con i Computer Algebra System (CAS), fogli elettronici, pacchetti statistici e strumenti di geometria dinamica, incontrano più occasioni in cui le loro idee necessitano di una giustificazione formale. Avranno bisogno di conoscere la natura dell'approssimazione nei risultati forniti dal computer e di esprimere giudizi quando l'arrotondamento suggerisce controesempi falsi. Avranno bisogno di avere una qualche idea sulle caratteristiche dell'algoritmo che è alla base della generazione dei risultati generati dal computer. In ogni caso, hanno bisogno di mostrare un apprezzamento per la necessità e la potenza della dimostrazione matematica nello stabilire la verità delle loro congetture.

Qual è il ruolo dell'insegnante nello sviluppo del ragionamento e della dimostrazione negli anni di corso 9-12?

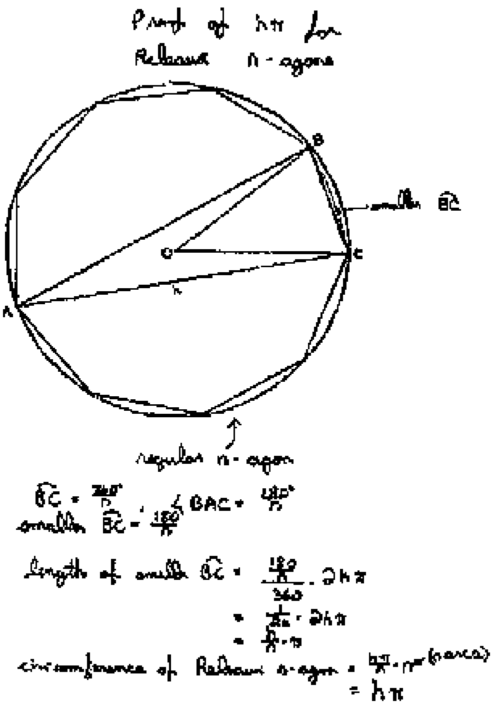
Gli insegnanti di matematica nei livelli 9-12 giocano un ruolo fondamentale nell'aiutare gli studenti a sviluppare l'abitudine a pensare e a ragionare. Occorre che gli insegnanti conoscano bene la matematica, dovrebbero comunicare il desiderio di conoscere le ragioni delle *strutture* e delle verità matematiche. I loro studenti hanno bisogno di vedere che la logica interna di una argomentazione matematica *che si impone* è ciò che stabilisce la sua correttezza - non l'autorità di un insegnante, la classe, o un matematico. Affinché gli studenti valutino l'efficacia delle spiegazioni proposte, devono mostrare fiducia nelle proprie abilità di ragionamento insieme con la predisposizione a mettere in dubbio il ragionamento proprio come quello altrui.

Come in altri anni di corso, gli insegnanti di matematica nella scuola secondaria si sforzano di *creare un clima* d'indagine nelle loro classi. Basandosi sulla crescente conoscenza dei loro studenti sulla matematica e sulla familiarità con le rappresentazioni convenzionali, gli insegnanti dovrebbero aspettarsi che i loro studenti ricerchino, procurino e critichino le spiegazioni in modo che le classi diventino comunità di indagine. Guidati, gli studenti dovrebbero sviluppare degli standard elevati per accettare le spiegazioni. Incoraggiati dalla interazione nelle loro classi, gli studenti dovrebbero essere consci di essere autorizzati a sviluppare le loro proprie argomentazioni, anziché provare la sensazione di dover riprodurre alcuni argomenti tradizionali.

Gli studenti nelle classi reali descritte qui sono in grado di formulare le proprie affermazioni e di sviluppare le proprie dimostrazioni. L'esempio che segue si riferisce a uno studente che dimostra un caso particolare di un teorema generale che è stato discusso in classe. Nella classe di matematica al decimo livello di quello studente, tutti gli studenti avevano in precedenza costruito curve di *ampiezza* costante usando poligoni regolari con *n* lati (dove *n* è dispari). Avevano fatto indagini su varie curve (compresi un cerchio e un triangolo di Reuleaux) con la stessa *ampiezza* costante, e avevano scoperto che i loro perimetri avevano uguale lunghezza. Il loro insegnante disse poi che le osservazioni fatte si generalizzavano nel Teorema di Barbier, che afferma che tutte le curve con una specifica *ampiezza* costante hanno perimetri uguali. Un ragazzo del decimo livello ha dimostrato poi da solo un caso particolare: tutte le curve con la stessa *ampiezza* costante generate dai poligoni regolari con *n* lati (dove *n* è dispari) hanno uguali perimetri. Il lavoro autonomo dello studente, mostrato in Figura 7.20, è stato incoraggiato e appoggiato dal suo insegnante.

Questo esempio mostra il ragionamento generato dallo studente, in cui lo studente trae vantaggio dalla conoscenza precedente e risponde a una domanda che aveva lui stesso formulato piuttosto che a una fornita dall'insegnante o dal libro di testo. Lo studente dimostra una predisposizione a investigare e a ricercare la conoscenza, uno scopo primario di tutta l'istruzione matematica.

Figura 7.20 Curva di *ampiezza* costante



Standard 8: Comunicazione

I programmi di matematica devono usare la comunicazione per favorire la comprensione in modo che tutti gli studenti:

- organizzino e consolidino il loro pensiero matematico per comunicare con gli altri;
- esprimano idee matematiche coerentemente e in maniera chiara ai compagni, agli insegnanti e agli altri;
- estendano le loro conoscenze matematiche considerando i pensieri e le strategie altrui;

- usino il linguaggio matematico come un preciso mezzo di espressione.

Elaborazione: livelli 9-12

Durante tutto il preK-12, lo sviluppo della classe, sostenuto da discorsi matematici produttivi e da un'attenzione a una scrittura e a un'esposizione orale chiara, aiuta gli studenti ad approfondire il loro apprezzamento e la loro comprensione della matematica. Nella classe, incoraggiata da domande sulla matematica, gli studenti sviluppano le loro abitudini produttive di esplorazione sistematica, di astrazione, e di generalizzazione. Una classe in cui gli studenti comparano e mettono in competizione le loro idee, promuove lo sviluppo di pensieri più riflessivi e accurati; qui, gli studenti sono esposti a molte prospettive e imparano gli uni dagli altri. La classe in cui gli studenti sono coerentemente incoraggiati e aiutati a pensare attraverso le idee e la chiara esposizione di esse, produce ragionamenti più profondi, che sono anche più efficaci per comunicare informazioni ad altri.

Quali sono le caratteristiche della comunicazione nei livelli 9-12?

Aspetti caratteristici della comunicazione nei livelli 9-12 nascono più dalla relativa maturità degli studenti che dai cambiamenti nella natura della comunicazione stessa. In ogni campo, gli studenti delle scuole superiori dovrebbero, sviluppando la loro abilità di strutturare catene logiche di pensiero, esprimersi coerentemente e chiaramente, ascoltando le idee degli altri e pensando al loro pubblico quando parlano o scrivono. Così, le maggiori differenze in questa fascia di livello sono riflesse nella complessità della materia in cui gli studenti devono impegnarsi e nei livelli di esposizione orale e scritta che gli studenti si aspettano d'incontrare. Dovranno essere dei buoni critici e dei buoni critici di sè stessi. Dovranno essere in grado di produrre spiegazioni, formulare domande e stendere per iscritto gli argomenti che l'insegnante e i matematici dovrebbero considerare corretti e coerenti da un punto di vista logico. Sempre di più, il linguaggio scritto e orale degli studenti dovrebbe usare rappresentazioni, terminologie e convenzioni matematiche. Se gli studenti stanno usando nei loro appunti il ragionamento, diagrammi geometrici, argomenti combinatori o simboli algebrici, dovranno usare il linguaggio e la simbologia matematica correttamente e appropriatamente. Gli studenti dovranno inoltre essere bravi collaboratori che lavorano in modo efficiente con gli altri.

La comunicazione è un elemento fondamentale dell'apprendimento e per questo è inseparabile da qualsiasi altro supporto. È un veicolo per l'apprendimento dei contenuti matematici da parte degli studenti. È basata sul ragionamento e incoraggiata da esso. È il modo per creare collegamenti. Favorisce la soluzione di problemi e dipende dall'uso delle rappresentazioni matematiche. Il ragionamento è, in breve, una parte integrante del fare e dell'apprendere la matematica.

In una classe al dodicesimo livello, viene chiesto di trovare l'area della figura ottenuta quando un triangolo di vertici $A(2,0)$, $B(0,7)$, $C(5,6)$ è traslato da un vettore $(t,3t)$ con $0<t<5$. Uno studente disegna il grafico mostrato nella Figura 7.21(a). Un altro reagisce, “no, devi collegarli, t può essere anche un mezzo”, “oh, è vero, mi sono dimenticato” dice il primo. Una volta che hanno disegnato la figura, come è mostrato nella Figura 7.21(b), la conversazione ruota intorno a che forma prende: un triangolo con un rettangolo costruito su un lato, o un triangolo con un parallelogramma.

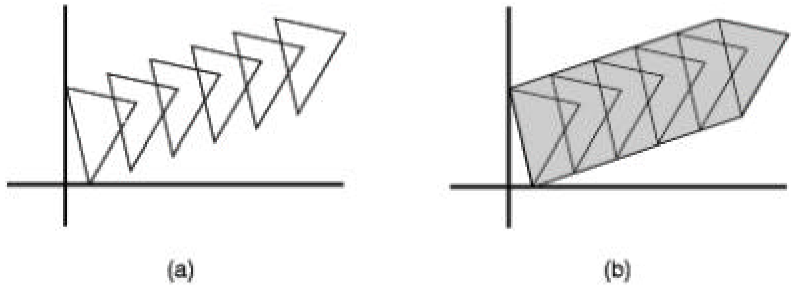


Figura 7.21 Traslazione di un triangolo

“Come ragioni?” chiede l'insegnante. “Dobbiamo misurare gli angoli”, “no, dovremmo trovare l'inclinazione”, “non è un rettangolo, i lati non sono perpendicolari” si offre un terzo studente, “io li ho già trovati”, “forse potremmo fare un rettangolo, un rettangolo intero. Poi potremmo vedere se possiamo togliere le parti che non ci sono”. Tutto ciò si dimostra essere un buon approccio. In questa classe, discussione e comunicazione sono importanti nell'aiutare tutti gli studenti a capire il problema.

Qual è il ruolo dell'insegnante nel sostenere la comunicazione nei livelli 9-12?

Un insegnante delle scuole superiori gioca un ruolo importante nel sostenere la comunicazione, a seconda del contesto. Obiettivi differenziati sulla comunicazione orale includono la creazione di un clima in cui tutti gli studenti si sentono liberi di osare commenti e congetture, aiutare i compagni chiarendo i loro dubbi, dare loro una mano nel definire le idee, e orchestrare la conversazione come è necessario, in modo che il livello del discorso e delle argomentazioni matematiche, sia mantenuto alto.

Presto nel corso di matematica, o quando un nuovo argomento viene introdotto, gli insegnanti possono aprire una conversazione con la richiesta di informazioni. All'inizio dell'unità sui cerchi nel decimo livello, per esempio, un insegnante ottenne le seguenti risposte alla domanda, “Ditemi tutto ciò che sapete sul cerchio”.

Juan: “E’ composto da una serie di archi tutti collegati”

Monique: “Una cerchio è una forma che non ha punte”

Luis: “La parte esterna di un cerchio è chiamata circonferenza”

Ramona: “Il cerchio è rotondo”

William: “Un cerchio misura 360 gradi”

Eric: “Il raggio è la metà del diametro del cerchio”

Cathy: “1/2 = 180 gradi”

Rebecca: “A = πr^2 e $\pi = 3.1415927$”

Micheal: “Ha due parti (interna ed esterna)”

Charles: “Il centro è il raggio”

I commenti riportati evidenziano la differente comprensione degli studenti, che varia sostanzialmente. Quest'esercizio è un'utile parte della valutazione in corso della classe. Ma, in quest'esempio, l'insegnante prende la discussione alla lontana. Il giorno dopo, l'insegnante chiede agli studenti di approvare o disapprovare le affermazioni e di giustificare come hanno preso quella posizione. Inoltre, era stata decisa l'idea che uno abbia ragione per le opinioni matematiche, e comincia un rispettoso dialogo.

In una classe di undicesimo livello, agli studenti è posto il problema “cosa puoi dire sulla somma dei primi *n* numeri dispari? Giustifica la tua risposta”. La maggior parte degli studenti, avendo avuto l'esperienza con esempi nei livelli precedenti, prova alcune somme ed osserva che ogni volta il risultato è un quadrato.

Quale?
Il quadrato del numero *n*.
Puoi darmi una risposta matematica a ciò che hai trovato?
La somma è il quadrato di *n*.
Ci sono abbastanza informazioni in quest'affermazione per capire quello che hai fatto? Puoi essere più preciso?
La somma dei primi *n* numeri dispari è il quadrato di *n*.
OK, questa è una buona affermazione. Puoi tradurla in simboli matematici?

Con alcuni tentativi, la classe arriva all'equazione

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$$

e l'insegnante chiede agli studenti se hanno pensato a come dimostrare la formula. Uno studente afferma che può essere dimostrata con il metodo di induzione matematica. L'insegnante chiede ad alcuni studenti chi ha familiarità con l'induzione per lavorare con i compagni sullo sviluppo di una dimostrazione. Lo fanno, e quando gli studenti hanno completato la dimostrazione, l'insegnante fa una nota per il *gruppo* sul loro lavoro. Mentre il piccolo gruppo stava lavorando, l'insegnante disse alla classe:

Vorrei tornare indietro alle nostre affermazioni originali. Avete affermato che la somma è un quadrato. Potete disegnarmi un grafico? L'insegnante lasciò questa domanda come qualcosa su cui riflettere agli studenti, e gli studenti tornarono il giorno dopo per discutere come i loro grafici sono collegati alle loro congetture. Andarono inoltre ad esplorare le relative congetture sulla somma dei primi *n* numeri pari e la somma dei primi *n* interi.

Mentre ci sono studenti che contribuiscono all'interazione, l'insegnante li spinge nella direzione di produrre un'argomentazione matematica precisa. Gli standard matematici di esposizione scritta e orale -

che distinguono la discussione di questo problema da una discussione nei livelli 3-5, dove gli studenti dovrebbero osservare i modelli ma non hanno gli strumenti simbolici per continuare e fare la generalizzazione algebrica - sono chiariti. Inoltre, gli studenti sono lasciati a riflettere sulla situazione che porta a una giusta direzione dei collegamenti e infine a una dimostrazione grafica di una serie di identità algebriche. Così, il ruolo dell'insegnante si traduce nel portare gli studenti dentro la conversazione, aiutarli a chiarire cosa hanno detto, simbolizzarlo appropriatamente, e strutturare situazioni dove hanno le potenzialità per creare collegamenti interessanti.

Fino ad ora ci siamo concentrati sul ruolo dell'insegnante nell'incoraggiare l'interazione produttiva della classe, e nell'aiutare gli studenti nella traduzione da argomenti orali a scritti. Gli insegnanti possono anche incoraggiare gli studenti a comunicare effettivamente usando il linguaggio matematico scritto. Per esempio, problemi che richiedono risoluzioni possono essere assegnati regolarmente, e la classe può discutere l'adeguatezza di quelle soluzioni. Ampie opportunità per gli studenti di affinare le loro capacità e di scrivere in modo matematico sono date da esercizi di vario tipo, come:

- Pianifica le spese per una gita scolastica e scrivi una lettera al preside spiegando come saranno spesi i soldi;
- Essendo assunto come consulente per aiutare un uomo d'affari scegli, tra due opinioni (p.e. quale compagnia di taxi è la migliore da usare o quale piano telefonico è il migliore da comprare) e scrivi un promemoria giustificando la scelta;
- Ti è chiesto di fare un progetto (p.e. un progetto per la costruzione di una cuccia rettangolare di legno compensato, in modo che il volume sia abbastanza grande) e di giustifcarlo.

È prezioso usare la scrittura come mezzo di riflessione e consolidamento di quello che uno conosce. Alcuni tipi di esercizi hanno questa funzione. Per esempio, gli insegnanti possono chiedere agli studenti di scrivere cosa hanno imparato su un particolare argomento, o mettere insieme un gruppo di studio per uno studente che era assente e necessita di sapere cosa è importante su un argomento trattato. Un altro approccio è chiedere agli studenti chi di loro ha fatto maggiori progetti o ha lavorato su un problema per molto tempo, per confrontare qualcosa del loro lavoro, e spiegare come il lavoro posteriore rifletta maggiore comprensione. In questo modo, gli insegnanti possono aiutare gli studenti a sviluppare capacità nella comunicazione matematica che servirà loro sia dentro sia fuori della classe. Usando questi metodi potranno aiutare gli studenti a sviluppare una profonda comprensione delle idee matematiche su cui parlano e scrivono.

Standard 9: Collegamenti

I programmi di matematica devono mettere in evidenza i collegamenti per agevolare la comprensione della matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano e usino connessioni fra diverse idee matematiche;
- capiscano come le idee matematiche si costruiscano l'una sull'altra per produrre un insieme coerente;
- riconoscano, usino e imparino la matematica in contesti a essa estranei.

Elaborazione: livelli 9-12

Nei livelli 9-12, gli studenti dovrebbero avere molte opportunità di diventare consapevoli delle relazioni tra i vari argomenti matematici. Dovrebbero basarsi sulla loro precedente comprensione matematica, mentre imparano nuovi concetti. Dovrebbero anche vedere abbondanti relazioni tra la matematica, la scienza e le altre discipline e applicare la comprensione matematica e la tecnica del calcolo alla soluzione di problemi reali.

Qual è la caratteristica principale nelle relazioni matematiche nei livelli 9-12?

Le relazioni fra le varie aree di contenuto aiutano gli studenti a vedere la matematica come un complesso integrato e a capire gli stessi risultati in modi differenti. Le relazioni con le altre discipline di studio, specialmente la scienza e le scienze sociali, dovrebbero diventare sempre più realistiche man mano che la conoscenza matematica degli studenti - in particolare, delle funzioni e della statistica aumenta, e man mano che è accresciuta la loro abilità di usare più rappresentazioni matematiche con o senza la tecnologia elettronica.

Le idee degli studenti a proposito delle relazioni dovrebbero maturare in modo significativo durante la scuola superiore. In primo luogo, gli studenti dovrebbero poter vedere le strutture matematiche come oggetti e sistemi. Secondariamente, dovrebbero essere flessibili quando risolvono i problemi, per sfruttare le relazioni tra i differenti argomenti in modo da scegliere un appropriato metodo per risolvere il problema in questione. Spesso, usando rappresentazioni provenienti da diversi campi della matematica, si può far diventare più accessibile un problema piuttosto difficile. Per esempio, alcuni interessanti risultati di geometria sintetica possono essere giustificati con calcoli algebrici relativamente semplici sui vettori. La relazione che compare nel teorema del punto medio, (nel quale il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo e lungo metà del terzo lato) può essere giustificata usando la generalizzazione della seguente identità che vale per i vettori bidimensionali:

$$\frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A.$$

Gli studenti di questa fascia dovrebbero formare la loro capacità di collegare le idee matematiche. Man mano che si amplia il loro repertorio matematico, gli studenti possono sviluppare una più profonda comprensione di come approcci diversi allo stesso problema conducono a uno stesso risultato, anche se gli approcci pensati possono essere molto diversi. Gli studenti possono usare in un contesto le capacità adatte a verificare le congetture generate in un altro e, attraverso il collegamento delle idee matematiche, possono sviluppare una robusta comprensione dei problemi di fondo. Le relazioni tra le idee algebriche e geometriche crescono di importanza durante i livelli 9-12. In geometria dinamica, per esempio, agli studenti è stato chiesto di esplorare le relazioni tra la lunghezza di una corda di un cerchio di raggio 1 e la distanza dal centro del cerchio alla corda (Figura 7.22a).

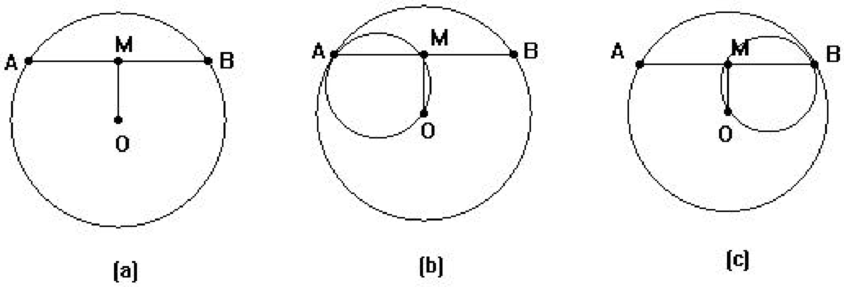


Figura 7.22. Problema della corda

L'aspettativa era che gli studenti raccogliessero i dati per diverse corde, ragionando sulla situazione, e generando una regola che sembrasse adatta per i dati. I dati che hanno raccolto sono presentati sotto:

Lunghezza di MO	0,81	0,99	0,97	0,94	0,84	0,72	0,63	0,49
Lunghezza di AB	1,17	0,30	0,48	0,72	1,10	1,39	1,57	1,75

Un'applicazione del Teorema di Pitagora rivelò che $MO = \frac{\sqrt{4-AB^2}}{2}$, che può essere nuovamente espressa come $\frac{AB^2}{4}+\frac{MO^2}{1}=1$. Questa è la forma canonica di un'ellisse. Gli studenti potrebbero chiedere di rappresentare graficamente l'ellisse e di sondare le sue relazioni con il problema originale. Un secondo esempio evidenzia le relazioni fra quello che sembrerebbe essere molto diverso nelle rappresentazioni e negli approcci da un problema matematico. Si mostrano diversi approcci alle soluzioni provenienti da Lewes, O'Keefe, e Goldenberg (1922). Gli studenti in questo caso erano chiamati a considerare il seguente teorema:

> Il punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equidistante dai tre vertici del triangolo.

Ci sono diversi approcci per provare questo teorema (Figura 7.23), ognuno estratto dalle differenti connessioni matematiche e dalle caratteristiche di differenti aspetti delle relazioni. Una ragionevole scelta delle coordinate permette una dimostrazione analitica facilmente accessibile. La scelta delle coordinate mostrate nella Figura 7.23a fornisce una comune distanza di $\sqrt{a^2-b^2}$, possibilmente ricordando allo studente le connessioni al Teorema di Pitagora. Collegando il fatto che ogni triangolo può essere inscritto in una circonferenza con il fatto che la misura di un angolo inscritto è la metà della misura dell'arco compreso produce una seconda dimostrazione (Figura 7.23b). Una terza giustificazione deriva dalla costruzione di un rettangolo usando i tre vertici del triangolo (Figura 7.23c) e si basa sul ragionamento degli studenti circa le proprietà delle diagonali di un rettangolo. Una quarta soluzione deriva dalla geometria delle trasformazioni, che si basa sul riconoscere e usare l'invarianza delle figure del piano per riflessioni in un piano (Figura 7.23d). Nella dimostrazione basata sulla geometria delle trasformazioni, gli studenti noterebbero che la riflessione conserva le lunghezze, D' è il punto medio di A'C' e B è il punto medio di AA'. Applicando la relazione del teorema del punto medio al triangolo

A'CA si mostra che BD=A'D'=AD, come desiderato. La dimostrazione, in geometria delle trasformazioni, mette in luce una varietà di altri nessi tra le parti del triangolo e la sua immagine riflessa.

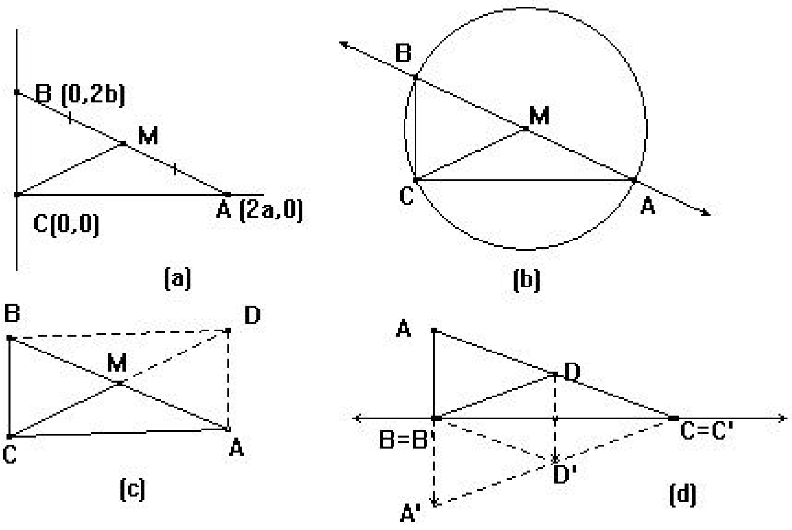


Figura 7.23. Varie prove del teorema del punto medio dell'ipotenusa

Gli strumenti di geometria dinamica possono aiutare gli studenti ad apprezzare la generalità dei loro ragionamenti. Forniscono anche modelli visivi per il pensiero circa le relazioni. La relazione tra il punto medio dell'ipotenusa e la sua lunghezza è illustrata nella Figura 7.24. La parte (a) mostra una serie di immagini tratte da un'animazione della geometria dinamica delle relazioni delle lunghezze. La serie di triangoli di destra ha un'ipotenusa fissa ma variano le lunghezze dei cateti.

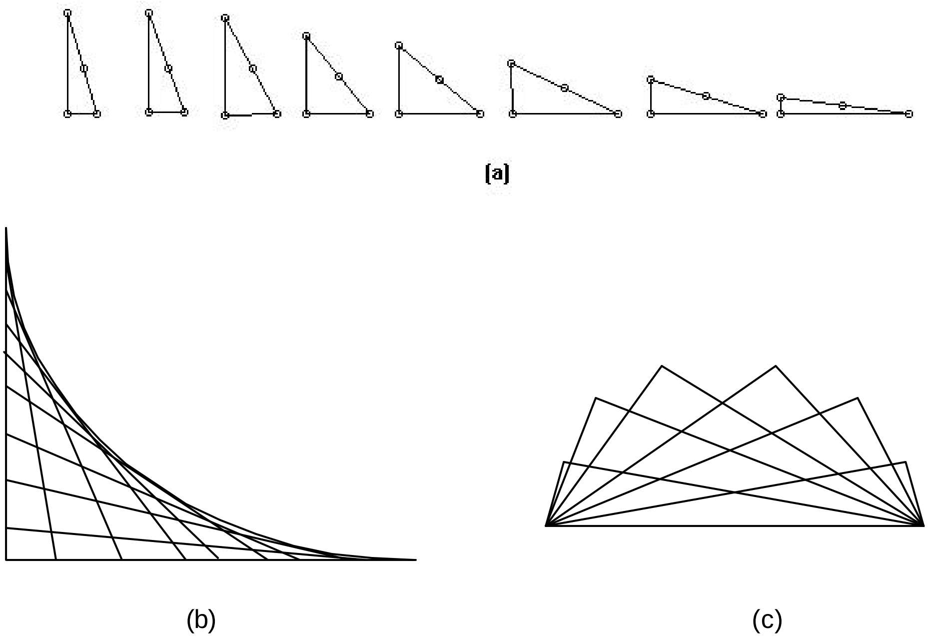


Figura 7.24. Rappresentazione dinamica di triangoli rettangoli

La parte (b) illustra la sovrapposizione dei triangoli in modo che coincidano gli angoli retti; la parte (c) mostra la sovrapposizione dei triangoli in modo che coincida l'ipotenusa. Sia la Figura (b) che la (c) suggeriscono un andamento circolare dei punti medi. La parte (b) suggerisce che il punto medio dell'ipotenusa per ciascuno dei triangoli, è equidistante dal vertice dell'angolo retto, e attraverso un argomento "limite", potrebbe suggerire che il punto medio è equidistante da tutti e tre i vertici. La parte (c) suggerisce che, per ognuno dei triangoli, il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici del triangolo.

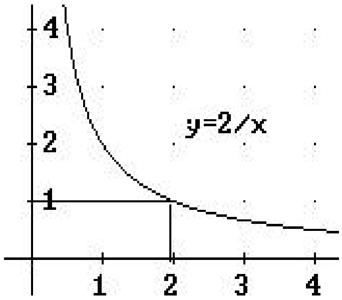
Le relazioni tra le varie aree di contenuto permettono agli studenti di vedere differenti aree della matematica da diverse prospettive, arricchendo perciò la conoscenza sia dell'area che stanno studiando sia di quella usata per una rappresentazione alternativa. Per esempio, il teorema del binomio può collegare algebra e numeri - notare che: $2^4 = 16 = (1+1)^4 = 1+4+6+4+1$. La comprensione che i polinomi di quarto grado di solito hanno quattro radici può portare gli studenti a chiedersi dove possano essere le altre due radici quarte di 16 (oltre a +2 e –2). Il teorema di De Moivre trova le altre due radici sull'asse immaginario nel piano complesso, ma ancora sul cerchio $|z|=2$, entrando così nella geometria dei numeri complessi.

Nei livelli 9-12, aumenta la capacità e il repertorio degli studenti nel collegare idee matematiche alle idee di altre discipline. Per esempio, la familiarità con la crescita lenta della funzione logaritmica aiuta a provvedere un'utile scala per esprimere la forza del suono o dei terremoti usando numeri ragionevoli piuttosto che numeri che diventano rapidamente troppo grandi o troppo piccoli da essere facilmente compresi. Un terremoto di magnitudine 4 della scala Richter è 10000 (10^4) volte più intenso di uno di magnitudine 1 (10). Gli studenti possono cambiare la conoscenza della proporzionalità con la crescente e più ricca comprensione delle rappresentazioni grafiche delle funzioni, per interpretare la distanza con il grafico del tempo e della velocità. Nei livelli 9-12, gli studenti dovrebbero usare gli studi delle funzioni esponenziali per capire l'interesse composto dai punti di vista sia di un risparmiatore che di uno che ha preso un prestito e apprezzare gli straordinari effetti della crescita esponenziale nel tempo. Lo stesso principio matematico può essere collegato alla biologia, aiutando così gli studenti a capire il significato della recente drammatica crescita della popolazione umana nel mondo, come il pericolo della rapida trasmissione di epidemie. Le relazioni tra la matematica e le scienze spesso diventano evidenti quando gli studenti si impegnano nella modellistica dei fenomeni fisici, come scoprire la velocità della luce nell'acqua, determinare le giuste dosi di medicinale, o ottimizzare la localizzazione delle stazioni dei vigili del fuoco nelle foreste.

Precedentemente, i problemi come quelli di massimo e di minimo o altri che necessitavano dei modelli dell'analisi matematica erano rinviati fino a che gli studenti non seguivano i corsi di analisi. Adesso, comunque, gli studenti sono in grado di modellizzare anche senza il calcolo differenziale. Se il risultato è un'espressione analitica, si possono determinare le proprietà del risultato con l'aiuto del metodo grafico e degli strumenti informatici di manipolazione simbolica. Si consideri il seguente esempio, che collega la geometria, le funzioni e l'algebra.

a) Determinare la massima area racchiusa nel rettangolo, di cui due dei lati sono sugli assi coordinanti, un vertice è all'origine, e il vertice opposto è su $y = 2/x$. La tua risposta è esatta o approssimata?

b) Determina il massimo perimetro. Determina il minimo perimetro. La tua risposta è esatta o approssimata?



La soluzione della parte (a) non è intuitiva. Le proprietà della funzione possono essere usate per sviluppare un'equazione per l'area e il perimetro. Agli studenti si dovrebbe richiedere di dare un'interpretazione verbale del risultato della parte (b). I programmi di grafica dinamica accoppiati con gli strumenti di manipolazione simbolica possono anche aiutare gli studenti a esplorare le proprietà delle funzioni al variare dei loro parametri.

Qual è il ruolo dell'insegnante nell'aiutare gli studenti a fare connessioni matematiche?

Migliorare la capacità degli studenti di vedere e usare relazioni matematiche li coinvolge impegnandoli, in problemi e situazioni scelti opportunamente per trovare le relazioni interne alla matematica e fra la matematica e le altre discipline. Questo richiede un'iniziativa particolare da parte dell'insegnante quando, come accade spesso, dispone di un curricolo che divide lo studio dell'algebra da quello della geometria e della statistica. Anche se gli insegnanti lavorano con curricoli integrati, comunque, avranno ancora bisogno di aumentare l'esperienza nella creazione di relazioni matematiche e nell'aiutare gli studenti a sviluppare la loro capacità di esprimere tali relazioni.

Col passar dei livelli, aumenta anche la profondità e la vastità della matematica disponibile agli insegnanti e agli studenti per fare relazioni. Ai livelli 9-12, questo significa che gli insegnanti devono conoscere una quantità sempre più grande di contenuti matematici. Gli insegnanti devono capire profondamente la matematica e sviluppare un buon rapporto nell'abilità di riconoscere i modi in cui la matematica può descrivere le situazioni di altre discipline. Devono sviluppare l'inclinazione e la capacità nel fare relazioni tra idee che attraversano un'ampia gamma di aree matematiche. Gli insegnanti necessitano anche di essere pronti nelle connessioni che gli studenti possono fare in classe e sostenere le osservazioni e aiutare tutti gli studenti a capire il proprio valore.

Al decimo livello una studentessa che aveva studiato geometria stava studiando la funzione valore assoluto, $f(x)=|x|$. Osservato il grafico della funzione, disse: "mi ricorda gli studi sugli angoli dell'anno scorso in geometria. C'è un modo per avere una formula per ogni angolo?" Questa studentessa stava cercando una relazione che le facilitasse il lavoro. L'insegnante dovrebbe avvantaggiarsi di queste opportunità. Non è sufficiente che gli insegnanti si specializzino a trovare e fare relazioni matematiche in classe. Gli insegnanti dovrebbero introdurre gli studenti a ricchi concetti matematici, che inducono in loro curiosità sulla matematica e sulle strutture matematiche che mettono in evidenza le relazioni. Dovrebbero allettare e stimolare gli studenti a esplorare le strutture matematiche, specialmente quando sorgono opportunità inaspettate. Inoltre, gli insegnanti devono aiutare gli studenti a vedere i modi in cui la struttura matematica li aiuta a descrivere i loro mondi. Ciò è particolarmente vero ai livelli 9-12, perché il materiale diventa sempre più astratto e generale.

Riassumendo, gli insegnanti devono aiutare i loro studenti non solo a farsi domande sulle delle relazioni, ma anche ad avere gli strumenti matematici per ottenerle. Gli insegnanti dovrebbero stimolare l'atmosfera in classe, nella quale cercare e spiegare le relazioni sia una parte interessante dell'interazione fra gli studenti e la matematica.

Standard 10: Rappresentazioni

I programmi di matematica devono mettere in evidenza le rappresentazioni per agevolare la comprensione della matematica, in modo che tutti gli studenti:

- creino e usino le rappresentazioni per organizzare, registrare e comunicare idee matematiche;
- sviluppino un repertorio di rappresentazioni che possa essere utilizzato proficuamente, con flessibilità e appropriatezza;
- usino le rappresentazioni per modellare e interpretare fenomeni fisici, sociali e matematici.

Elaborazione: livelli 9-12

Gli studenti comprendono le idee matematiche e le relazioni e le comunicano agli altri attraverso le rappresentazioni da loro create o adottate. Come emerge dai programmi delle scuole medie, gli studenti si sono scontrati con rappresentazioni algebriche, grafiche, e numeriche e con le loro proprietà. Alle scuole superiori, ci sono una grande varietà di argomenti matematici e collegamenti che gli studenti si devono aspettare di rappresentare e interpretare. Le nuove forme di rappresentazioni offrono modi supplementari per apprendere e per comunicare sui contenuti e costruire connessioni. Nuovi modelli e metodi per descrivere e interpretare i fenomeni che accadono nel mondo sono a disposizione degli studenti. Nel progredire degli studi, gli studenti possono continuamente migliorare le loro abilità con lo scopo di interpretare e usare il sapere formale, l'astrazione e le strutture di rappresentazione scorrevoli e flessibili.

Qual è la particolarità riguardo alle rappresentazioni nei livelli 9-12?

Nei livelli 9-12 le conoscenze dello studente e l’uso delle rappresentazioni possono essere riassunti in tre punti.

Primo: gli studenti devono continuare a migliorare la comprensione delle rappresentazioni che sono state introdotte loro nei livelli precedenti e continuare a sviluppare i collegamenti. Gli studenti possono anche acquistare familiarità con nuove rappresentazioni, quali matrici, diagrammi ad albero, funzioni parametriche e ricorsive. Per esempio, la forma ricorsiva, $f(n) = f(n-1) + 2$, dove $f(1) = 1$, definisce la stessa funzione di $f(n) = 2n-1$ dove n è un numero naturale. Ci sono situazioni nelle quali una formula ricorsiva è di molto aiuto, o addirittura necessaria, nella descrizione di particolari relazioni.

Ogni volta che gli studenti possono usare le rappresentazioni come strumento per descrivere modelli, possono guardare più in profondità dentro le strutture del modello. Consideriamo la situazione, nella quale un oggetto cresca continuamente in modo che il suo peso raddoppia ogni ora e un secondo oggetto cresca di $5n$ grammi all'ora n-esima. Se i due oggetti partono con un peso iniziale di 2 grammi, in quale momento il loro peso sarà uguale? Creare una tabella di valori, come quella mostrata qui sotto può aiutare lo studente a una comprensione iniziale della situazione.

Tempo in ore	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso del primo oggetto	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Peso del secondo oggetto	2	7	17	32	52	77	107	142	182

Gli studenti possono comparare queste due situazioni usando un grafico:

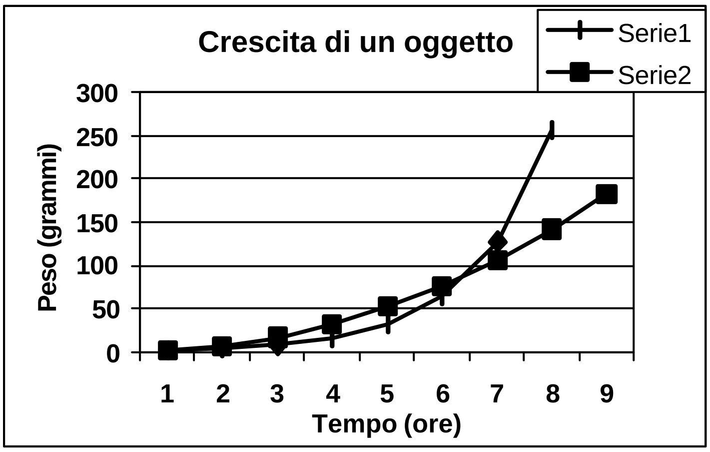


Figura 7.25. Crescita di un oggetto

Dai grafici appare che le due situazioni potrebbero essere rappresentate da due funzioni che si incrociano esattamente due volte. La conoscenza degli studenti a proposito delle sottoclassi di funzioni (esponenziali e quadratiche) potrebbe offrire un supporto a questa congettura visiva. Comunque, è utile la manipolazione delle forme simboliche (ultimamente le derivate) per controllare matematicamente che non si intersecano in nessun altro punto oltre che in $t = 0$ e in un qualche punto compreso fra $t = 5$ e $t = 6$.

Secondo: gli studenti gli studenti possono usare rappresentazioni a livelli più astratti. Alle scuole elementari, gli studenti usano spesso rappresentazioni per ragionare sul contesto nel quale loro possono percepire direttamente l'oggetto e le azioni compiute su di esso. Durante i livelli intermedi, gli studenti creano e usano sempre più le rappresentazioni matematiche per oggetti che non percepiscono necessariamente in modo diretto, come la posizione di un treno, di un aereo, o di una bicicletta e l movimento da un posto a un altro nel tempo. Nelle scuole superiori, gli studenti dovrebbero imparare a usare le rappresentazioni come mezzo primario tramite il quale esprimere e capire i concetti più astratti. Dovrebbero imparare a usare le rappresentazioni per riconoscere una struttura matematica comune attraverso i contesti. Per esempio, la stessa funzione lineare può rappresentare la distanza percorsa in funzione del tempo, o l'altezza di una pila di tazze in funzione del numero di tazze. La somma dei primi *n* numeri naturali dispari, l'area del campo quadrato e la distanza percorsa da un veicolo che parte da fermo e accelera con velocità costante, possono essere tutte rappresentate da una funzione $f(x) = ax^2$. Il fatto che differenti situazioni possano essere rappresentate con lo stesso tipo di funzione implica che hanno tutte lo stesso significato.

Terzo: gli studenti della scuola superiore dovrebbero essere in grado di rappresentare fenomeni presi da una ampia serie di contesti, identificare gli elementi essenziali del contesto e ideare rappresentazioni che colgono relazioni matematiche tra quegli elementi. Lavorando in una serie di contesti gli studenti della scuola superiore incontreranno un andamento esponenziale, e logistico. La comprensione fondamentale di fenomeni periodici o ciclici è spesso rappresentata meglio da funzioni trigonometriche: la crescita della popolazione segue di solito un modello esponenziale, e situazioni preda/predatore spesso aumentano logisticamente. Nella scuola superiore possono essere applicate le conoscenze matematiche di queste classi di funzioni e delle loro rappresentazioni. Analisi tradizionali possono essere affiancate da analisi grafiche, strumenti di regressione, e software.

In aggiunta per allargare il loro repertorio di rappresentazione in queste tre dimensioni, gli studenti delle scuole superiori dovrebbero riconoscere i vantaggi e le limitazioni portate dai diversi tipi di rappresentazioni. Dovrebbero essere in grado di muoversi flessibilmente ed efficacemente tra i vari tipi di rappresentazione di un fenomeno, per comunicare dati importanti sul fenomeno.

Gli strumenti elettronici permettono l'accesso a problemi e metodi che fino a poco tempo fa era difficile esplorare in modo significativo nella scuola superiore. I metodi numerici iterativi, per esempio, possono essere usati per sviluppare un'idea intuitiva del concetto di limite e delle sue applicazioni. L'andamento asintotico delle funzioni è più facilmente compreso per via grafica, così come gli effetti delle trasformazioni sulle funzioni. Questo apprendimento arricchito permette l'accesso degli studenti a modelli che possono essere utilizzati per analizzare situazioni reali e più interessanti. In questo modo, gli studenti avranno una maggiore abilità nel risolvere problemi, usando gli strumenti che appaiono appropriati e comunicando effettivamente quanto appreso.

Qual è il ruolo dell'insegnante nell'aiutare gli studenti a imparare le rappresentazioni nei livelli 9-12?

Gli insegnanti devono prestare attenzione alle dimostrazioni sviluppate dai loro studenti e far loro domande per essere sicuri che gli studenti abbiano concettualizzato la matematica. Spesso gli studenti hanno un modo veramente efficiente di pensare problemi e relazioni. Una parte importante della valutazione dell'andamento delle classi da parte degli insegnanti è basata sul capire il pensiero dello studente, stimarne gli elementi chiave, e riflettere su come sia possibile aiutare gli studenti a svilupparli maggiormente. Quando gli insegnanti ascoltano attentamente per capire l'idea iniziale, parte del loro ruolo è aiutare lo studente a connettere la sua immagine personale con le molte rappresentazioni convenzionali senza perdere il senso di comprensione lungo la strada. Per illustrare questo punto, consideriamo un problema di tipo comune:

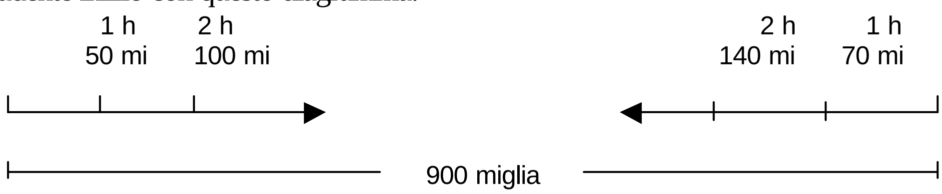
> Due treni stanno viaggiando l’uno verso l’altro su due binari paralleli. Uno viaggia a 50 miglia orarie e l’altro a 70. Se partono a 900 miglia di distanza, quanto tempo ci mettono per incrociarsi?

L’insegnante portato a lavorare con equazioni, deve essere aperto alle soluzioni che gli studenti sanno creare e aiutare effettivamente il lavoro degli studenti sulla loro rappresentazione. In questo esempio, uno studente ha creato la seguente tabella:

ore	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Treno 1	*50*	*100*	*150*	*200*	*250*	*300*	*350*	*400*	*450*
Treno 2	*70*	*140*	*210*	*280*	*350*	*420*	*490*	*560*	
						720	*840*	*960*	

> Si incontrano da qualche parte tra 7 e 8 ore. Che cosa succede alle ore 7 e mezzo? Il treno 1 sarà a 375 mi, e il treno 2 a 490+35=525 mi., 375+525=900. Intuizione fortunata!

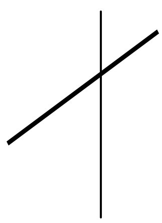
Un altro studente iniziò con questo diagramma:

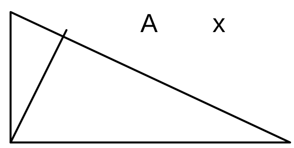


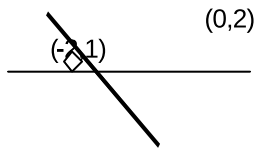
poi, aggiunse altre ore con l’intento di raggiungere una somma pari a 900 miglia. Un altro usa l’equazione del tipo $50t+70t = 900$. L’insegnante può portare questa classe a una discussione sulle differenze circa la comprensione, l'efficacia, e la generalità di questi vari approcci.

Troppo spesso, quando gli studenti sono messi a confronto con i simboli formali algebrici o geometrici, essi si distaccano dal contenuto e dalla comprensione, e sentono che la rappresentazione è diventata fine a se stessa invece che uno strumento per capire e comunicare. Unire i sistemi convenzionali di rappresentazione alla capacità di comunicare degli studenti è la migliore via per eliminare questo tranello. Inoltre è necessario che gli insegnanti non interpretino necessariamente le differenti concettualizzazioni e rappresentazioni degli studenti come sbagliate o come indicatrici di una mancanza di comprensione, ma che lavorino per capire il pensiero degli studenti. Questo non è facile, richiede conoscenza, fiducia nei loro progressi, e sensibilità da parte degli insegnanti.

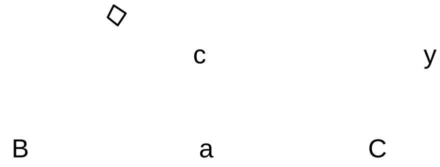
Una strategia usata efficacemente dagli insegnanti è presentare agli studenti una rappresentazione come un semplice grafico o una figura geometrica e chiedere loro di scrivere e di condividere tutto ciò che pensano di sapere sul diagramma, vedi Figura 7.26.







Dimmi tutto ciò che sai sul grafico mostrato qui



Dimmi tutto ciò che sai sul triangolo mostrato qui

Figura 7.26. Compiti a descrizione finita aperta

Quando agli studenti sono dati compiti come quelli mostrati nella Figura 7.26, sondano la propria comprensione rappresentativa. L'insegnante ha l'opportunità di decidere dove cominciare la lezione, e quale livello di conoscenze assunte sia appropriato per la classe e per i suoi studenti. Per imparare serve che gli studenti pensino attentamente alle loro stesse associazioni mentali e ascoltino attentamente cosa sanno gli altri. L'insegnante può partire da questa base comune di comprensione per sviluppare la lezione, e per ricollegarsi ad altri enunciati fondamentali delle proprietà delle figure.

Gli studenti hanno bisogno di capire l'efficienza e la significatività del formalismo e dell'astrazione matematica, e di essere in grado di usarli a proprio vantaggio in matematica pura e nella modellistica ambientale. Le classi che riescono a stimolare il loro stesso modo di pensare, e che procedono verso altri schemi di rappresentazione più convenzionali apprezzano tale efficienza e tale uso.