Capitolo 6

Standard per i livelli 6-8

L’obiettivo dell’istruzione matematica nelle classi della scuola media consiste nel porre solide basi matematiche per la scuola superiore e oltre. Durante questo periodo, molti studenti si faranno un’idea di sé stessi come discenti di matematica, dei propri interessi, delle proprie competenze, delle proprie attitudini, e delle proprie motivazioni. Queste idee influenzeranno il loro modo di affrontare lo studio della matematica nella scuola superiore, il che influenzerà a sua volta le loro opportunità di lavoro nella vita.

Si getterà una solida base se verrà insegnata una matematica ricca di significato e se verrà insegnata bene. Nel seguito di questo capitolo, i punti nodali dell’istruzione nei livelli 6-8 vengono identificati in ognuno dei dieci standard indicati nel Capitolo 3. I programmi che si concentrano su queste aree nodali, aiuteranno gli studenti a costruire solide fondamenta per studi ulteriori e per l’uso della matematica quando tratteranno questioni quantitative durante tutta la loro vita. Per ognuno dei cinque standard di contenuto, vengono fornite trattazioni specifiche per il periodo dal sesto all’ottavo anno di scolarizzazione, organizzate intorno alle aree nodali. Al contrario, la trattazione dei cinque standard di processo è organizzata in modo diverso, usando quesiti che richiamano l’attenzione sulla natura di questi processi nei livelli 6-8 e sul ruolo degli insegnanti, che consiste nel favorire l’apprendimento degli studenti rispettandoli. Questi due schemi organizzativi offrono differenti punti di vista sulla natura di un solido programma di matematica nei livelli 6-8, che riguardano sia i contenuti sia i processi matematici.

Insegnare matematica agli adolescenti

Oltre a un’attenta considerazione del contenuto dei programmi scolastici di matematica nei livelli 6-8, si deve anche porre attenzione all’ambiente nel quale gli studenti apprendono la matematica. È molto importante per gli studenti della scuola media trovare sia stimoli sia soddisfazioni durante le ore di matematica. Alte aspettative e solidi aiuti devono andare di pari passo. Vista la sensibilità dei giovani verso i loro pari, è particolarmente importante che i loro insegnanti propongano nelle classi dei momenti di studio collettivo nei quali vengono proposti modelli allo studente che impara matematica. Le lezioni di matematica nelle classi medie dovrebbero essere un’occasione per gli adolescenti di impegnarsi in attività significative collegate alle loro capacità emergenti di trovare e definire delle strutture, facendo congetture e verifiche, applicandosi in astrazioni e generalizzazioni. Gli studenti della scuola media devono sentirsi immersi nella matematica piuttosto che guidati dal di fuori di questa.

Insegnare per un impegno consapevole e un apprendimento con comprensione

Come sostenuto nel secondo capitolo dei *Teaching and Learning Principles*, i programmi di matematica dovrebbero puntare a un insegnamento e a un apprendimento intelligenti e dovrebbero impiegare gli studenti in attività di riflessione in classe. Per porre una solida base per la scuola secondaria e oltre, gli studenti nei livelli 6-8 devono sviluppare una concreta comprensione di tante idee matematiche, tra cui rapporto, proporzione, percentuale, uguaglianza (come equivalenza), variabile, area, volume, similitudine, e simmetria.

Per raggiungere questo scopo, gli studenti hanno bisogno di esperienze regolari con compiti interessanti e stimolanti, attraverso i quali sviluppare una comprensione dei significati delle idee matematiche. Nonostante ciò possa sembrare ovvio, risulta che il significato e la motivazione non sono tenuti abbastanza in considerazione nelle lezioni di matematica dei livelli intermedi (Stigler e Hiebert 1997). Troppo spesso, le idee matematiche sono solo enunciate, piuttosto che sviluppate in modo da favorire la comprensione. Inoltre, i compiti affidati agli studenti sono troppo spesso di carattere ripetitivo, e la loro esecuzione si basa più sulla memoria e sull'imitazione che sul pensiero e sul ragionamento.

Gli studenti hanno bisogno di esperienze regolari con compiti interessanti che li impegnino in pensieri matematici, ragionamenti, e risoluzione di problemi. Sebbene gli insegnanti si trovino di fronte a delle sfide quando tentano di assegnare compiti cognitivamente impegnativi nelle ore di matematica (Stein, Grover e Henningsem 1997), i risultati suggeriscono che gli studenti traggono beneficio da una istruzione matematica che includa sfide cognitive e che tenda allo sviluppo del significato (Knapp et al. 1995; Stein e Lane 1996). L'impegno e lo sforzo intellettuali contribuiscono all'apprendimento. Inoltre, i giovani adolescenti possono trarre soddisfazione personale dall'essersi impegnati con problemi interessanti e stimolanti. Come suggeriscono le trattazioni di questo capitolo, questo tipo di approccio all'apprendimento e all'insegnamento matematico può essere sviluppato nei livelli 6-8 mediante esperienze in tutte le aree trattate dagli standard di questa bozza.

Ampiezza e approfondimento nel curricolo

Così come in *Curriculum and Evaluation standards* (NCTM 1989), viene qui proposto un ampio curricolo per gli anni della scuola media. Con l'avvicinamento del nuovo millennio, è molto importante mettere in evidenza la necessità di un ampliamento del curricolo matematico nei livelli 6-8 rispetto a com'era nel 1989. Perciò vengono enucleati i fini dell'insegnamento e dell'apprendimento dei livelli 6-8 in ciascuno dei cinque standard di contenuto, e viene anche discussa l'importanza dei cinque standard di processo.

Per alcuni lettori, una maggiore ampiezza può implicare una mancanza di messa a fuoco. Il curricolo negli Stati Uniti viene criticato per essere "vasto un miglio e profondo un pollice" (Schmidt, McKnight, e Raizen 1996, p34). Ma l'ampiezza e la messa a fuoco non si escludono reciprocamente; entrambi sono tratti caratteristici di un programma di matematica di qualità per gli anni scolastici della scuola media. All'interno del programma che tratta una vasta gamma di processi e di contenuti matematici, è anche possibile avere chiari i punti focali per l'insegnamento e per l'apprendimento, quali lo sviluppo della scorrevolezza nel calcolo con i numeri razionali e la facilità ad applicare il ragionamento proporzionale.

Sviluppare la scorrevolezza con i numeri razionali

Il numero è un importante componente dei programmi matematici nelle classi medie, ma la maggiore attenzione deve essere posta nell'insegnare i numeri razionali, non i numeri interi. In alcune scuole e classi, viene data troppa importanza all'insegnamento dei calcoli con i numeri interi, nei livelli 6-8. L'obiettivo che viene qui chiaramente proposto per il periodo dal sesto all'ottavo livello, relativamente al numero, è lo sviluppo della facilità di calcolo con i numeri razionali, con il presupposto che l'istruzione relativa al calcolo con i numeri interi sia stata completata entro la fine del quinto anno. Una certa attenzione alla teoria dei numeri e ai numeri molto grandi sarà presente nei livelli 6-8. Comunque ci si aspetta che il lavoro con i numeri interi si presenti naturalmente, spesso e nel contesto di problemi, specialmente quelli che riguardano dati e misure.

L'attenzione maggiore dell'insegnamento nelle classi medie, dovrebbe essere diretta ad aiutare gli studenti a sviluppare una comprensione accurata dei concetti collegati ai numeri razionali e una ragionevole abilità di calcolo con questi. Di conseguenza, gli studenti dovrebbero essere in grado di pensare in modo flessibile ai rapporti tra frazioni, decimali, e percentuali. La comprensione degli studenti, e la loro abilità con i numeri razionali può essere sviluppata naturalmente e spesso nel contesto di problemi che includano geometria, misure, dati, probabilità, funzioni, algebra e modelli. In più, il loro lavoro con i numeri razionali nei livelli 6-8 favorirà anche lo sviluppo del loro ragionamento proporzionale.

Acquisire abilità nel ragionamento proporzionale e nella linearità

Uno degli obiettivi primari dei programmi per la scuola media dovrebbe essere lo sviluppo della facilità nel ragionamento proporzionale. Questo obiettivo permea l'intero curricolo della scuola media, è un filo conduttore che unisce la maggior parte degli argomenti studiati nei livelli intermedi, e può essere sviluppato in diverse aree della matematica. Il ragionamento proporzionale comprende molto più che porre l'uguaglianza di due rapporti e risolverla trovando il termine mancante. I punti principali di sviluppo nei livelli 6-8 comprendono il lavoro con i rapporti e con le proporzioni, la percentuale, la similitudine, le riduzioni di scala, le equazioni lineari, l'area, il volume, la distribuzione dei dati, e la probabilità.

Gli studenti incontrano relazioni proporzionali quando studiano le funzioni lineari nella forma $y = kx$, quando considerano i rapporti tra i punti su una mappa disegnata in scala e la distanza reale tra i luoghi corrispondenti o quando calcolano oggetti difettosi in un insieme di merci prodotte traendo i dati da un'indagine su un campione designato a caso nell'insieme di merci. Il ragionamento proporzionale riguarda il considerare la relazione tra la circonferenza di un cerchio e la lunghezza del suo diametro o la lunghezza della diagonale di un quadrato in relazione alla lunghezza del lato. Argomenti in apparenza diversi come le tasse sulle vendite, le inclinazioni e le similitudini possono essere tutte collegate quando le si pensa come relazioni proporzionali (per esempio, tra l'aumento delle tasse e il costo base degli oggetti, tra le distanze orizzontali e quelle verticali che ci sono tra i punti, e tra le lunghezze dei lati corrispondenti di figure simili). Perché gli studenti vedano le connessioni tra queste diverse esperienze, devono impegnarsi in ragionamenti sulle relazioni proporzionali che stanno alla loro base.

Certamente, non tutte le relazioni matematiche incontrate nelle classi medie sono proporzioni lineari, dirette. Alcune relazioni includono la variazione inversa (p.e. la relazione tra lunghezza e altezza in un rettangolo con area fissa), alcune comprendono la variazione non lineare (p.e. il volume di un cubo dopo che i suoi lati vengono moltiplicati tutti per uno stesso fattore), e altre hanno insieme componenti additive e proporzionali (p.e. la relazione tra le espressioni Fahrenheit e Celsius che indicano una data temperatura). Tuttavia le relazioni tra proporzioni lineari appaiono spesso dentro e fuori della matematica, e gli studenti dei livelli medi hanno bisogno di imparare a riconoscere tali relazioni e a lavorare efficacemente con esse.

Il ragionamento proporzionale è anche strettamente legato allo sviluppo della dimestichezza con i concetti e con le abilità algebriche di base nei livelli intermedi. Molti argomenti studiati negli anni della scuola media comprendono le relazioni proporzionali lineari, che possono essere espresse nella forma $y = mx$.

Le esperienze con questi argomenti possono aiutare gli studenti a costruire un robusto apprendimento di idee importanti e dotarsi di strumenti algebrici, come le funzioni lineari e l'inclinazione delle rette. La comprensione della linearità nei livelli intermedi può porre una solida base per lo studio dell'algebra lineare, dell'approssimazione lineare, e delle funzioni non lineari nella scuola secondaria e oltre. E, come suggeriscono la precedente discussione e i ragionamenti sulle proporzioni lineari, questa ricca comprensione delle idee algebriche può essere sviluppata nei livelli intermedi in modo da porre in relazione la comprensione dell'algebra con molte altre aree contenutistiche.

Favorire la competenza algebrica senza accelerazioni o specializzazioni

Negli ultimi anni, nei livelli intermedi c'è stata relativamente all'algebra una tendenza verso l'accelerazione e la specializzazione. Gli studenti dell'ottavo livello e addirittura del settimo, seguono lezioni che puntano esclusivamente sull'algebra e che sono organizzate in maniera simile ai corsi tradizionali di algebra dei livelli superiori. Questo orientamento rappresenta una risposta benintenzionata a ciò che molti percepiscono essere una mancanza di qualità e di impegno nei programmi di matematica dei livelli intermedi. Per gli studenti di questi anni comunque una tale accelerazione e specializzazione può avere conseguenze negative. Una conseguenza negativa è che gli studenti probabilmente hanno meno opportunità di imparare la gamma completa dei contenuti matematici, specialmente argomenti di geometria e di analisi dei dati, che ci si aspetta siano affrontati nei livelli intermedi.

Un solido programma di matematica nelle classi intermedie non ha bisogno di accelerazione e specializzazione. Gli studenti dovrebbero farsi una ricca esperienza con le idee algebriche negli anni della scuola media, ma questo non richiede che gli studenti seguano un corso che punti esclusivamente su questo argomento, specialmente se questo corso non impegna gli studenti in attività significative tese a costruire la comprensione (Steen 1992). Infatti, collegare l'apprendimento dei concetti e delle abilità algebriche con lo studio di altri argomenti matematici ha un valore notevole. Il ragionamento proporzionale può essere un elemento chiave in questo sviluppo integrale.

Il raggiungimento di questi standard richiede un supporto e un impegno a lungo termine

Questa bozza dei *Principles and Standards* offre un'agenda ambiziosa per l'educazione matematica del livello intermedio. Ci si attende che gli studenti imparino una matematica seria e sostanziosa in classe, dove l'attenzione è tesa a suscitare un impegno consapevole e un apprendimento intelligente. Non sarà sufficiente annunciare semplicemente questo come un nuovo standard per i livelli intermedi dell'educazione matematica; sarà invece necessario provvedere a un impegno a lungo termine e a un sostegno per quest'agenda. Deve essere sviluppata la capacità della scuola e degli insegnanti di provvedere a questo tipo di educazione matematica. Speciale attenzione deve essere data alla preparazione e al supporto professionale in itinere degli insegnanti della scuola media per aiutarli a sviluppare la conoscenza delle idee matematiche, apprendere le migliori pratiche pedagogiche, e familiarizzare con le ricerche sull'apprendimento degli studenti.

#8 Reazione del lettore

Mentre leggete la prossima sezione, considerate le seguenti domande :

Siamo interessati alla tua reazione sullo stile e sul tono del Capitolo 6. Come potrebbe esserti di maggiore aiuto?

Che reazione hai avuto sulle prospettive dell'algebra che sono presentate qui?

L'insieme degli standard per i livelli 6-8 descrive adeguatamente un ricco programma di matematica per le classi medie? Manca qualcosa? Specifica cosa.

Standard 1: Numeri e operazioni

I programmi di matematica devono facilitare lo sviluppo della percezione dei numeri e delle operazioni in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici;
- capiscano il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro;
- usino gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e facciano stime in modo appropriato.

Elaborazione: livelli 6-8

I numeri razionali sono il perno centrale dell'esperienza degli studenti delle scuole medie con il numero, e giocano un ruolo fondamentale nello sviluppo della facilità del ragionamento proporzionale. Nei livelli 6-8, gli studenti lavorano sulla base di esperienze con frazioni, decimali e percentuali, fatte nei livelli precedenti o nella vita di tutti i giorni, e arrivano a conoscere il concetto di numero intero e ad avere scioltezza con le operazioni. Ciò fornisce una base su cui costruire una solida comprensione dei numeri razionali. In generale, il lavoro degli studenti con i numeri interi sarà presente nel curricolo nel contesto del problem solving, con pochi argomenti relativi ai numeri interi oggetto di uno specifico insegnamento. Nei livelli intermedi, gli studenti imparano fatti relativi ai numeri interi e vengono loro presentati alcuni numeri irrazionali.

Dal momento che lasciano la scuola media, gli studenti dovrebbero possedere strategie efficienti e accurate per fare calcoli con frazioni, decimali, percentuali e numeri interi, e dovrebbero essere in grado di usare stime numeriche in modo accurato ed appropriato. Questo obiettivo è possibile da raggiungere solo se viene posta una intensa attenzione a sviluppare anche una solida comprensione concettuale. La ricerca suggerisce che la ragione delle difficoltà degli studenti con il calcolo dei numeri razionali deriva in parte dal fatto che spesso imparano a manipolare i simboli senza dare loro un significato (Hiebert e Behr 1988). Ci sono numerosi contenuti concettuali con i quali gli studenti hanno bisogno di scontrarsi per arrivare a capire i numeri razionali. Per esempio, le differenze e le analogie tra i significati e gli usi di rapporti, tassi, e frazioni non sono tutte insignificanti. Oltre a ciò, moltiplicare o dividere frazioni e numeri interi richiede una diversa concettualizzazione di queste operazioni rispetto a quella che era necessaria per i numeri interi. Gli studenti hanno bisogno di molte occasioni per pensare in modo profondo i numeri razionali e per usarli per risolvere problemi. L'esperienza con i numeri razionali si fa naturalmente quando si studiano molti argomenti curricolari. Per esempio, gli studenti possono usare rapporti, tassi, frazioni, decimali, e percentuali per dare misure, per esprimere probabilità e rapporti di similitudine, per confrontare risposte a inchieste con due diversi campioni, per rappresentare l'inclinazione e il tasso di cambio nelle equazioni lineari o nel proporre problemi.

Punti nodali per i livelli 6-8

- **Capire i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- lavorare in modo flessibile con frazioni equivalenti, decimali, percentuali,
- confrontare e ordinare questi numeri efficientemente e accuratamente, trovare la loro collocazione approssimativa sulla linea numerica; e scegliere forme appropriate e convenienti di questi numeri per risolvere problemi;
- sviluppare la percezione dei numeri interi ed essere capaci di rappresentarli, confrontarli e ordinarli;
- sviluppare la comprensione dei numeri grandi, includendo l'uso di punti di riferimento per comprendere la loro grandezza; riconoscere, capire e usare appropriatamente varie rappresentazioni dei numeri grandi (p.e. esponenziali, scientifiche, e notazioni di calcolo usate sulle calcolatrici);
- usare i concetti della teoria dei numeri (p.e. fattori, multipli, fattorizzazioni prime, numeri coprimi) per risolvere problemi e capire le idee sui numeri razionali;
- sviluppare una comprensione delle proprietà dei sistemi dei numeri interi e razionali (p.e. ordine, densità, addizioni, e moltiplicazioni inverse);
- riconoscere e usare i numeri razionali comunemente incontrati (p.e. □2).

- **Capire il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- estendere la comprensione delle operazioni per arrivare a operazioni con le frazioni, decimali, percentuali, e a esponenti interi non negativi;
- capire gli effetti dell'operare tra frazioni, decimali, percentuali e numeri interi;
- riconoscere e usare le proprietà di operazioni con numeri interi e razionali, quali la proprietà di chiusura, quella commutativa e quella distributiva;
- capire e usare le relazioni inverse di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, quadrati e radici quadrate per risolvere i problemi;
- estendere la comprensione di calcolo per comprendere situazioni combinatorie elementari.

- **Usare gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e fare stime in modo appropriato**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- sviluppare, analizzare e confrontare algoritmi per fare i calcoli con frazioni, decimali, percentuali, e con numeri interi e diventare accurati ed efficienti in questi calcoli;
- sviluppare, analizzare e illustrare metodi per risolvere problemi che prevedono proporzioni (p.e. rappresentare in scala, trovare rapporti equivalenti);
- sviluppare e raffinare strategie per fare stime (anche con l'uso di frazioni); utilizzare come mezzo per controllare la ragionevolezza dei risultati;
- selezionare e usare metodi appropriati per fare calcoli mentali e stime, con carta e penna e con la calcolatrice, a seconda della situazione da affrontare.

Discussione

- **Concetti numerici e loro proprietà**

Gli studenti dei livelli intermedi hanno bisogno di conoscere numeri diversi dai numeri interi, e in questo livello entrano in familiarità con le frazioni, i decimali, le percentuali, e con i numeri interi. Sviluppare una conoscenza approfondita, operare con scioltezza e flessibilità su questi numeri è un obiettivo importante dei livelli medi. Gli studenti hanno bisogno di conoscere molti significati e molti usi delle frazioni che rappresentano non solo parti di un intero, ma anche divisioni (p.e. ¾ = 3÷4), misure o quantità decimali, percentuali, tassi, e rapporti. I numeri decimali hanno bisogno di essere compresi non solo come frazioni i cui denominatori sono potenze di dieci, ma anche come una naturale estensione della base dieci, per rappresentare con la notazione posizionale quantità minori di uno.

Gli studenti dovrebbero imparare a identificare le rappresentazioni equivalenti dei numeri e a passare liberamente dall'una all'altra, riconoscendo i vantaggi e gli svantaggi di ciascuna come strumento per la comprensione e la risoluzione di problemi. Nonostante 15/100, 3/20, e 15% siano tutte rappresentazioni dello stesso numero, abitualmente è più utile scrivere una frazione di un dollaro con 15/100, la probabilità di vincere a un gioco con 3/20, la tassa su un acquisto di 2,98$ come $0.15, e uno sconto come 15%. Gli studenti dovrebbero anche arrivare a riconoscere le difficoltà inerenti a certe rappresentazioni, scrivere 1/3 come percentuale o vedere 5,99999999 sulla calcolatrice al posto di 6. Per sviluppare tale comprensione, hanno bisogno di esperienze che li facciano pensare piuttosto che di esperienze meccaniche. Gli studenti hanno bisogno di risolvere problemi e di indagare situazioni progettati per stimolare un pensiero agile sulla rappresentazione dei numeri razionali. Esperienze con una varietà di modelli per i numeri razionali - linee di frazioni, linee numeriche, griglie 10 per 10, modelli d'area, e insiemi discreti di oggetti - possono offrire agli studenti rappresentazioni concrete per idee astratte e favorire il loro pensiero e la risoluzione dei problemi. Anche, le esperienze con modelli concreti offrono agli studenti ulteriori opportunità per confrontare rappresentazioni e per muoversi in modo flessibile tra esse nel risolvere i problemi.

Gli studenti dei livelli intermedi lavorano anche con i numeri interi. Generalmente hanno già conoscenze intuitive di questi numeri che nascono da esperienze della loro vita di tutti i giorni: temperature di inverno che scendono sotto lo zero, giochi come il football dove le squadre guadagnano o perdono mete in ogni incontro, notiziari che riguardano le fluttuazioni nella borsa, o le loro osservazioni su cosa accade quando 7 viene sottratto da 5. Il curricolo scolastico ha bisogno di costruirsi e di ampliarsi su queste esperienze informali. Per esempio, per aiutare gli studenti a capire che –12 è meno di –5, potrebbe essere utile fare riferimento alle temperature e segnarle su un termometro, il che poi porta a estendere la linea dei numeri per includere i numeri negativi.

Nonostante l’obiettivo principale nelle classi della scuola media siano i numeri razionali, i numeri interi vengono trattati quando gli studenti lavorano con numeri molto grandi (milioni e miliardi). Hanno bisogno di capire la grandezza di questi numeri e di acquisire facilità nel leggerli, e nel rappresentarli (p.e. 2.300.000000 può essere rappresentato da 2,3 miliardi o $2{,}3\text{x}10^9$ in notazione scientifica). L’uso di quantità familiari (p.e. la dimensione di un campo da calcio, o la popolazione di uno stato o di una provincia) considerati come parametri possono spesso aiutare gli studenti a capire queste grandi quantità. Anche i contesti incontrati in altre materie scolastiche come pure nella vita di tutti i giorni possono fungere da situazioni problematiche per lo studio dei grandi numeri. Per esempio, gli studenti vedono titoli di giornale del tipo “il costo del greggio ha superato i due miliardi di dollari!”, ed essi vedono numeri del tipo $2{,}5 \times 10^{11}$ nei testi di scienze, per indicare il numero di globuli rossi nel corpo umano. Devono essere in grado di interpretare i numeri di questa grandezza per capire varie forme di notazione (p.e. il numero 2.5×10^{11} potrebbe apparire su una calcolatrice come “2.5E11” o “2.5 11”, a seconda della marca e del modello della calcolatrice).
Gli studenti lavorano anche con i numeri interi presenti nel loro studio della teoria dei numeri. I problemi relativi alla divisibilità (mostra che il prodotto di quattro numeri interi consecutivi è sempre divisibile per 24), ai numeri primi (mostra che la somma di due numeri primi non è necessariamente un numero primo), o numeri “figurati” (trova il ventesimo numero triangolare) non si basano solo sulla conoscenza che gli studenti hanno dei numeri interi ma forniscono anche ricche opportunità per risolvere problemi, per ragionare, e per usare il pensiero algebrico. Inoltre, l‘apprendimento degli studenti sulle scomposizioni in fattori primi e sui numeri coprimi li aiuta a capire alcuni aspetti del lavoro con le frazioni (p.e. procedure per semplificare o per addizionare le frazioni).

Il curricolo dei livelli intermedi dovrebbe anche sviluppare l‘abilità degli studenti a fare confronti intelligenti tra le informazioni quantitative, che utilizzano rapporti e valute. Formulare rapporti per fare confronti è al centro del ragionamento proporzionale, un concetto chiave in molte aree della matematica (p.e. similitudini in geometria, modelli di scomposizione in algebra). Sviluppare la comprensione degli studenti e le strategie per fare appropriati confronti richiede tempo e molte esperienze. Per esempio, quando si prova a decidere, quale è il migliore acquisto – 12 biglietti per 15$ o 20 biglietti per 23$ – gli studenti dovrebbero scegliere tra un certo numero di strategie. Dovrebbero usare scale per trovare il costo di 60 biglietti in ognuna delle situazioni (12 biglietti per 15$ significa 60 biglietti per 75$, mentre 20 per 23$ significa 60 per 69$, cioè il prezzo migliore). Alternativamente, tassi unitari potrebbero essere usati per determinare il prezzo migliore (15$ per dodici significa 1,25 dollari per uno mentre 23$ per venti significa 1,15$). L’obiettivo educativo non è solo fare in modo che gli studenti abbiano esperienze di diversi modi di ragionare in situazioni proporzionali, ma anche aiutarli a imparare a riconoscere quando il ragionamento proporzionale è appropriato.

- **Operazioni e loro proprietà**

Gli studenti dovrebbero arrivare ai livelli intermedi con una solida comprensione delle operazioni sui numeri interi. Le esperienze a questo livello continuano ad accrescere la comprensione degli studenti delle operazioni mentre svolgono calcoli con frazioni, decimali, percentuali e interi. Comprendere un'operazione significa essere capaci di ragionare su quale sarà il suo effetto sui numeri ai quali è applicata, e riconoscere se l'operazione è veramente appropriata per risolvere un particolare problema. Le idee che gli studenti hanno su addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione si sviluppano mano a mano che imparano a operare con i numeri razionali. Per esempio, la comprensione degli studenti delle addizioni e delle sottrazioni con numeri interi può essere estesa a frazioni e decimali in presenza di una solida comprensione del significato di numeratore e denominatore, grandezza del numero, equivalenza e del valore della posizione. Capire il valore della posizione permette agli studenti di calcolare 1,4+0,67 usando ciò che conoscono del calcolo 140+67. Allo stesso modo, gli studenti che hanno una buona percezione delle frazioni e una sicura comprensione delle addizioni difficilmente commettono il classico errore di dire che 2/3 + 3/4 è uguale a 5/7. Questa risposta non è ragionevole perché ciascuno degli addendi è più grande di 1/2, così la somma deve essere più grande di 1. Una buona comprensione delle relazioni tra le operazioni di addizione e sottrazione, insieme a una comprensione concettuale delle distanze su una linea numerica, rende più semplice capire le operazioni di addizione e sottrazione dei numeri interi.

Moltiplicare e dividere frazioni e decimali mette alla prova le idee, che molti studenti hanno sviluppato riguardo a queste operazioni con il loro lavoro con i numeri interi. Spesso credono che la moltiplicazione ingrandisca sempre le cose, e che la divisione dia sempre per risultato della risposta un numero più piccolo. Queste idee possono creare problemi cercando di capire moltiplicazioni e divisioni con le frazioni (Graeber and Tanenhaus 1993). Ma se gli studenti hanno già pensato alle moltiplicazioni con i numeri interi non solo come a un'addizione ripetuta, ma usando come modello un'area, utilizzeranno ancora quest'area come aiuto per capire le moltiplicazioni di frazioni o decimali. Similmente, se gli studenti hanno pensato alle divisioni con i numeri interi non solo come a una ripartizione (se 24 dolcetti sono divisi tra 6 amici, quanti dolcetti ha un amico?) ma anche come a una sottrazione ripetuta (se impacchettiamo 24 dolcetti in confezioni che ne contengono 6 ciascuna, quante confezioni potremmo riempire impacchettando 6 dolcetti per volta?), possono usare di nuovo questo modello per pensare alle divisioni con le frazioni. Per esempio se 4 yarde e mezza di nastro devono essere tagliate in pezzi da 3/4 di yarda ciascuna per fare dei fiocchi, quanti fiocchi si possono fare? L'immagine è di tagliare più volte 3/4 di yarda di nastro. Far lavorare gli studenti con oggetti concreti o disegni è utile perché li aiuta a sviluppare e ad approfondire la loro comprensione delle operazioni. Gli studenti hanno bisogno di una revisione regolare del significato delle operazioni mentre lavorano con i numeri razionali e interi nei livelli intermedi. E' opportuno prendere in considerazione e trattare la divisione per zero in questo livello.

- **Calcolare e stimare**

Ci si aspetta che gli studenti arrivino alla scuola media con una solida comprensione delle operazioni con i numeri interi e con efficienti procedure per operare con questi numeri, in modo da non dover dedicare a questo livello troppo tempo ai calcoli con numeri interi. Non di meno, gli studenti dovrebbero avere l'opportunità di fare calcoli con i numeri interi come componente naturale della risoluzione di problemi incontrati nel programma scolastico dei livelli intermedi, come calcolare l'area o il volume, determinare la media o l'interquartile di un insieme di dati, o generare i termini successivi di una successione.

Nei livelli 6-8 gli studenti acquisiscono facilità nell'addizionare, sottrarre, moltiplicare e dividere con frazioni, decimali e numeri interi. Lo sviluppo degli algoritmi per operare con questi numeri dovrebbe basarsi sul lavoro degli studenti in attività scelte accuratamente, accompagnate da discussioni dirette dall'insegnante. Parlando di problemi contestualizzati, gli studenti possono sviluppare algoritmi di calcolo significativi. Lavorare assieme con gli algoritmi, spiegare perché gli algoritmi funzionano e hanno un significato, e confrontare gli algoritmi sviluppati dagli studenti con gli algoritmi insegnati tradizionalmente nella scuola aiuta gli studenti a identificare metodi ragionevoli per calcolare con frazioni, decimali, e interi. Lo sviluppo delle procedure di computo per calcoli che comprendono le percentuali dovrebbe seguire un percorso simile. L'istruzione che riguarda la risoluzione delle proporzioni dovrebbe porre attenzione ai metodi che hanno una forte base intuitiva, come mettere in scala e trovare rapporti equivalenti. Il metodo delle "moltiplicazioni incrociate" è meno intuitivo, e gli studenti potrebbero non essere in grado di capire la ragionevolezza del metodo finché non arrivano a usare i simbolismi algebrici per giustificarlo.

Il calcolo, in questa bozza, come era anche nel *Curriculum and Evaluation Standards* (1989), comprende un'espansione della tradizionale visione che include non solo calcoli con uso di carta e penna, ma anche il calcolo mentale e l'uso di calcolatori e di altri strumenti. A causa di questa definizione allargata, il calcolo deve essere strettamente collegato al ragionamento e alla stima. In ogni situazione particolare, gli studenti hanno bisogno di decidere se è appropriata una risposta esatta o una stimata, e anche se ha senso risolvere il problema mentalmente, con carta e penna, o con la calcolatrice. Per esempio, il costo di 1/4 di libbra di noccioline a 2,40$ per libbra potrebbe essere calcolato mentalmente, mentre invece il costo di 1,37 libbre di un pezzo di candito a 1,17$ la libbra potrebbe essere stimato, anche se una calcolatrice sarebbe lo strumento da preferire se fosse necessaria una risposta esatta. Gli studenti inoltre dovrebbero essere in grado di fare questi calcoli con carta e penna, se necessario. Aiutare gli studenti a decidere quando sono appropriate le risposte esatte o stimate, quale metodo di calcolo usare, e come giudicare la ragionevolezza delle risposte è parte della pratica dell'insegnamento e dell'apprendimento.

Standard 2:Modelli, funzioni e algebra

I programmi di matematica devono porre attenzione ai modelli, alle funzioni, ai simboli in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali;
- usino forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche;
- usino modelli matematici e analizzino le variazioni in contesti sia reali sia astratti.

Elaborazione: livelli 6-8

L'algebra può essere pensata in molti modi: come modelli, funzioni e relazioni, come linguaggio, rappresentazioni e strutture basate su una generalizzazione dell'aritmetica; oppure come strumento per la modellizzazione di idee matematiche e problemi. Tutte queste visioni dell'algebra sono fondate nella scuola media. Sebbene qui siano discusse separatamente, dovrebbero essere collegate strettamente in un programma scolastico di qualità.

Lo studio dell'algebra nella scuola media implica un mescolarsi di lavoro concettuale e procedurale. Gli studenti lavorano più formalmente con rappresentazioni e simbolismi di quanto facevano nelle loro esperienze scolastiche precedenti, ma la loro istruzione dovrebbe avere come primaria importanza lo sviluppo di una solida base concettuale. È essenziale che gli studenti diventino abili nell'operare con espressioni algebriche semplici, compresa la produzione di espressioni equivalenti e l'uso e la valutazione di semplici formule. Per la fine delle scuole medie, gli studenti dovrebbero essere capaci di risolvere equazioni lineari in diversi modi, con o senza calcolatrice. Ma è anche importante che sviluppino una comprensione concettuale di variabili e equazioni, che imparino a distinguere relazioni lineari da quelle non lineari e che colleghino le loro esperienze con le funzioni lineari alle loro comprensioni di rapporti e proporzioni. Attraverso le esperienze nella scuola media, gli studenti dovrebbero sviluppare comprensione e competenza sulla linearità.

Aree di focalizzazione per livelli 6-8

- **Capire i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- analizzare, creare e generalizzare modelli numerici e visivi prestando particolare attenzione ai modelli che hanno una natura ricorsiva;
- usare modelli per risolvere problemi matematici e applicati;
- rappresentare una varietà di relazioni e funzioni con tabelle, grafici, regole verbali e, quando possibile, regole simboliche.

- **Usare forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- sviluppare una solida comprensione concettuale di equazioni e variabili;
- esplorare relazioni tra espressioni simboliche e grafici, prestando particolare attenzione alle intercette orizzontali e verticali, punti di intersezione e pendenza (per relazioni lineari);
- diventare sciolti nella generazione di espressioni equivalenti per semplici espressioni algebriche e nel risolvere equazioni lineari e disuguaglianze;
- usare l'algebra simbolica per rappresentare situazioni e risolvere problemi, specialmente quelli che implicano relazioni lineari.

- **Usare modelli matematici e analizzare le variazioni in contesti sia reali sia astratti**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- modellizzare e risolvere problemi contestualizzati usando varie rappresentazioni, così come grafici e tabelle, per comprendere lo scopo e l'utilità di ogni rappresentazione;
- sviluppare una comprensione iniziale del tasso di variazione, con attenzione ai legami fra la pendenza di una retta, tasso di variazione costante, e i rispettivi significati all'interno di un contesto;
- esplorare diversi tipologie di cambiamento che si verificano in modelli discreti, come il cambiamento lineare e quello esponenziale

Discussione

- **Modelli e funzioni**

Il principale obiettivo nella scuola media è sviluppare l'abilità degli studenti nell'analizzare, modellizzare, rappresentare e risolvere problemi matematici e del mondo reale usando modelli. I modelli ricorsivi, cioè modelli in cui ogni numero è costruito dal numero precedente ripetendo lo stesso procedimento (p.e. i numeri poligonali e i numeri di Fibonacci), diventano sempre più utili in queste situazioni. Il seguente esempio mostra come un modello ricorsivo e l'uso di una varietà di rappresentazioni differenti possono aiutare nella comprensione e nella risoluzione di problemi relativi alla geometria. Si noti come ogni rappresentazione aggiunga una diversa dimensione alla comprensione. In particolare si osservi come la tabella di valori permette agli studenti di vedere modelli e come le figure aiutano gli studenti a capire perché vengono in mente quei modelli.

Supponiamo che gli studenti stiano studiando le relazioni tra il numero di lati di un poligono e la somma degli angoli interni o il numero totale delle diagonali che può essere disegnato. Potrebbero organizzare la loro informazione come nella Tabella 6.1.

Numero di lati	3	4	5	6
Somma di angoli interni	180	360	540	720
Numero di diagonali	0	2	5	9

Tabella 6.1. Somme di angoli e diagonali per vari poligoni

Esaminando gli angoli interni, alcuni studenti potrebbero osservare che mentre il numero dei lati si incrementa di uno, la somma degli angoli interni aumenta di 180. Analizzando le diagonali, possono osservare che la differenza di una coppia di numeri consecutivi nella sequenza 0, 2, 5, 9 è 2, 3 e 4. Potrebbero allora ipotizzare che i numeri di diagonali in poligoni di sette o otto lati sono rispettivamente 9+5=14 e 14+6=20. Altri studenti potrebbero osservare che il numero di diagonali aumenta di n-2, dove n è il numero di lati, così il numero di diagonali di poligoni di sette o otto lati è rispettivamente 9+(7-2)=14 e 14+(8-2)=20. Altri studenti possono osservare che il numero di gradi nella somma (S) degli angoli interni di qualsiasi poligono con n lati sembra essere dato dall'equazione S=180(n-2), che si dà il caso essere un'equazione lineare.

Gli studenti della scuola media dovrebbero essere invitati a sostenere le loro congetture non solo ricorrendo ai modelli, ma anche ad argomenti logici che spieghino perché le generalizzazioni devono essere vere. Esplorando con disegni o software geometrico, gli studenti potevano vedere che quando il numero di lati di un poligono aumenta di uno, la somma degli angoli interni aumenta di 180 gradi perché si aggiunge un altro triangolo. Questo si vede nel poligono di sinistra della figura 6.1 in cui un poligono di quattro lati è trasformato in un poligono di cinque lati. Gli studenti potevano giustificare la formula S =180(n-2) disegnando tutte le diagonali da ogni singolo vertice per formare precisamente n-2 triangoli.

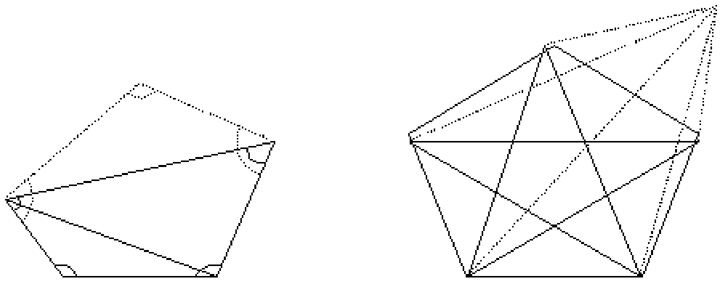


Figura 6.1. Diagonali di un quadrilatero e di un pentagono

Gli studenti potevano giustificare che il numero di diagonali aumenta di n-2 vedendo che quando si aggiunge un altro vertice, come nel poligono di destra della Figura 6.1 (un poligono di cinque lati è trasformato in un poligono di sei lati), n-3 diagonali sono aggiunte al nuovo vertice e un lato diventa una diagonale. Se gli studenti hanno risolto il ben noto problema della "stretta di mano", in cui ogni persona in un gruppo stringe la mano a ogni altra persona, possono essere capaci di usare una logica simile per concludere che il numero totale di diagonali dovrebbe soddisfare $T = n(n-3)/2$.

L'approccio ricorsivo, in cui gli studenti riflettono su come i numeri variano, e le soluzioni a formula chiusa, così come S = 180(n-2), sono metodi legittimi per risolvere problemi ed entrambi dovrebbero essere valutati. Quando si usa un approccio ricorsivo, gli studenti dovrebbero scrivere la relazione chiaramente, come "ogni angolo è 180 più del angolo precedente" oppure "successivo = 180 + precedente". Un approccio anche più potente è che gli studenti usino un foglio elettronico per generare i numeri in sequenza. Per mezzo della tecnologia, è facile generare quasi ogni numero necessario usando l'approccio ricorsivo proprio come lo è usando la formula. Perciò, il pensiero ricorsivo è un'importante abilità che si formerà nella scuola secondaria.

- **Struttura e notazione simbolica**

È importante realizzare che lo sviluppo della comprensione del concetto di variabile da parte degli studenti sia complicato, precisamente perché il concetto di variabile è esso stesso multi-sfaccettato (Usiskin 1998). Una profonda comprensione di variabile implica molto più che un semplice riconoscimento che le lettere possono essere usate per rappresentare numeri incogniti in equazioni. Si considerino queste espressioni:

$$30 = 5x \quad 1= n\,(1/n) \quad A = LB \quad y=3x.$$

Nella prima equazione, x rappresenta uno specifico, invariabile numero che può essere determinato risolvendo l'equazione. La seconda equazione generalizza un modello aritmetico dove n può assumere un ampia gamma di valori (ma non zero); essa rappresenta un'identità. La terza equazione è considerata di solito con una formula con A, L e B che rappresentano le quantità area, lunghezza e larghezza. Queste quantità si pensano simili più a cose note che incognite. L'ultima equazione offre un esempio più stringente di "variabilità" di ciascuno degli altri, poiché x assume una varietà di valori e i corrispondenti valori di y possono essere calcolati. Un grafico potrebbe essere utilizzato per rappresentare l'equazione.

Gli studenti dei livelli medi hanno bisogno di un'ampia varietà di esperienze con equazioni di vario genere prima di poter essere capaci di sviluppare una profonda comprensione di variabile ed equazione. Sebbene una completa comprensione non sarà probabilmente consolidata durante i livelli medi, per la fine del livello 8 gli studenti dovrebbero essere capaci di risolvere equazioni simili a $30 = 5x$ rispetto al numero incognito, di riconoscere equazioni quali $1= n\ (1/n)$ come identità, di usare formule come $A=LW$ in situazioni applicate e di riconoscere $y=3x$ come equazione lineare che risulta vera per molte coppie ordinate (x,y).

Gli studenti dovrebbero diventare sciolti nella rappresentazione grafica e nella soluzione di equazioni lineari e dei sistemi di equazioni lineari. Come per le abilità in altre forme di manipolazione simbolica, è anche importante che questa fluidità sia fondata su solide basi concettuali per garantire che queste manipolazioni siano significative e non semplicemente esercizi a memoria. In particolare gli studenti dei livelli medi dovrebbero capire e utilizzare che: 1) coppie ordinate che soddisfano due equazioni lineari sono precisamente l'insieme di punti che si trovano simultaneamente sui grafici di queste equazioni; 2) le intercette x e y del grafico di ogni funzione $y = f(x)$ corrispondono ai posti in cui y e x, rispettivamente, sono zero; 3) per le funzioni lineari $y = mx+b$, la pendenza può essere pensata come la ripidità del grafico, quanto rapidamente la funzione aumenta o diminuisce, oppure come un tasso di variazione connesso a un concetto fisico come la velocità.

Imparare a interpretare e a scrivere espressioni simboliche e a risolvere equazioni simboliche algebriche è importante nei livelli medi, ma per la maggior parte degli studenti un lavoro esteso con i simboli dovrebbe svolgersi solo dopo che sono diventati sciolti con rappresentazioni verbali, tabulari e grafiche delle relazioni che i simboli rappresentano. Molti insegnanti trovano di grande aiuto introdurre espressioni algebriche come modelli di quantità in situazioni contestualizzate, come la seguente. Supponiamo che tre amici vadano a una partita di baseball e ognuno compri un hot dog e una soda. Il costo totale dovrebbe essere indicato $3(H+S)$ dove H è il costo di un hot dog e S il costo di una soda. Ma è anche possibile pensare separatamente al costo degli hot dog (3H) e al costo delle sode ($3S$). In questo caso, il costo totale dovrebbe essere indicato $3H+3S$.

Lavorando su problemi simili a questi, gli studenti possono acquisire esperienza con rappresentazioni algebriche di situazioni. Inoltre, possono vedere che possono essere prodotte espressioni simboliche diverse per rappresentare la stessa situazione. Se queste espressioni sono tutte valide allora le espressioni dovrebbero essere equivalenti. Ciò può condurre all'esame dell'equivalenza algebrica. Anche attraverso queste esperienze gli studenti imparano che spesso possono esaminare l'equivalenza di espressioni in molti modi, come verificando che i grafici collegati e le tabelle sono gli stessi oppure usando le proprietà distributiva, associativa e commutativa per trasformare espressioni in forme equivalenti. Per la fine del livello 8, la maggior parte degli studenti dovrebbe essere capaci di usare la loro comprensione di equivalenza e di proprietà distributiva, associativa e commutativa per riconoscere la non equivalenza di espressioni come $\sqrt{36+9}$ e $\sqrt{36}+\sqrt{9}$, e l'equivalenza di espressioni come $2(x+3)$ e $2x+6$. Attraverso queste esperienze, gli studenti possono dare un significato al lavoro con espressioni algebriche.

Modellizzazione e variazione

Gli studenti imparano a riflettere sull'algebra come strumento prezioso per la modellizzazione quando creano equazioni o grafici per rappresentare situazioni contestualizzate. Ma anche l'inverso è importante – cioè, richiedere agli studenti di interpretare grafici o equazioni come modelli di situazioni. Per esempio, agli studenti potrebbe essere mostrato un tratto di un grafico lineare della distanza da casa rispetto al tempo oppure il costo totale di biglietti rispetto al numero di biglietti comprati, e potrebbe essere loro chiesto di descrivere una situazione che il grafico potrebbe modellizzare. L'insegnante deve invitare gli studenti a fornire chiare, complete descrizioni orali e scritte per tali modelli di situazioni. Fare una domanda di interpretazione può anche aiutare: quando era a casa la persona? Quanto costavano i biglietti? Per rispondere a queste domande gli studenti devono essere capaci di interpretare intercette e pendenza di un grafico.

Nei livelli medi, gli studenti dovrebbero avere molte esperienze nell'indagine di problemi di uso di rappresentazioni molteplici, come nell'esame degli angoli interni e delle diagonali di poligoni, come discusso prima. Attraverso il lavoro con modelli, grafici e simboli, gli studenti dei livelli medi possono considerare variazioni e co-variazioni - come le variazioni in una variabile incidono sull'altra.

È particolarmente importante per gli studenti dei livelli medi acquisire un'approfondita comprensione del tasso di variazione e di come questo sia in relazione alle rette e alla pendenza delle rette. Gli studenti possono avere difficoltà a comprendere il tasso di variazione, dato che esso è spesso un oggetto derivato, come la velocità, e non un ente fisico. L'insegnante può aiutare a superare questo problema offrendo agli studenti esperienze con situazioni problematiche in cui c'è variazione e aiutandoli a riflettere sulle connessioni tra la variazione reale, la rappresentazione visiva su un grafico, e la costante m nell'equazione lineare $y=mx+b$. Tali esperienze potrebbero essere collegate a esperienze in un laboratorio tecnologicamente attrezzato, simulazioni al computer oppure modelli come $S=180n-360$, la relazione tra il numero di lati di un poligono e la somma degli angoli interni. Gli studenti dovrebbero anche comprendere che ogni variazione deve avvenire rispetto a qualcosa: variazione di posizione rispetto al tempo, variazione di dimensione rispetto al tempo, variazione di area rispetto a variazione nei lati, e – per modelli numerici – variazione rispetto alla posizione in una sequenza.

Gli studenti dei livelli medi dovrebbero anche esaminare altre funzioni, come quelle quadratiche o quelle esponenziali. La derivazione della formula $T = n(n-3)/2$ come il numero di diagonali in un poligono di n lati permette agli studenti di vedere una funzione quadratica che si presenta naturalmente. Riflettendo sull'approccio ricorsivo a questo problema, cioè, che la variazione nel numero delle diagonali si incrementa di 0, 2, 5, 9, gli studenti iniziano a capire la natura della "pendenza" che aumenta (o diminuisce) della funzione quadratica. Anche la funzione esponenziale può presentarsi naturalmente nei livelli medi quando gli studenti considerano situazioni come questa: metti un chicco di grano sul primo quadrato di una scacchiera, due chicchi sul secondo quadrato, quattro sul terzo e così via. Riflettendo sul fatto che la variazione è il raddoppiare, o il rapporto, gli studenti iniziano a comprendere la forma di funzioni esponenziali. Gli studenti dovrebbero essere capaci di riconoscere grafici di ogni tipo di relazione, e dovrebbero essere capaci di riconoscere il modo in cui queste relazioni si manifestano in tabelle di dati. Un altro importante obiettivo è assistere gli studenti nella costruzione di una solida comprensione delle interazioni tra tabelle di dati, grafici e espressioni algebriche come modelli di relazioni e funzioni che nascono da queste situazioni problematiche. L'inizio dello sviluppo di una comprensione del concetto di variazione è centrale per lo studio di funzioni e di molta analisi nella scuola secondaria e oltre.

Standard 3: Geometria e senso dello spazio

I programmi di matematica devono essere attenti alla geometria e al senso dello spazio in modo che tutti gli studenti:

- analizzino le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali;
- selezionino e usino diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici;
- riconoscano l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche;
- usino la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica.

Elaborazione: livelli 6-8

Lo studio della geometria nei livelli 6-8 si basa sulle indagini informali nei livelli pre-K-5 e pone le basi per lo studio ulteriore della geometria nella scuola secondaria. La geometria nei livelli medi impegna gli studenti nell'esame di relazioni geometriche costruendo, disegnando, misurando, visualizzando, confrontando, trasformando e classificando figure geometriche. Questo lavoro nello stesso tempo aumenta e sviluppa ulteriormente il senso spaziale degli studenti. La geometria nei livelli medi fornisce anche un ricco contesto per lo sviluppo del ragionamento matematico degli studenti, compresi il ragionamento induttivo e quello deduttivo, fare e verificare congetture, classificare e definire oggetti geometrici.

Le congetture degli studenti, le verifiche e le discussioni associate conducono alla descrizione particolareggiata di relazioni tra figure bidimensionali e tridimensionali e li aiutano a elaborare la preparazione per la comprensione, nello stesso tempo, della necessità e della natura delle definizioni matematiche. Le inferenze induttive e le conclusioni deduttive generate dagli studenti nei livelli medi fanno presagire le convalide più formali con l'uso di dimostrazioni in cui gli studenti possono impegnarsi nelle scuole secondarie.

Nei livelli medi lo studio della geometria fornisce anche strumenti di rappresentazione per la comprensione di altri ambienti matematici. Per esempio, la geometria delle coordinate è usata per rappresentare espressioni algebriche, e rappresentazioni geometriche possono essere usate per relazioni algebriche e numeriche. Inoltre, molti argomenti trattati nello standard "misura" per i livelli medi, così come "area e volume", sono profondamente legati allo studio di geometria degli studenti.

Aree di focalizzazione per livelli 6-8

- **Analizzare le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- descrivere precisamente, classificare e confrontare tipi di figure piane e solide (p.e. angoli, triangoli, quadrilateri, cilindri, coni ecc.) secondo le loro principali caratteristiche;
- analizzare e comprendere relazioni geometriche tra figure bidimensionali e tridimensionali;
- usare le proporzioni per esaminare relazioni tra figure piane simili;
- creare argomenti sia induttivi sia deduttivi riguardanti le idee e le relazioni geometriche;
- riconoscere e applicare idee e relazioni geometriche al di fuori dell'ambito matematico (esterne all'aula di matematica), in aree come arte, scienze e vita quotidiana.

- **Selezionare e usare diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici;**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- imparare a utilizzare la geometria delle coordinate per mostrare relazioni geometriche tra quantità correlate, in particolare quando la relazione è lineare;
- usare la geometria delle coordinate per rappresentare ed esaminare le proprietà delle figure geometriche, specialmente quelle contenenti insiemi di rette parallele o perpendicolari;
- usare relazioni trovate in triangoli rettangoli (p.e. la relazione di Pitagora, triangoli rettangoli isosceli, triangoli con angoli di 30-60-90 gradi) per risolvere problemi;
- esplorare l'uso di altri sistemi di rappresentazione, in particolare reti.

- **Riconoscere l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- descrivere dimensione, posizione e orientamento di figure secondo trasformazioni informali, come simmetrie, rotazioni, scorrimenti e ingrandimenti;
- usare simmetrie assiali e rotazionali per descrivere e classificare poligoni e poliedri;
- comprendere i concetti di congruenza e similitudine con l'uso di trasformazioni;

- esplorare la composizione di trasformazioni (p.e. simmetrie rispetto a diversi assi).

- **Usare la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica**

Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero:

- sviluppare scioltezza con le rappresentazioni bidimensionali di oggetti tridimensionali;
- comporre e decomporre figure bidimensionali e tridimensionali per risolvere problemi;
- usare modelli geometrici per rappresentare e spiegare relazioni numeriche e algebriche.

Discussione

- **Forma e struttura**

Gli studenti arrivano allo studio della geometria nei livelli medi con moltissime esperienze rilevanti. Figure geometriche circondano gli studenti nella loro vita quotidiana e essi possono trarre percezione sulla rappresentazione geometrica di figure da queste esperienze. Arrivano anche con conoscenze sui concetti di punto, retta, piano e di molte figure; con molta esperienza nella visualizzazione e nel disegno di rette, angoli, triangoli e altri poligoni; e hanno lavorato e sviluppato descrizioni di varie figure bi- e tridimensionali. Nei livelli medi, gli studenti dovrebbero diventare più precisi nel definire caratteristiche di diversi tipi di poligoni e poliedri e usarle per classificare, confrontare e contrapporre.

Molta geometria nei livelli medi si occupa di esplorazione e di una descrizione particolareggiata di relazioni tra tipi di figure e componenti importanti di figure. L'indagine può essere sostenuta da varie strategie di apprendimento, compreso l'uso di modelli fisici o grafici di figure geometriche e l'utilizzo di software geometrico. Gli studenti possono usare mappe, carta millimetrata, cartoni di varie lunghezze, oppure software grafico per creare figure bidimensionali e fare congetture sulle caratteristiche e componenti delle figure o sulle relazioni tra differenti tipi di figure. Per esempio, esplorazioni significative con software geometrico dinamico possono aiutare gli studenti a scoprire sottili relazioni tra quadrilateri. Risultati rappresentativi di una tale indagine sono riassunti nella Figura 6.2 e forniscono una base per un'ipotesi che le diagonali di un quadrato sono perpendicolari e di lunghezza uguale, le diagonali di un rettangolo non quadrato sono di uguale lunghezza ma non perpendicolari, le diagonali di un rombo non quadrato sono perpendicolari ma di lunghezza non uguale e le diagonali di altri parallelogrammi sono di lunghezza diversa e non perpendicolari.

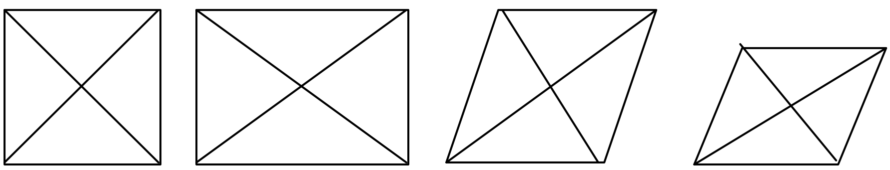


Figura 6.2. Diagonali di quadrilateri

Gli studenti hanno anche bisogno di esperienza nello sviluppo di chiare, precise e interessanti spiegazioni e giustificazioni delle congetture che si formano sulla base di indagini geometriche nei livelli medi. Per esempio, gli studenti potrebbero giustificare l'affermazione che due triangoli sono simili se si trova un rapporto invariante di similitudine che vale per tutti i lati corrispondenti. Oppure usano le loro conoscenze riguardo agli angoli interni di diversi poligono regolari per spiegare perché solamente triangoli, quadrati ed esagoni possono essere usati per fare un ricoprimento completo del piano. Esperienza nel comunicare tali ragionamenti in modo accurato e chiaro è una preparazione per la creazione o comprensione di dimostrazioni più formali nella scolarizzazione successiva.

Molte indagini di geometria nei livelli medi possono essere motivate da o connesse a temi di altre materie. Natura, arte e scienze forniscono opportunità per l'osservazione e la successiva esplorazione di concetti geometrici e modelli per gli studenti volti a far riconoscere e comprendere la bellezza e l'utilità della geometria. Per esempio, lo studio dei rettangoli aurei (rettangoli in cui il rapporto delle lunghezze è il rapporto aureo) può collegarsi alla lettura degli studenti di antichi miti nella classe di educazione artistica oppure attraverso una considerazione sull'antica architettura greca. Gli studenti potrebbero provare a trovare altri aspetti del rapporto aureo in arte o in natura (p.e. la crescita della conchiglia di un nautilus). In questo caso, gli studenti non dovrebbero solamente collegare la matematica ad altri argomenti, ma potrebbero anche sviluppare il loro ragionamento sulle proporzioni e la capacità di misura mentre lavorano con il rapporto aureo. La tassellazione del piano e la proiezione nel disegno sono argomenti che forniscono opportunità per le indagini geometriche connesse ad arte e natura. Per mezzo del loro lavoro con la tassellazione gli studenti possono esaminare le caratteristiche di varie figure, come la dimensione degli angoli interni dei poligono regolari. La geometria proiettiva è un altro argomento che collega la geometria ad arte e natura. Nel disegnare proiezioni gli studenti lavorano con rapporti e figure simili.

- **Geometria delle coordinate e altri modelli geometrici**

Le rappresentazioni geometriche e algebriche di problemi possono essere collegate usando la geometria delle coordinate. Gli studenti possono aumentare la loro comprensione matematica delle proprietà di figure geometriche bidimensionali rappresentandole usando coordinate in un piano e interpretandole algebricamente, usando distanza e pendenza. Per esempio, la geometria delle coordinate si presta bene a sviluppare una comprensione più analitica di rette parallele e perpendicolari. Gli studenti possono usare il piano coordinato per costruire ed esplorare proprietà di rette parallele e perpendicolari usando pendenza e distanza. Per estendere questa conoscenza a figure e alle loro relazioni, l'insegnante potrebbe chiedere agli studenti di disegnare coordinate assegnate di vertici di parallelogrammi e ottenere dagli studenti congetture e relazioni di pendenza per coppie di rette perpendicolari, non perpendicolari né parallele.

Il teorema di Pitagora è una delle relazioni usate di più nell'istruzione matematica, e gli studenti dovrebbero essere capaci di usarlo con flessibilità dalla fine dell'ottavo livello. Nei livelli intermedi, il teorema di Pitagora introduce gli studenti ai numeri irrazionali, aiuta a determinare le relazioni tra i lati di triangoli con angoli di 30-60-90 gradi e triangoli rettangoli isosceli, e può essere usato per determinare indirettamente distanze che sarebbe difficile misurare direttamente anche nel piano coordinato o nel contesto di altri problemi. La storia del teorema di Pitagora può anche interessante per gli studenti, e fornisce opportunità per collegamenti tra la matematica e gli studi sociali. Inoltre, la natura accessibile di un numero di dimostrazioni che sono state proposte dai pitagorici fornisce un'eccellente opportunità di esperienze con la dimostrazione matematica. Gli studenti possono provare a ripetere alcune delle dimostrazioni visive del teorema usando software geometrico o procedure con carta tagliata e potrebbero discutere il ragionamento che sta dietro queste. Come si discute nella sezione Problem Solving di questo capitolo, la relazione si presta a favorire indagini e permette interessanti generalizzazioni e congetture che sono alla portata di studenti di livelli medi.

Oltre al loro lavoro con la geometria delle coordinate, gli studenti della scuola media trarranno beneficio da esperienze con altri modelli di rappresentazione, come le reti. Queste possono fornire agli studenti uno strumento ulteriore da usare nell'analisi e nella soluzione di problemi.

- **Trasformazioni**

La geometria delle trasformazioni offre agli studenti un'altra lente attraverso cui indagare e interpretare figure geometriche. Gli studenti possono usare carta ripiegata o specchi per esaminare rette di simmetria, per studiare le immagini di figure secondo varie trasformazioni e distinguere relazioni tra composizioni di simmetrie, rotazioni e scorrimenti. Software o carta da disegno possono anche essere usati per queste esplorazioni e per esaminare simmetrie rotazionali e ingrandimenti.

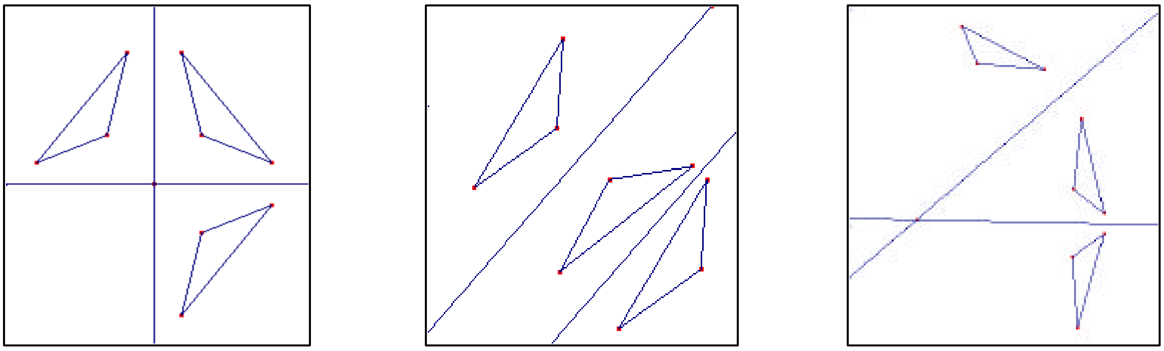


Figura 6.3. Composizione di simmetrie

Gli studenti possono usare software geometrico dinamico per studiare il risultato finale di successive simmetrie rispetto a due rette diverse. La Figura 6.3 mostra tre possibili situazioni che potrebbero essere esaminate dagli studenti: quando due rette sono perpendicolari, quando sono parallele e quando si intersecano in una posizione qualsiasi. Lavorando in coppie o in piccoli gruppi, gli studenti possono simmetrizzare un triangolo rispetto a una retta e poi simmetrizzare l'immagine rispetto a un'altra retta parallela o secante (perpendicolare o non perpendicolare). Potrebbero essere invitati dalla loro insegnante a ipotizzare quale singola trasformazione, se c'è, avrebbe lo stesso effetto sul triangolo originale e poi verificare la loro congettura. In particolare, gli studenti possono sviluppare e giustificare molte congetture interessanti, come: fare simmetrie consecutive rispetto a due rette parallele è equivalente a una traslazione di due volte la distanza tra le rette oppure fare simmetrie consecutive rispetto a due rette secanti è equivalente a una rotazione di centro il punto di intersezione e di un angolo due volte l'angolo formato dalle due rette. L'uso di software geometrico dinamico in questo caso facilita la realizzazione di esempi diversi all'interno di ciascun caso, permettendo così agli studenti di esaminare casi e verificare ipotesi con facilità, ma potrebbe essere usata anche carta da disegno. Usando le trasformazioni gli studenti possono esplorare e comprendere relazioni di similitudine e congruenza tra figure. Cioè gli studenti possono verificare relazioni di congruenza tra figure e le loro immagini in traslazioni, rotazioni o simmetrie e relazioni di similitudine tra figure e le loro immagini dopo ingrandimenti. In questo modo, le trasformazioni possono fornire una base per la definizione e la comprensione di congruenza e similitudine.

Gli studenti possono collegare la loro conoscenza geometrica e algebrica delle trasformazioni usando le coordinate nel piano. Nell'usare coordinate per collocare figure e le loro immagini secondo varie trasformazioni, gli studenti possono applicare la loro conoscenza di rette parallele e perpendicolari, di distanza e pendenza, e di rapporti e proporzioni. Una lista di problemi sulle figure geometriche basati sulle loro proprietà può essere posta e risolta in questo modo (p.e. identificando una figura che farebbe diventare una figura l'immagine di un'altra, trovando rette di simmetria per le figure, oppure trovando l'immagine di una figura secondo una specifica trasformazione).

- **Visualizzazione**

Le capacità di visualizzazione degli studenti e il ragionamento spaziale sono fondamentali per la comprensione di relazioni in geometria. È importante per gli studenti dei livelli medi sviluppare una comprensione della relazione tra figure tridimensionali e le loro rappresentazioni bidimensionali, così che gli studenti saranno capaci sia di interpretare rappresentazioni bidimensionali sia di disegnarle. Le attività di apprendimento che richiedono agli studenti di interpretare o disegnare diverse viste di costruzioni, come la pianta di base e la vista di fronte e di dietro, usando carta millimetrata, possono essere utili nello sviluppare questa comprensione. Dovrebbero avere l'opportunità di costruire oggetti tridimensionali da rappresentazioni bidimensionali, disegnare o schizzare figure data una descrizione geometrica; oppure scrivere una descrizione, comprese le proprietà geometriche, di una data figura. Esperienza con modelli di figure tridimensionali e i loro sviluppi bidimensionali è anche utile a questo riguardo, e può anche sviluppare la comprensione degli studenti sulle superfici. Gli studenti devono anche avere esperienza con figure complesse bi- e tridimensionali che esaminano, costruiscono, compongono e scompongono. Tale esperienza può essere ottenuta usando una varietà di mezzi, compresi schizzi con carta e matita, modelli geometrici e software geometrico.

Standard 4: Misura

I programmi di matematica devono dare spazio ai problemi di misura in modo che tutti gli studenti:

- capiscano le grandezze, le unità, e i sistemi di misura;
- applichino diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure.

Elaborazione: livelli 6-8

Gli studenti, quando arrivano ai livelli intermedi portano con sé anni di esperienze diverse sul concetto di misura, non solo per le loro precedenti esperienze scolastiche, ma anche perché hanno utilizzato la misura nella loro esperienza quotidiana. I concetti e le abilità relativi alla misura vengono utilizzati lungo tutto questo periodo sia in matematica, sia in altre discipline sia in attività scolastiche. Quando si dipinge la scena per uno spettacolo scolastico, i membri dell'associazione teatrale misurano la lunghezza (per dividere i pannelli in settori di dimensioni ragionevoli) e quindi determinano l'area e utilizzano un ragionamento di tipo proporzionale (per decidere quanta vernice o quanta carta colorata acquistare). Nel pianificare le bibite per una festa scolastica, i membri del consiglio studentesco devono valutare quanti galloni di limonata acquistare. Gli atleti della squadra d'atletica sono interessati ai loro tempi nelle corse veloci o nelle corse campestri in relazione ai tempi olimpionici in eventi analoghi. È bene insegnare la misura in relazione a contesti reali, in quanto il contesto migliora la comprensione e fornisce collegamenti naturali tra un argomento di matematica e un altro e anche tra la matematica e altre discipline. Inoltre, mettere in relazione l'atto fisico della misura con le rappresentazioni simboliche e visive della misura porta a una più profonda comprensione sia dei processi sia dei concetti relativi alla misura.

La misura dovrebbe essere presa in considerazione lungo l'intero anno scolastico, piuttosto che trattata esclusivamente come un'unità di studio separata. Aspetti importanti della misura nella scuola media comprendono la scelta e l'utilizzo di unità metriche compatibili con gli attributi da misurare, la scelta di unità e di scale appropriate a seconda della precisione richiesta e la risoluzione di problemi che comprendono la determinazione del perimetro e dell'area di figure bidimensionali e della superficie e del volume di figure tridimensionali. Gli studenti dovrebbero anche diventare abili nel misurare gli angoli col goniometro e nell'usare i rapporti, e le proporzioni per risolvere problemi che coinvolgono unità di misura derivate e tassi di variazione unitari.

Punti nodali per i livelli 6-8

- **Capire le grandezze, le unità, e i sistemi di misura**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- scegliere l'unità e la scala appropriate per valutare e misurare angoli, perimetri, aree, superfici e volumi;
- comprendere sia il sistema metrico sia quello di uso comune, incluse le relazioni tra le unità di uno stesso sistema.

- **Applicare diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- essere capaci a misurare gli angoli delle figure piane,
- dedurre e utilizzare le formule per il perimetro e l'area di parallelogrammi, trapezi, cerchi e figure composte di tipo elementare;
- dedurre e utilizzare le formule per la superficie e il volume di prismi, piramidi e cilindri;
- scegliere le tecniche e gli strumenti per fare misure accurate con il grado di precisione appropriato alla situazione in esame;

- utilizzare i rapporti e le proporzioni per risolvere problemi che coinvolgono i fattori di scala;
- determinare una scala appropriata e utilizzare nelle applicazioni figure in scala o modelli;
- risolvere semplici problemi che coinvolgono tassi di variazione e misure derivate (p.e. miglia all'ora).

Discussione

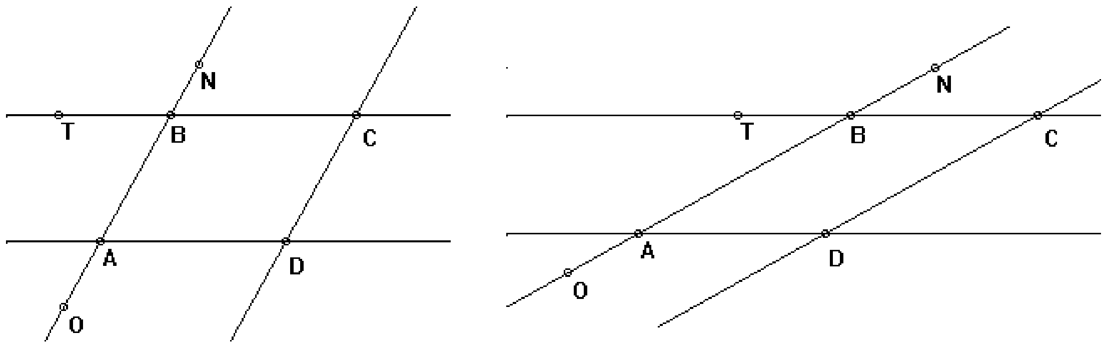
- **Grandezze, unità e sistemi di misura**

Gli studenti dei livelli intermedi possono utilizzare la loro precedente esperienza nella scuola elementare per misurare grandezze come l'angolo, la lunghezza, l'area e il volume, per utilizzare unità di misura e sistemi di misura. Quando arrivano alla scuola intermedia, gli studenti dovrebbero essere già abituati a lavorare con le unità di misura inglesi (p.e. le miglia e i quarti di gallone) le unità metriche (p.e. chilometri e litri). Inoltre gli studenti dovrebbero essere abituati a effettuare semplici conversioni all'interno di questi sistemi, come ad esempio 1.000 mm = 100 cm = 10 dm = 1 m e 36 pollici = 3 piedi = 1 yarda. Nella scuola media, dovrebbero acquisire la capacità di rappresentare le misure in differenti unità all'interno di un dato sistema, ed effettuare una stima delle misure (p.e. 100 yarde è la lunghezza di un campo di calcio, un metro è approssimativamente l'altezza di una maniglia di una porta, 30°C potrebbe essere la temperatura di una calda giornata d'estate). Quando si chiede loro di valutare l'altezza della porta della classe o la capacità di una brocca, gli studenti dovrebbero essere in grado di suggerire delle misure ragionevoli. Anche se non c'è alcun bisogno che gli studenti imparino a memoria i fattori di conversione tra le misure in unità metriche e quelle in unità comuni, dovrebbero conoscere alcuni valori di riferimento tra i due sistemi, come il fatto che un quarto (di gallone) è poco meno di un litro, una yarda è poco meno di un metro e così via.

- **Tecniche, strumenti e formule per la misura**

Gli studenti dei livelli 6-8 dovrebbero diventare esperti nella misura degli angoli e nella comprensione di un gran numero di relazioni angolari. Gli angoli sono una componente essenziale di molti argomenti presenti nel curricolo di matematica. Gli studenti utilizzano gli angoli per descrivere e classificare semplici figure come quadrilateri e triangoli, e anche per determinare le relazioni esistenti in poligoni più complessi e in figure tridimensionali. Per tracciare e interpretare grafici che coinvolgono le circonferenze è necessaria una solida conoscenza della misura degli angoli. Gli studenti dei livelli intermedi imparano a lavorare con un certo numero di angoli di riferimento che comprende angoli retti, angoli piatti e altri angoli utili quando si lavora coi triangoli (p.e. 30°, 45°, 60°). Dovrebbero essere in grado di effettuare delle stime ragionevoli della misura di un qualsiasi angolo di ampiezza compresa tra 0° e 180°. Gli studenti dovrebbero imparare a conoscere le relazioni esistenti fra gli angoli formati da rette incidenti, in particolare tra rette parallele e perpendicolari, e a utilizzare le relazioni tra gli angoli così formati per risolvere problemi.

Gli studenti possono studiare le relazioni tra gli angoli (per esempio, opposti al vertice, alterni interni, alterni esterni, corrispondenti, supplementari, complementari) nelle due versioni del parallelogramma ABCD (Figura 6.4). Utilizzando un software dinamico per la geometria o la carta da disegno e il goniometro, gli studenti possono misurare gli angoli e fare delle congetture sulle relazioni tra loro. Gli studenti possono studiare le regolarità di comportamento nella misura degli angoli attraverso domande come le seguenti: nei due parallelogrammi ABCD, quale coppia di angoli è formata da angoli supplementari? quale relazione tra gli angoli continua a valere? Quali affermazioni generali si possono fare sugli angoli di un parallelogramma?



m∠CBA=119,98°	m∠NBC=60,02°	m∠CBA=150,95°	m∠NBC=29,05°
m∠BCD=60,02°	m∠NBT=119,98°	m∠BCD=29,05°	m∠NBT=150,95°
m∠ADC=119,98°	m∠TBA=60,02°	m∠ADC=150,95°	m∠TBA=29,05°
m∠DAB=60,02°	m∠NBC=60,02°	m∠DAB=29,05°	m∠NBC=29,05°

Figura 6.4. Due possibilità per il parallelogramma ABCD

Un altro obiettivo per gli studenti dei livelli 6-8 è quello di essere in grado di determinare con facilità perimetro, area e volume di molte figure e di sapere utilizzare questa loro abilità nella risoluzione di problemi. Gli studenti della scuola media imparano a formalizzare le tecniche acquisite nei primi livelli scolari per determinare le aree dei rettangoli e dei triangoli. Deducono e utilizzano le formule relative ai parallelogrammi, ai trapezi, agli altri poligoni, alle circonferenze e ad altre figure complesse legate alle precedenti. Nell'esempio in Figura 6.5, gli studenti devono applicare le loro conoscenze relative all'area dei triangoli e dei rettangoli per determinare l'area di diversi trapezi.

Gli studenti di una classe di matematica del settimo livello stanno lavorando a progettare e a costruire un modello in scala di una casa con un costo compreso in un prefissato intervallo. I tre studenti che lavorano sul tetto hanno bisogno di determinare l'area totale del tetto prima di poter valutare il costo delle assicelle di copertura. Questo è il punto in cui incontrano difficoltà. Il tetto è costituito da due coppie di trapezi isosceli congruenti e da un rettangolo, e non hanno la più pallida idea di come determinare l'area di un trapezio.

Gli studenti suggeriscono diversi metodi per determinare l'area utilizzando la loro precedente conoscenza riguardante le aree di figure collegate ai trapezi (Figura 6.5). Uno studente suggerisce di utilizzare una carta quadrettata per ricoprire la figura e poi contare i quadretti, un altro vuole decomporre il trapezio in due triangoli e un rettangolo, per poi utilizzare le formule conosciute per determinare l'area. Il terzo studente decide di trasformare il trapezio isoscele in un rettangolo togliendo un triangolo da una parte e aggiungendolo dall'altra. In ogni caso, gli studenti trovano approssimativamente la stessa area per il trapezio e utilizzano questa informazione per valutare il costo delle assicelle di copertura.

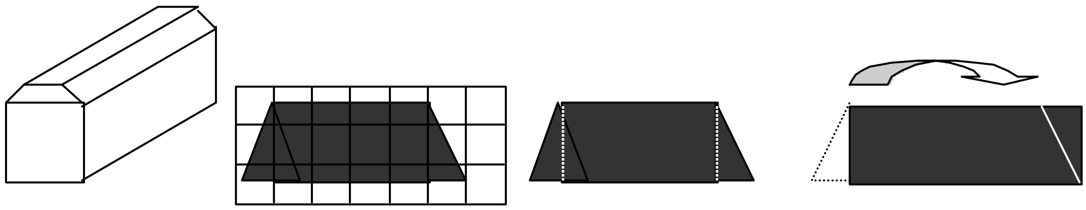


Figura 6.5. Determinazione dell'area di un trapezio.

La discussione degli studenti sui tre metodi utilizzati in questo problema, può aiutarli nella deduzione di una formula generale per l'area di un trapezio. In futuro, alcuni studenti potranno ricordare tale formula quando ne avranno bisogno per determinare l'area di un trapezio e altri potranno facilmente riprodurre uno dei metodi utilizzati in questo progetto.

Analogamente, sapendo come determinare l'area di un cerchio e l'area di un rettangolo, gli studenti possono dedurre una formula per l'area della superficie di un cilindro. Mediante la costruzione di modelli e la ricerca di relazioni e proprietà invarianti, gli studenti della scuola media possono ricavare e utilizzare le formule relative all'area della superficie di prismi, piramidi, cilindri e particolari coni e anche quelle relative al volume di prismi e cilindri retti.

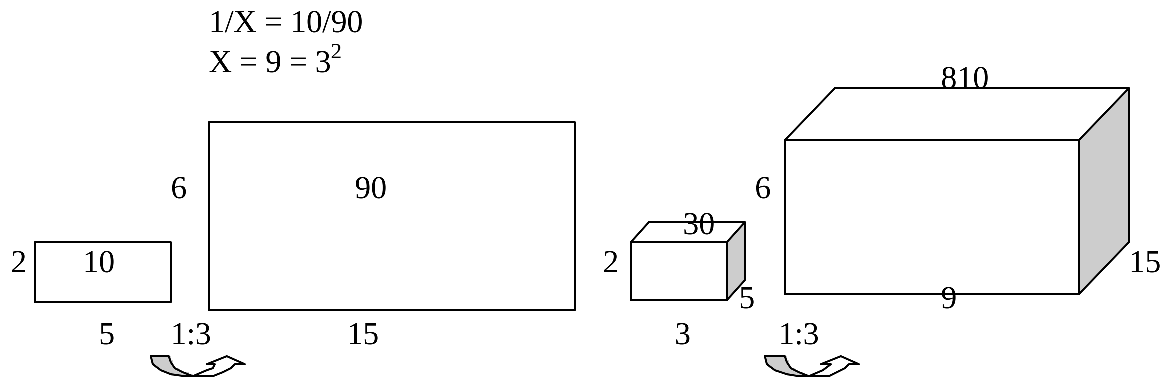


Figura 6.6. Fattori di scala per l'area e il volume di figure simili

Un altro aspetto importante dei livelli intermedi consiste nel far studiare e generalizzare da parte degli allievi le relazioni tra lunghezza, area e volume di figure simili bi- e tridimensionali. In questo processo di apprendimento risultano importanti strumenti come i rapporti e le proporzioni. È opportuno che gli studenti facciano numerose esperienze disegnando figure simili o modelli in scala, misurando le grandezze e utilizzando le proporzioni per confrontare misure. Per esempio, nella figura 6.6 gli studenti costruiscono un rettangolo 2×5 e poi utilizzano un rapporto di 1:3 per costruire un rettangolo simile di dimensioni 6×15. Gli studenti scoprono che il rapporto tra le aree dei rettangoli è 1:9 cioè $1:3^2$. Possono anche costruire prismi simili e scoprire che il rapporto tra i volumi è 1:27, cioè $1:3^3$. Gli studenti possono esaminare altri rettangoli e altri prismi simili con differenti fattori di scala per stabilire se le relazioni trovate valgono in altri casi. Possono chiedersi perché queste relazioni sono ragionevoli e infine generalizzarle: figure le cui misure lineari stanno in un rapporto di $1:a$, avranno aree con un rapporto di $1:a^2$ e volumi con un rapporto di $1:a^3$.

Il problema dei “cerchi in un quadrato” (Figura 6.7) è un altro compito interessante, che può impegnare gli studenti a riconsiderare le relazioni tra similitudine e proporzionalità. Per rendersi conto dell’equivalenza delle aree delle parti scure di ogni quadrato in ognuna delle tre rappresentazioni indicate con A, B, e C in Figura 6.7, gli studenti potrebbero calcolare le aree necessarie ad ottenere (64 − 16) unità quadrate in ogni figura. Il calcolo per le figure B e C si può fare in più di un modo, e gli studenti potrebbero fare delle verifiche per essere certi di ottenere in ogni caso la stessa risposta. Ma è anche possibile risolvere il problema senza calcoli numerici se gli studenti riconoscono che i cerchi sono figure simili e sono abituati a fare generalizzazioni del tipo esaminato nel precedente esempio. Dato che il quadrato nella Figura B è diviso in quattro cerchi, ognuno dei quali è simile al cerchio nella Figura A, ma con metà del raggio, l’area totale dei quattro cerchi deve coincidere con l’area del cerchio A. Un ragionamento analogo si può applicare nel caso della figura C alla somma delle aree dei 16 cerchi (ognuno con un raggio pari a 1/4 di quello del cerchio in A). Questa soluzione utilizza implicitamente la formula per l’area di un cerchio in quanto sfrutta il fatto che il raggio del cerchio viene elevato al quadrato per ottenere l’area. Un altro modo ancora per arrivare alla soluzione utilizza un ragionamento proporzionale; si immagini ognuno dei cerchi nelle figure B e C inscritto nel quadrato più piccolo come nella Figura A. Poiché il fattore di scala del lato del quadrato è 1/2 nella figura B e 1/4 nella figura C, allora il fattore di scala per le aree sarà 1/4 e 1/16, rispettivamente, e di nuovo si ottiene l’equivalenza delle aree totali.

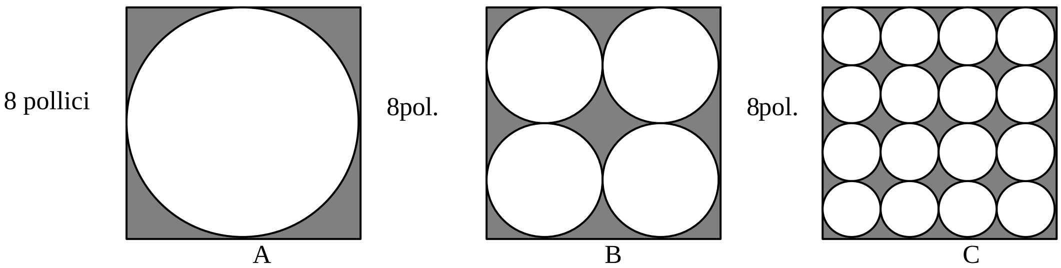


Figura 6.7. Cerchi in un quadrato

Gli studenti diventano più esperti nella scelta di unità di misura appropriate sulla base della precisione degli strumenti, dell’errore assoluto e relativo degli strumenti e del contesto della situazione in esame. Ad esempio, se gli studenti stanno misurando la lunghezza della loro classe in metri, dovrebbero rendersi conto che un errore di alcuni metri non è accettabile in quanto alcuni metri rappresentano un’alta percentuale della lunghezza totale della stanza. Invece, se la lunghezza fosse misurata in centimetri, un errore di alcuni centimetri sarebbe accettabile. Analogamente, quando gli studenti trovano che la lunghezza di un libro, al quarto di pollice più vicino, è 12 pollici e 1/4, dovrebbero rendersi conto che la misura potrebbe essere errata di 1/8 di pollice. L’errore assoluto della misura è ±1/8 di pollice. Dovrebbero anche capire che una misura sarà precisa a meno della metà dell’unità utilizzata nella misura stessa.

Infine, gli studenti delle scuole medie esaminano diverse situazioni che coinvolgono misure derivate (tipicamente i tassi di crescita si trovano dividendo una misura per un’altra). Ad esempio, se gli studenti conoscono la distanza (in chilometri) percorsa in un dato tempo (in ore), possono calcolare la velocità in chilometri all’ora. Oppure possono calcolare il loro battito cardiaco (battiti al minuto) o il prezzo unitario delle merendine che vengono distribuite in confezioni da dodici (dollari per singola confezione). La nozione di tasso unitario di crescita diventa uno strumento molto utile per calcolare e confrontare delle misure derivate.

Standard 5: Analisi dei dati, statistica e probabilità

I programmi di matematica devono porre attenzione all'analisi dei dati, alla statistica e alla probabilità in modo che tutti gli studenti:

- si pongano domande e vi rispondano raccogliendo, organizzando e rappresentando dati;
- interpretino dati usando metodi analitici;
- sviluppino e valutino deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati;
- capiscano e applichino nozioni di base su caso e probabilità.

Elaborazione: livelli 6-8

Lo studio dell'analisi dei dati e della statistica nei livelli intermedi fornisce l'opportunità a tutti gli studenti sia di usare quanto hanno imparato altrove nei loro studi di matematica, sia di imparare idee nuove. Allo stesso modo lo studio della probabilità permette a tutti gli studenti di crearsi una conoscenza su rapporto e proporzionalità e di sviluppare nuove conoscenze di concetti e procedure associate al caso.

Nei livelli intermedi, gli studenti devono impegnarsi e applicare l'intero procedimento di analisi dei dati: porre domande, raccogliere dati, organizzarli, analizzarli, interpretarli e rispondere alle domande. L'analisi dei dati nei livelli intermedi fornisce un ricco contesto per gli studenti per porre e risolvere problemi, impegnandosi in misure, calcoli e stime, e migliorare l'esperienza con rappresentazioni grafiche diverse. Di solito i numeri contenuti nelle applicazioni sono tali che gli studenti riescono a cogliere le quantità numeriche e le relazioni tra di loro. Tali esperienze aiutano gli studenti a diventare fruitori più riflessivi della matematica.

Il lavoro degli studenti con l'analisi e la statistica dei dati nei livelli 6-8 accresce e integra la loro conoscenza di rapporti, frazioni, decimali, percentuali, grafici e misure. Allo stesso tempo, gli studenti sviluppano o estendono le loro conoscenze di concetti che sono al centro dello studio della statistica, come la distribuzione dei dati, la tendenza centrale e la variazione. Nei livelli intermedi, gli studenti estendono il proprio lavoro ai dati dei livelli inferiori, analizzando insiemi di dati più complessi, rispondendo a domande più difficili e studiando associazioni tra variabili. Nuovi tipi di rappresentazioni sono aggiunti al repertorio degli studenti al fine di permettere considerazioni più complesse sulla distribuzione dei dati. L'analisi dei grafici a dispersione per le variabili relative, permette agli studenti di sviluppare approssimazioni lineari per i diagrammi, come parte della loro considerazione della linearità nei livelli intermedi.

Il lavoro degli studenti con i dati può essere collegato al loro studio della probabilità, sia con la determinazione delle probabilità sperimentali, sia con l'utilizzo dell'interferenza probabilistica degli esempi casuali.

Punti nodali per i livelli 6-8

- **Porsi domande e rispondervi raccogliendo, organizzando e rappresentando dati**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- progettare esperimenti e indagini, considerando potenziali fonti di pregiudizio nei momenti di progettazione e raccolta dati;
- riconoscere tipi di dati (per esempio, per categorie, per conteggi, continuo o di misurazione), e organizzare raccolte di dati;
- scegliere, creare e utilizzare grafici appropriati ed efficaci che rappreseno dati (grafici con linee, a barre, a bandiera, a istogrammi, a dispersione, circolari).

- **Interpretare dati usando metodi analitici**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- trovare, descrivere e interpretare media, mediana, e moda come misure del centro di un gruppo di dati; conoscere quali misure è meglio usare in determinate situazioni; capire come ciascuna rappresenta o non rappresenta i dati;
- descrivere e interpretare la dispersione di un insieme di dati usando strumenti come la gamma dei valori e l'interquartile;
- interpretare rappresentazioni grafiche di dati, comprese descrizioni e discussioni sui significati delle forme e delle fattezze del grafico, come simmetrie, asimmetrie e valori anomali;
- analizzare associazioni tra variabili confrontando centri, dispersione e rappresentazioni grafiche di gruppi di dati legati fra loro;
- esaminare e interpretare le relazioni tra due variabili usando strumenti come grafici a dispersione e linee approssimate adattate al meglio.

- **Sviluppare e valutare deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- sviluppare conclusioni riguardanti una caratteristica nella popolazione a partire da un campione ben costruito;
- attraverso simulazioni, sviluppare la capacità di distinguere differenze nei dati derivanti da reali differenze tra le popolazioni da cui i dati sono stati tratti, da quelle derivanti da variazioni naturali nei campioni;
- utilizzare i dati per rispondere alle domande che sono state poste, capire i limiti delle relative risposte e formulare nuove domande che derivino dai dati.

- **Capire e applicare nozioni di base su caso e probabilità**

Nei livelli 6-8, tutti gli studenti dovrebbero:

- dare giudizi riguardanti le probabilità di eventi incerti o essere capaci di connettere quei giudizi a percentuali o proporzioni;
- capire cosa significa per gli eventi essere "ugualmente probabili", e per un gioco o per un procedimento essere "equo";
- calcolare semplici probabilità usando metodi appropriati, come liste, diagrammi ad albero o aerogrammi;
- identificare eventi complementari, mutuamente esclusivi, indipendenti e dipendenti e capire come queste relazioni influenzano la determinazione delle probabilità.

Discussione

- **Produzione, organizzazione e rappresentazione dei dati**

A volte gli studenti dei livelli intermedi trovano interessante fare domande e raccogliere dati riguardanti il gruppo dei loro compagni. A volte, per esempio, gli studenti in questi livelli raccolgono dati sui loro interessi personali (preferenze in fatto di cibo, sport, musica). Tale raccolta di dati può fornire un'occasione per prendere in considerazione l'utilizzo di un giusto tipo e di un giusto uso di indagini.

Opportunità di lavorare con i dati e di riflettere sul tipo e sull'attenzione della loro raccolta sono a volte associate ad attività interdisciplinari, come gli esperimenti scientifici. Per esempio nei corsi scientifici gli studenti possono studiare le relazioni fra l'assorbimento di luce e il colore, progettando un esperimento nel quale essi misurano indirettamente il calore generato quando la luce viene assorbita attraverso la raccolta e l'esame dei dati riguardanti il tempo di fusione del ghiaccio quando questo è posto sotto la luce, appoggiato su materiali di colori diversi (p.e. bianco, grigio, nero). Gli studenti possono porre domande come questa: "come possiamo essere sicuri di utilizzare sempre lo stesso quantitativo di ghiaccio?", "qual è il modo più accurato per misurare il tempo di fusione?", "quale temperatura deve esserci durante il tempo di fusione?", "dà dei problemi la presenza di un'altra luce opposta a quella della lampada?", "quante volte dobbiamo ripetere l'esperimento per ottenere un'accurata misurazione?". Da queste esperienze i ragazzi vedranno entrambe le posizioni, sia le difficoltà sia le possibilità inerenti ai dati raccolti.

Una volta che i dati vengono raccolti, questi devono essere rappresentati o mostrati in qualche modo. Ciò dà agli studenti l'opportunità di considerare l'efficacia e i punti deboli delle diverse forme di rappresentazione dei dati. Si supponga, per esempio, che stiano lavorando per decidere quale tra due marche di pizze surgelate metta più fette di peperoni sulle proprie pizze "supreme". Gli studenti decidono di raccogliere i dati sul numero di fette presenti nei prodotti-campione di ogni marca di pizza, e per farlo visitano attentamente i supermarket ed esaminano i campioni presenti nella sezione cibi surgelati. Qui c'è l'insieme dei dati raccolti dagli studenti:

Marca n°1: 4, 2, 3, 3, 1, 5, 2, 5, 5, 7, 10, 2, 8, 13, 1, 5, 5, 12, 7, 9, 4, 13, 2, 4, 3.
Marca n°2: 3, 8, 10, 6, 4, 11, 9, 8, 5, 9, 7, 10, 3, 10, 7, 5, 9, 8, 7, 5, 6, 4, 7, 8, 8.

Dopo che i dati sono stati organizzati e mostrati in questo modo, gli studenti discutono dei loro risultati e capiscono che sarà difficile rispondere alla domanda principale fino a che non troveranno una buona rappresentazione per i dati. La loro insegnante osserva che dovranno realizzare differenti rappresentazioni grafiche di questi dati per vedere quale può essere più utile. Dice a un gruppo di rappresentare i dati sulla pizza usando un grafico a barre, a un altro di usare un istogramma, a un terzo di utilizzare un nuovo tipo di rappresentazione. Il risultato del loro lavoro è mostrato in Figura 6.8. Nella successiva discussione riguardante queste forme di rappresentazione, i ragazzi vedono che il grafico a barre sottolinea la distribuzione e la variazione nei vari campioni di ogni marca, l'istogramma fornisce la media di ogni marca e quello nuovo dà sia la media sia la variazione della distribuzione delle fette di peperoni nelle due marche di pizza. Attraverso profonde riflessioni sulle esperienze che richiedono la raccolta, l'organizzazione e la rappresentazione dei dati, gli studenti possono capire che diverse rappresentazioni richiedono diverse concettualizzazioni dell'insieme dei dati e producono diverse informazioni. Così diverse rappresentazioni sono consigliate nel caso in cui si abbiano diverse proposte.

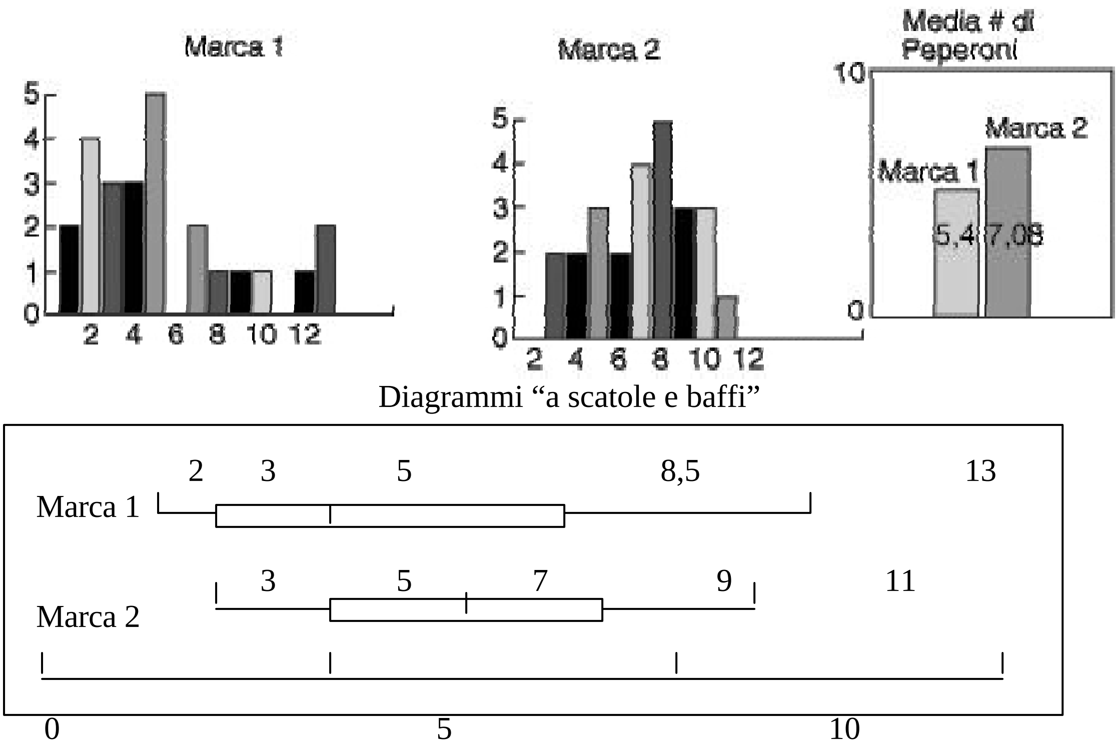


Figura 6.8. Confronto tra due tipi di pizza ai peperoni

I dati dei quotidiani, delle riviste, delle brochure e di Internet sono direttamente utilizzabili e possono agevolmente essere introdotti in classe per l'analisi e la discussione. Quando si considerano altri dati, la discussione può prendere in considerazione il perché l'autore abbia scelto una particolare rappresentazione e una particolare scala e come questa scelta esalti il punto di vista che l'autore voleva considerare. Gli studenti devono comprendere che la rappresentazione dei dati è un mezzo di comunicazione e deve essere scelta sulla base di alcune considerazioni. Se possibile, gli studenti devono considerare come i dati sono stati raccolti, quanto siano state accurate le misurazioni effettuate nel momento della classificazione dei dati e quanto i dati ne potrebbero essere stati influenzati.

- **Descrizione, analisi ed interpretazione dei dati**

Una parte importante di ogni processo statistico è descrivere la forma, il campo di variazione e le misure del centro di un insieme di dati. All'inizio dei livelli intermedi gli studenti ampliano le loro conoscenze relative alla misura del centro fino a comprendere che cosa rappresenti la media e che cosa ci dice sull'insieme dei dati. Iniziano a intendere la media come un numero che "livella" o "bilancia" una distribuzione. Gli studenti hanno già avuto esperienze in cui si chiedeva loro di considerare le proprietà della media e della mediana, in particolare l'influenza dei valori estremi in ogni processo di misurazione. La discussione dovrebbe riguardare quale misura del centro debba considerarsi "la migliore" rappresentazione di un particolare insieme di dati e perché.

Nel caso dei dati sulle pizze, se gli studenti dispongono di dati su più di due varietà di pizza, alcuni potrebbero considerare come migliore quella pizza con il numero medio di peperoni più elevato. Altri potrebbero argomentare che la migliore sia quella con la mediana più elevata, perché si vuole trovare quella con un ammontare maggiore o uguale a quello che divide in due l'insieme. Altri infine potrebbero sostenere che la migliore sia quella con la moda più alta, poiché rappresenta il numero di peperoni più probabile in una pizza. La moda, in questo caso, non tiene conto dell'intero insieme di dati e quindi è una misura inadeguata del centro. La media e la mediana sono una scelta migliore perché prendono in considerazione tutti i dati dell'insieme.

Gli studenti dei livelli intermedi hanno bisogno di sviluppare l'abitudine a considerare i dati in profondità. Con ulteriori esperienze, accrescono le loro abilità nel descrivere i dati e a effettuare collegamenti tra la forma e l'insieme dei dati. Gli studenti discutono sulla simmetria o sull'asimmetria. Individuano il campo di variazione, ma guardano anche al divario interquartile e vedono di calcolare se qualche punto è un dato anomalo. Con situazioni più complesse, cercando relazioni nella distribuzione dei dati, si potrebbe indirizzare gli studenti a trovare associazioni tra le variabili. Con problemi che coinvolgano misurazioni accoppiate, come l'altezza dalla quale una palla è lasciata cadere e l'altezza che raggiunge al suo primo rimbalzo, gli studenti possono apprendere le associazioni tra variabili. Questi dati possono essere rappresentati utilizzando i diagrammi a dispersione. Gli studenti possono trovare in modo informale le linee di migliore approssimazione, gettando le basi per uno studio più rigoroso nei livelli superiori. In questi casi, possono considerare cosa rappresenta per l'insieme dei dati la migliore approssimazione. Nello scoprire la correlazione tra misurazione accoppiate è importante che lo studente realizzi che la correlazione non implica necessariamente la causalità.

- **Inferenza e previsione**

Per fare previsioni e inferenze, gli studenti hanno bisogno di rappresentazioni grafiche e di statistiche per rispondere alle domande. Gli studenti dei livelli intermedi giungono a comprendere come i campioni diano informazioni sulle popolazioni. Gli studenti traggono informazioni da queste relazioni per dare significato ai dati, prendere decisioni o vedere possibili conseguenze. Discutono ed esperimentano modi diversi di selezionare i campioni. Da queste esperienze, arrivano a realizzare l'importanza dei campioni casuali. Gli studenti devono capire che la precisione della statistica inferenziale dipende dalla dimensione del campione.

Quando gli studenti affrontano il problema del campionamento e della progettazione di esperimenti cominciano a comprendere che campioni ben costruiti rendono possibili inferenze o consentono di trarre conclusioni con maggiore certezza sulla popolazione. Quando vengono poste domande del tipo "quante partite ai videogiochi vengono giocate in una settimana?" gli studenti devono considerare la popolazione, la dimensione del campione e ogni distorsione che può manifestarsi prima della raccolta dei dati. Quando si usano i dati per rispondere alle domande possono insorgere nuovi interrogativi. Queste nuove domande scaturiscono dalla scoperta dei limiti delle risposte. Per esempio possono essere formulate ulteriori domande come la seguente: "per quanto tempo gli studenti giocano con un particolare videogioco durante la settimana? quali tipi di videogiochi vengono utilizzati?".

I dati sono spesso usati per confrontare le popolazioni. Per comprendere che c'è una naturale variazione nei dati, gli studenti realizzano se i centri di due insiemi di dati sono relativamente vicini, e se ciò può derivare dal fatto che non c'è differenza sulle variabili osservate. Analogamente capiscono che anche di fronte a un modesto divario fra i centri può esserci una differenza apprezzabile della popolazione. Per esempio, se il numero medio di peperoni sulle pizze di due differenti marche è simile, ciò non è sufficiente per concludere che una marca sia migliore dell'altra. Nella comparazione dei dati gli studenti hanno bisogno di decidere se la differenza è sufficientemente ampia per trarre una conclusione. Questo prepara gli studenti ad affrontare lo studio del controllo statistico delle ipotesi. Le simulazioni possono aiutare gli studenti a intuire quanta variabilità si devono aspettare tra le medie dei campioni tratti dalla stessa popolazione, e quanto la dimensione del campione possa incidere su questa variabilità.

- **Probabilità**

Nei livelli 6-8 le esperienze degli studenti con i dati e la loro emergente comprensione dei concetti di frequenza e proporzione potrebbe essere integrata con lo studio della probabilità. Quando gli studenti analizzano i dati di un campione casuale, possono utilizzare le loro osservazioni per effettuare previsioni probabilistiche sulla popolazione. Nel calcolare le probabilità teoriche utilizzano ciò che hanno appreso sulla frequenza e sulla proporzione, per predire la configurazione probabile del carattere nella popolazione. Nei loro studi sulla probabilità teorica e sperimentale nei livelli intermedi dell'istruzione, gli studenti imparano a utilizzare il concetto di frequenza relativa per determinare semplici probabilità. Inoltre, per il calcolo delle probabilità gli studenti hanno bisogno di un tempo considerevole e di esperienza per costruire fondamenta solide per il loro lavoro nel campo delle probabilità. Per esempio, hanno bisogno di comprendere nozioni come *egualmente probabile*, *equità*, *casualità* e *relazione* tra eventi, così come eventi indipendenti e dipendenti, eventi complementari o mutuamente esclusivi. Queste esperienze preparano gli studenti per gli studi più avanzati nel campo della statistica e della probabilità durante gli anni della scuola superiore (Bulling e Romberg 1988).

Sebbene il calcolo delle probabilità possa essere visto come un semplice esercizio di operazioni con le frazioni, ci sono profonde istanze concettuali con le quali gli studenti devono entrare in contatto per comprendere la probabilità. Infatti, in quest'area della matematica albergano fraintendimenti più frequentemente tra gli adulti che fra gli studenti (Konold 1998). Per esempio molti incontrano difficoltà nel comprendere la differenza tra esiti deterministici e probabilistici (Konold 1989). Ciò accade perché alcuni studenti percepiscono il loro esito individuale su un esperimento, non come uno fra i tanti possibili ma *come l'unico* dell'esperimento. Gli studenti che pensano in questo modo hanno grosse difficoltà a dare un significato ai calcoli teorici di probabilità, che si riferiscono a spazi campionari equiprobabili. Questo è uno dei tanti ostacoli concettuali che insegnanti e studenti è probabile che incontrino nel loro studio della probabilità (Bright e Hoeffner 1993). Per questa ragione è importante per gli studenti avere un'ampia esperienza con le attività nelle quali si imbattano nell'incertezza e avere frequenti opportunità di confrontare l'approccio probabilistico con gli altri (Shaughnessy e Bergaman 1991). Le simulazioni con il computer (o quelle effettuate direttamente) possono quindi aiutare gli studenti a sviluppare intuizioni e confrontare fraintendimenti.

Standard 6: Problem Solving

I programmi di matematica devono concentrarsi sul problem solving come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- costruiscano nuove conoscenze matematiche attraverso il loro lavoro con i problemi;
- sviluppino l'attitudine a formulare, rappresentare, astrarre e generalizzare in situazioni all'interno e all'esterno della matematica;
- applichino un'ampia varietà di strategie per risolvere problemi e le adattino a nuove situazioni;
- controllino e riflettano sul loro pensiero matematico nella risoluzione dei problemi.

Elaborazione: livelli 6-8

Il problem solving è il procedimento attraverso il quale gli studenti mettono alla prova la potenza e l'utilità della matematica nei confronti del mondo che li circonda. Il nostro scopo è quello di aiutare gli studenti a diventare risolutori flessibili, autonomi ed efficienti. Ci sono quattro aspetti fondamentali del multiforme processo del problem solving. Innanzi tutto occorre un atteggiamento e una disposizione mentale positiva nei confronti del problem solving. I risolutori efficienti di problemi sono curiosi delle situazioni prospettate dal problema e sono interessati a esplorarle, rappresentandole matematicamente, facendo congetture ed esaminando la ragionevolezza di queste ipotesi. Il secondo aspetto fondamentale del processo di problem solving è la conoscenza. Agli studenti che vogliono risolvere problemi stimolanti si richiede una conoscenza dei contenuti e una capacità di utilizzare tale conoscenza in situazioni diverse. L'atto del problem solving può anche aiutare gli studenti a esaminare nuovi concetti e a estendere le loro conoscenze di concetti precedentemente appresi. Le strategie rappresentano il terzo aspetto fondamentale del processo di problem solving. I risolutori allenati di problemi sono in grado di accedere a una collezione diversificata di strategie generali ed efficaci che permette loro di affrontare situazioni problematiche fuori dal comune. Gli studenti possono trarre beneficio sia da un insegnamento mirato che da diverse esperienze legate alle strategie. L'ultimo aspetto fondamentale del processo di problem solving è prendere nota di quanto si è fatto. È importante che gli studenti siano consci sia delle loro capacità che dei loro limiti, riflettano sulle loro intuizioni quando risolvono problemi, pianifichino spesso e in modo efficiente il loro lavoro e si impegnino in una continua auto-valutazione.

- **Quali caratteristiche assume il problem solving nei livelli 6-8?**

Il problem solving nei livelli 6-8 dovrebbe essere un veicolo per l'apprendimento della matematica. Gli studenti possono apprendere dei concetti matematici lavorando su situazioni problematiche che trattano aspetti importanti di questi concetti (Schroeder e Lester 1989). Consideriamo il seguente problema: determinare tutte le possibili forme geometriche aventi un'area di 14 unità quadrate e un perimetro di 24 unità, se ogni forma è costituita da quadrati unitari in cui almeno un lato è completamente condiviso con un altro quadrato. Si suppone che gli studenti a cui viene assegnato questo problema siano già a conoscenza dei concetti di area e di perimetro di forme rettangolari. Un approccio ragionevole al problema è quello di cominciare a sperimentare con alcune forme utilizzando una carta quadrettata o 14 quadrati ritagliati, in modo da poterli spostare manualmente. È subito chiaro che una sperimentazione a caso ha scarsa probabilità di produrre una soluzione completa. Gli studenti dovrebbero rendersi conto di aver bisogno di un procedimento sistematico in grado di prendere nota delle forme già sperimentate in modo da ottenere tutte le possibili soluzioni. Essi devono decidere ciò che rende una forma "differente" da un'altra in modo da evitare doppioni. Due forme sono differenti se una è il ribaltamento dell'altra? Come possono gli studenti individuare delle strategie per creare nuove forme dalle vecchie che conservino certe caratteristiche, come l'area e il perimetro? Abilità di questo tipo risultano importanti in un'ampia varietà di situazioni problematiche. Inoltre, lavorare su problemi di questo tipo rafforza anche la comprensione da parte degli studenti dei concetti di area e di perimetro e li aiuta a rendersi conto che non esiste alcune semplice relazione tra queste due misure. La conoscenza dell'area di una figura non determina il perimetro. Indirettamente questo problema coinvolge anche la conoscenza da parte degli studenti della congruenza e delle trasformazioni che conservano la distanza.

A partire dalla scuola media, il contesto in cui risolvere problemi dovrebbe cominciare a diversificarsi. Sempre più spesso i problemi dovrebbero prendere spunto da situazioni tratte dal mondo che ci circonda o dallo studio di concetti matematici. L'insegnamento della matematica nei livelli 6-8 dovrebbe trarre vantaggio dalle accresciute conoscenze matematiche degli studenti della scuola media in modo da includere situazioni problematiche più complesse che integrino argomenti come la probabilità, la statistica, la geometria e i numeri razionali. Le situazioni e i modi di affrontarle dovrebbero contribuire a costruire ed estendere le conoscenze matematiche, le abilità e il linguaggio che gli studenti stanno via via acquisendo. Inoltre, i problemi dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare un'ampia gamma di strategie e di approcci al problem solving.

I problemi che trattano la proporzionalità, le frazioni e gli andamenti lineari risultano particolarmente adatti a rinforzare la conoscenza da parte degli studenti di questi importanti argomenti di scuola media. Consideriamo il seguente problema.

> Un contenitore trasparente viene sottoposto all'attenzione degli studenti. Il recipiente contiene un certo numero di palline rosse e verdi. Ha un coperchio che gli studenti non possono togliere. Il problema è quello di determinare in modo approssimato il numero di palline di ognuno dei due colori e di giustificare le loro approssimazioni. Gli studenti hanno a disposizione un duplicato vuoto del contenitore, un certo numero di palline e altri strumenti come un righello e dei fattori di scala. Dopo aver speso un certo tempo a riflettere sul problema, alcuni studenti possono rendersi conto che se pesano il contenitore con le palline, pesano il contenitore vuoto e pesano le singole palline, possono utilizzare questa informazione per ottenere una buona stima del numero totale di palline presenti nel contenitore. Poi possono contare il numero di palline rosse e verdi che sono visibili e utilizzare questo dato per effettuare una stima della proporzione di palline

> rosse e verdi presenti nel contenitore, il che permette poi agli studenti di valutare il totale di ognuno dei due tipi. Altri studenti possono procedere ulteriormente su questa strada, scuotendo il contenitore e contando di nuovo le palline visibili rosse e verdi. Ripetendo questo procedimento diverse volte, gli studenti possono generare una serie di dati che permette loro di fare una previsione migliore della proporzione di palline rosse e verdi.

Il precedente problema presenta diversi aspetti che dovrebbero trovare posto in molti problemi di scuola media. Richiede che gli studenti applichino delle abilità apprese in precedenza per approssimare il numero totale di palline. Combina diversi concetti matematici in differenti momenti dell'attività di problem solving. E richiede l'utilizzo delle proporzioni e delle frazioni, cioè di obiettivi fondamentali per l'apprendimento a questi livelli.

Gli studenti dei livelli intermedi possono affrontare problemi sempre più difficili e complessi, in quanto hanno a disposizione la tecnologia che allevia gran parte della complessità di calcolo, che – fino a tempi molto recenti – vincolava la matematica scolastica a prendere in considerazione solo problemi con "numeri belli". I computer, le calcolatrici e gli strumenti elettronici per la raccolta di dati, forniscono metodi per raccogliere e analizzare i dati che negli anni scorsi sarebbero stati considerati troppo complicati da trattare. Ad esempio, gli studenti potrebbero essere interessati alla valutazione della convenienza economica del riciclo delle lattine nella loro scuola o potrebbero valutare i dati relativi alle condizioni del tempo nelle differenti regioni. Le calcolatrici grafiche e alcuni software per computer di facile impiego permettono agli studenti di muoversi senza difficoltà tra differenti rappresentazioni del problema e di affrontare con relativa facilità calcoli che coinvolgono grandi quantità di dati e numeri piuttosto insoliti, sia grandi sia piccoli. Di conseguenza i problemi della scuola media possono e dovrebbero essere sempre più aderenti alle richieste e agli interessi degli studenti.

- **In che modo nei livelli 6-8 gli studenti diventano risolutori di problemi?**

Gli studenti dei livelli intermedi dovrebbero avere ampie opportunità di effettuare esperienze di problem solving sia in modo autonomo sia in collaborazione. Tante cose si possono imparare attraverso lo scambio di idee. Analogamente, gli studenti dei livelli intermedi possono impegnarsi con profitto in indagini approfondite, lavorando a volte per diversi giorni su un singolo problema e sulle sue ramificazioni.

Gli studenti di quest'età dovrebbero potenziare continuamente la capacità di spiegare ad altri le loro esperienze. Per potenziare le loro abilità di problem solving, gli studenti devono imparare a riflettere sul loro lavoro e a prender nota delle loro soluzioni. Sarebbe auspicabile che gli studenti sapessero spiegare intuizioni e soluzioni, non solo a parole, ma anche utilizzando simboli matematici convenzionali o altre rappresentazioni appropriate. In ogni caso, è importante che gli insegnanti si rendano conto che nessuna di queste capacità si sviluppa automaticamente solo perché gli studenti hanno raggiunto l'età della scuola media.

Ci sono quattro aspetti del procedimento di problem solving che risultano particolarmente utili per gli studenti di scuola media: comprendere il problema, predisporre un piano, mettere in pratica il piano e riesaminare il procedimento seguito (Pólya 1957). L'insegnante, attraverso osservazioni e domande, può aiutare gli studenti a rendersi conto di come e quando impegnarsi in ognuno di questi aspetti durante la risoluzione di problemi. Si tenga presente che questi aspetti non devono essere necessariamente esaminati in modo lineare. I solutori esperti di problemi si muovono ripetutamente avanti e indietro tra tutti e quattro questi aspetti quando affrontano un problema (Lambdin Kroll, e Miller 1993).

Anche se non è l'aspetto principale del problem solving nella scuola media, quando gli studenti apprendono le tecniche del problem solving cominciano a familiarizzarsi con una euristica che comprende la ricerca di regolarità, la risoluzione di un problema più semplice, la costruzione di una tabella e il ripercorrere a ritroso il lavoro fatto. Queste sono strategie generali che risultano utili quando non si conosce un metodo specifico per affrontare un problema. Molte di queste tecniche euristiche saranno già state ampiamente utilizzate a livello di scuola elementare, ma gli studenti di scuola media hanno bisogno di ulteriori conoscenze ed esperienze in cui possano imparare a utilizzare queste strategie in modo appropriato ed efficiente.

Gli studenti dovrebbero anche essere incoraggiati a prendere nota del proprio lavoro e a valutarlo man mano lungo tutto il processo di problem solving. I bravi risolutori di problemi si rendono conto di quello che sanno e di quello che non sanno, di ciò che sanno fare e di ciò che non sanno fare e di conseguenza, quando risolvono i problemi, possono utilizzare saggiamente il loro tempo e la loro energia. Sono in grado di predisporre un piano in modo più accurato ed efficiente, e si preoccupano di verificare periodicamente i loro progressi durante la risoluzione dei problemi. Queste abitudini mentali sono importanti non solo per far diventare gli studenti migliori risolutori di problemi, ma anche perché aiutano gli studenti ad apprendere meglio la matematica.

- **Come può il problem solving favorire la comprensione della matematica nei livelli 6-8?**

Ci sono diversi motivi per i quali gli studenti dovrebbero riflettere sulla loro strategia nel problem solving e considerare come potrebbe essere modificata, elaborata, resa più efficiente e più chiara. Attraverso una riflessione guidata, gli studenti possono concentrarsi sul tipo di matematica utilizzata nella risoluzione di un problema, col risultato di approfondire la comprensione dei concetti coinvolti. Possono imparare a generalizzare e a estendere i problemi, giungendo così a conoscere alcune delle strutture che stanno alla base della matematica. Gli studenti dovrebbero rendersi conto che il processo di problem solving non è completato fino a quando non hanno riesaminato tutta la loro strategia risolutiva.

Ad esempio, consideriamo il teorema di Pitagora. Geometricamente, esso ci dice che se costruiamo dei quadrati sui cateti e sull'ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo, allora le aree dei quadrati costruiti sui cateti sommate tra loro danno come risultato l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. Questo viene sintetizzato con la formula $a^2 + b^2 = c^2$. Se gli studenti hanno preso l'abitudine di riesaminare i problemi e di chiedersi "che cosa succede se?", potrebbero porre in modo del tutto naturale domande come le seguenti: "che cosa succederebbe se costruissimo figure diverse dai quadrati sui lati dei triangoli rettangoli?", "che cosa succederebbe se costruissimo dei triangoli equilateri?", "o dei triangoli rettangoli isosceli?", "o degli esagoni regolari?", "o dei semicerchi?", "le aree si sommeranno allo stesso modo?".

Esplorando con un software dinamico, gli studenti possono scoprire che le aree effettivamente si sommano allo stesso modo. Gli studenti che sono abituati a determinare le aree di cerchi e triangoli possono verificare direttamente queste relazioni per particolari semicerchi, o particolari triangoli rettangoli, come il triangolo 3 - 4 - 5, un triangolo rettangolo isoscele, o il triangolo 30°- 60°- 90°.

Gli studenti possono essere incoraggiati a fare delle congetture riguardanti ulteriori generalizzazioni e a cercare di verificare queste congetture. Ad esempio, possono ipotizzare che un'estensione del teorema di Pitagora valga per ogni poligono regolare (o, più in generale, per ogni figura simile) costruito sui lati di un triangolo rettangolo (Brown e Walter 1983). Gli studenti dovrebbero rendersi conto che non hanno effettivamente dimostrato le affermazioni più generali semplicemente osservando le regolarità e facendo delle congetture. Tuttavia, l'esplorazione di congetture e la formulazione di argomentazioni logiche informali aiuterà moltissimo gli studenti ad acquisire abitudini mentali che si dimostreranno poi dei potenti strumenti matematici (Moses, Bjork e Goldenberg 1990).

Quando riflettono sulle loro soluzioni, come in questa estensione del teorema di Pitagora, gli studenti utilizzano diverse abilità matematiche, sviluppano una comprensione più profonda della struttura della matematica e acquisiscono l'abitudine alla generalizzazione. L'insegnante gioca un ruolo importante nel garantire che la discussione in classe continui fino a quando siano stati considerati diversi percorsi risolutivi e tutti questi percorsi siano stati discussi, compresi, verificati e valutati. Per gli studenti dovrebbe diventare una specie di seconda natura parlare dei collegamenti fra i problemi; proporre, criticare e valutare gli approcci alternativi; ed essere espliciti nello spiegare come hanno registrato, verificato il loro lavoro e come potrebbero estendere le loro strategie per risolvere i problemi.

- **Qual è il ruolo dell'insegnante nello sviluppo della tecnica del problem solving nei livelli 6-8?**

Gran parte del ruolo dell'insegnante nell'apprendimento del problem-solving è già implicito nella precedente discussione. Tra i suggerimenti specifici rivolti agli insegnanti di scuola media possiamo includere il seguente: lasciate scegliere agli studenti alcuni dei problemi che essi dovranno tentare di risolvere; mettete alla prova gli studenti sia con problemi che hanno più di una risposta (o nessuna risposta) che con problemi con un'unica risposta o con dati superflui o insufficienti; stimolate i vostri studenti a proporre problemi interessanti e significativi e a creare modelli matematici da seguire nel porre i problemi; incoraggiate la comunicazione e la collaborazione tra gli studenti, prendete nota e cercate di apprezzare le loro ipotesi e le loro congetture. Ad esempio, chiamare un problema, una congettura o un metodo risolutivo col nome dello studente che l'ha inventato (per esempio, potete parlare del problema di Kim, della congettura di Rebecca o del metodo di Andrew) può risultare particolarmente gratificante per lo studente. Non siate troppo pressanti nei confronti del tempo d'esecuzione quando proponete agli studenti di risolvere problemi complessi. Alcuni problemi possono rimanere irrisolti per diversi giorni, fornendo in tal modo l'opportunità di mettere in evidenza alcuni aspetti di un'efficace strategia del problem solving, come la perseveranza, il tentare diversi approcci e affrontare di petto una sfida.

Un altro ruolo importante per l'insegnante è quello di incoraggiare un atteggiamento positivo nei confronti del problem solving. Una differenza molto importante tra coloro che sanno risolvere i problemi e quelli che non li sanno risolvere risiede nel loro atteggiamento e nelle loro convinzioni rispetto al problem solving, nel modo in cui si valutano come risolutori di problemi e nel modo in cui affrontano la risoluzione dei problemi. Molti studenti possiedono la convinzione erronea che tutti i problemi di matematica debbano essere risolti in modo rapido e diretto. Se, dopo aver esaminato un problema, non capiscono immediatamente come risolverlo, spesso questi studenti rinunciano. Si considerano quindi dei risolutori di problemi incapaci, con conseguenze negative destinate a durare nel tempo.

È importante che gli insegnanti aiutino gli studenti a imparare quello che devono fare quando affrontano problemi insoliti; questo è l'aspetto fondamentale del problem solving. Inoltre molti studenti sono convinti che esiste un solo modo "corretto" per risolvere un qualsiasi problema di matematica. Questi studenti non solo risultano totalmente dipendenti dall'insegnante o dalla risposta posta accanto all'esercizio per la verifica del loro successo, ma non riescono ad apprezzare la soddisfazione e l'eccitazione che deriva dal saper riconoscere e saper collegare differenti modi di risolvere un problema.

Standard 7: Ragionamento e dimostrazione

I programmi di matematica devono spingere a ragionare e costruire dimostrazioni come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano il ragionamento e la dimostrazione come parti essenziali e fortemente efficaci della matematica;
- formulino e indaghino congetture matematiche;
- sviluppino e valutino ragionamenti e dimostrazioni matematiche;
- scelgano e usino vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriati.

Elaborazione: livelli 6-8

Il ragionamento è parte integrante del fare matematica ed è connesso agli altri standard di processo. Per esempio, gli studenti ragionano quando risolvono problemi e molto di quello che imparano a comunicare è connesso al metodo e al risultato del loro ragionamento. Il ragionare è anche associato con tutti gli standard di contenuto. Per esempio, gli studenti usano ragionamenti matematici quando fanno generalizzazioni di schemi nello studio dell'algebra e quando usano grafici e altre forme di rappresentazione per risolvere problemi riguardanti dati. Inoltre, ragionare è intimamente legato all'insegnare a pensare con impegno e a un apprendimento consapevole. Quando il ragionare degli studenti è reso esplicito, sostiene la progressiva comprensione e dà conto della situazione di essa. Così, gli studenti nei livelli 6-8 dovrebbero avere numerose occasioni e opportunità di impegnarsi nel ragionamento matematico.

Quando arrivano al sesto livello, gli studenti hanno già avuto esperienze nel creare e valutare certe argomentazioni matematiche. Nei livelli medi miglioreranno le loro abilità di argomentazione matematica, includendo componenti più astratte e ipotetiche. Impareranno a cercare generalizzazioni e acquisiranno un repertorio più ampio di strumenti rappresentativi per sostenere le loro affermazioni e giustificazioni. Inoltre, dovrebbero sviluppare una più viva sensibilità verso chi li ascolta quando comunicano i loro ragionamenti formalmente o informalmente e dovrebbero sviluppare criteri più rigorosi per giudicare l'adeguatezza di argomentazioni matematiche. Gli studenti dei livelli medi acquisiscono esperienza con molte forme di ragionamento, compreso il ragionamento ricorsivo, induttivo, deduttivo e spaziale.

Anche il ragionamento proporzionale è di particolare importanza nei livelli medi. Sebbene l'argomentazione matematica nei livelli medi manchi del formalismo e della struttura assiomatica spesso associata alla dimostrazione, ha in comune con essa molte delle sue caratteristiche, compresa la formulazione di una ipotesi plausibile, la verifica di quell'ipotesi usando prove matematiche e l'esposizione del ragionamento per la valutazione degli altri.

- **Che aspetto hanno ragionamenti e dimostrazioni nei livelli 6-8?**

Nei livelli medi agli studenti dovrebbe essere chiesto frequentemente di spiegare relazioni che implicano concetti matematici. Spesso la ricerca di relazioni è perseguita attraverso lo studio di modelli. Quando cercano delle generalizzazioni, gli studenti possono considerare o generare un insieme di casi specifici, organizzarli e cercare delle regolarità. L'identificazione di regolarità sottostante modelli o sequenze è tipicamente basata sul ragionamento induttivo. Sulla base di osservazioni fatte su una parte del modello, possono essere fatte ipotesi e poi testate usando inferenze induttive o deduttive.

Si consideri il lavoro di un gruppo di studenti in una classe di sesto livello dove stavano indagando modelli sui numeri figurati (Malloy 1997). All'inizio si chiese loro di generare i primi cinque numeri nell'insieme dei numeri triangolari e lo fecero usando la struttura visiva dei numeri. Sapevano che i numeri triangolari potevano essere rappresentati con righe di punti in forma di triangoli equilateri. In progressione dal primo al quinto, aggiungevano una riga in fondo al triangolo con un punto in più rispetto all'ultima riga del triangolo precedente (vedere figura 6.9).

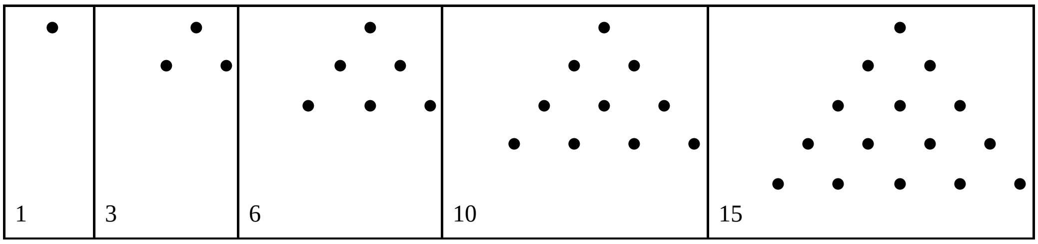


Figura 6.9. Primi cinque numeri triangolari

Successivamente l'insegnante chiese loro di prevedere (senza disegno) quanti punti erano necessari per il successivo numero triangolare. Riflettendo su cosa fare per generare la sequenza fino a quel punto, conclusero rapidamente che il sesto numero triangolare doveva avere sei punti in più del quinto numero triangolare. E potevano vedere che questo sembrava continuare sempre nella sequenza. Infatti, questo portò a una generalizzazione sui numeri triangolari: ogni numero triangolare è la somma di numeri consecutivi. Così, gli studenti si impegnarono nel ragionamento ricorsivo sulla struttura di questa sequenza di numeri, usando i numeri precedenti per generare il numero successivo. Quando l'insegnante chiese agli studenti di trovare il 100° termine nella successione sapevano che sarebbe stato 100 più il 99° termine. Ma non sapevano quello che doveva essere. Dato che non stavano usando un computer, non era il caso di fare l'elenco dei primi 99 termini, quindi avevano bisogno di un altro modo di pensare.

Per facilitare il loro compito, l'insegnante suggerì di fare una tabella per ricordare le loro osservazioni sui numeri triangolari e le differenze tra i numeri che avevano così individuato (vedere tabella 6.2). Dopo aver studiato la tabella per qualche minuto, Tamika commentò che c'era una relazione tra le differenze e i numeri. Spiegò che il 2° termine era metà del prodotto di 2 e 3, il 3° termine era metà del prodotto di 3 e 4, ecc. Per esempio, il terzo termine nella sequenza è 6, le differenze associate con 6 sono 3 e 4 e 1/2 del prodotto (12) è 6.

Termine	1°		2°		3°		4°		5°		6°
Numero	1		3		6		10		15		21
Differenza		2		3		4		5		6	

Tabella 6.2. Numeri triangolari

L'insegnante chiese al gruppo di verificare per vedere se questo metodo avrebbe funzionato per trovare il numero successivo. Tamika disse "Io penso che il 7° numero è (7)(8)/2". Usando la loro sequenza originale e lo schema ricorsivo segnato, gli studenti verificarono la sua congettura per il 7° termine e trovarono che era corretta. Allora l'insegnante chiese un'ipotesi riguardante il 100° numero triangolare. Un altro studente disse "Se Tamika ha ragione, il 100° numero dovrebbe essere (100)(101)/2". Gli studenti discussero il valore dell'approccio di Tamika, che permetteva di generare un numero della sequenza senza aver trovato tutti i precedenti. In generale, ammisero che questo metodo era utile, anche se alcuni non erano convinti che fosse corretto, perché non era intuitivo come il metodo ricorsivo che avevano usato all'inizio. A questo punto l'insegnante decise di spingere gli studenti a riflettere su come avrebbero verificato la regola generalizzata di Tamika per la sequenza - metà del prodotto di un termine e del termine successivo, oppure $n(n+1)/2$.

Per aiutare gli studenti a capire questa generalizzazione, aveva guardato un problema collegato più semplice. Chiese agli studenti di usare "il metodo del piccolo Gauss" per trovare che la somma dei primi dieci numeri interi. Cioè, chiese loro di addizionare coppie di numeri – 1+10, 2+9, 3+8, 4+7, 5+6 - da cui rapidamente dissero che la somma di ogni coppia è uguale a 11. Conclusero poi che la somma di cinque coppie è (10)(11)/2 oppure 110/2 oppure 55. Poi suggerì agli studenti di collegare questo problema col loro compito sui numeri triangolari. Dopo qualche minuto, Curtis osservò che il modello che avevano visto prima con i numeri triangolari significava che ognuno di questi numeri era la somma di numeri consecutivi. Spiegò che il quarto numero triangolare era 10 oppure 1+2+3+4 e che questo funzionava anche per tutti gli altri. Quindi, disse che 55 doveva essere il 10° numero triangolare, dato che era la somma dei primi dieci numeri. Dopo qualche discussione per essere sicura che tutti vedevano la connessione tra il modello ricorsivo originale, l'osservazione fatta da Curtis, il compito di addizionare i primi dieci numeri e la regola di Tamika, l'insegnante e gli studenti insieme misero i ritocchi finali alla valutazione della generalizzazione di Tamika.

Qual è il ruolo dell'insegnante nel sostenere ragionamenti e dimostrazioni in un'aula di matematica nei livelli 6-8?

Uno dei modi in cui gli insegnanti possono aiutare gli studenti dei livelli medi ad apprezzare e usare la potenza del ragionamento è presentare loro una varietà di problemi che richiedono ragionamento per indagare idee matematiche. Nell'esempio sotto, l'insegnante presenta agli studenti una situazione che richiede un approccio sistematico e che fornisce anche una preziosa lezione sulle generalizzazioni.

L’insegnante chiese agli studenti di determinare quanti segmenti di differenti (uniche) lunghezze potevano essere costruiti collegando chiodi sul loro geopiano 5x5. Gli studenti collegarono i chiodi con elastici per formare segmenti che avevano pensato di diverse lunghezze. I loro primi progetti erano simili a quello in figura 6.10.

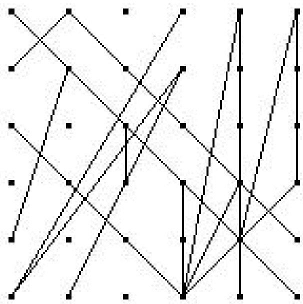


Figura 6.10. Segmenti disorganizzati su un geopiano

Poiché gli studenti avrebbero dovuto controllare i doppioni di segmenti e usare l’aumento del numero di segmenti per stabilire dei modelli, l’insegnante indicò agli studenti di fare sistemazioni più ordinate. Chiese “Vedete un modello nel numero di segmenti?” Quando guardarono ai loro geopiani commentarono “Non vedo nessun modello” oppure “Questo è giusto un mazzo di linee”. Il loro tabellone, troppo poco strutturato, causava loro confusione. L’insegnante chiese agli studenti se i segmenti potevano essere organizzati per aiutarli a identificare uno schema, se esisteva. Gli studenti non avevano idea di quali azioni compiere. Per aiutare gli studenti a ragionare sui segmenti in modo sistematico, l’insegnante chiese all’inizio di identificare i diversi segmenti che potevano essere connessi in un quadrato 1x1. Rapidamente identificarono due segmenti diversi (vedere figura 6.11(a)). Chiese “Come riconosci che sono di diversa lunghezza?” Gli studenti spiegarono che uno era il lato di un quadrato e l’altro era più lungo perché era la diagonale.

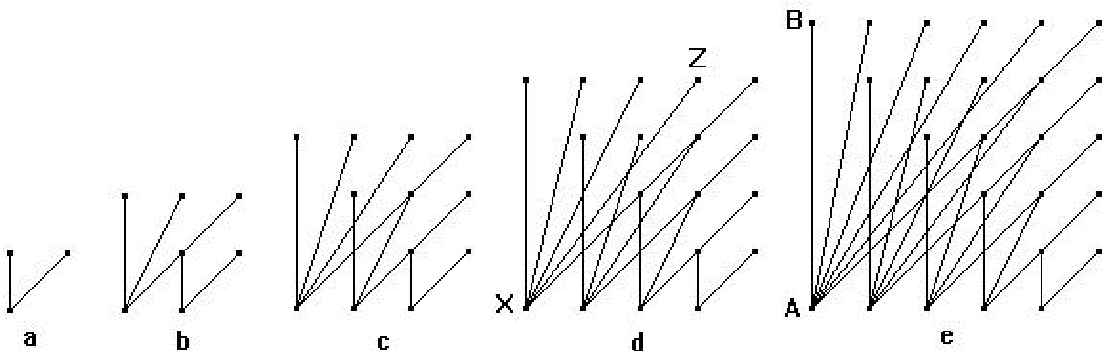


Figura 6.11. Modelli di segmenti su un geopiano

Poi chiese agli studenti di considerare segmenti su un quadrato 2x2. Dopo che avevano finito questo compito, chiese a uno studente di mostrare il suo metodo alla classe. Spiegò che prima aveva messo i due segmenti del quadrato 1x1 sulla sua tavola e poi aveva aggiunto i nuovi segmenti per il quadrato 2x2 (vedere figura 6.11(b)). Era successo che diversi altri studenti avevano usato questo approccio. Sebbene l'insegnante sapesse che c'erano altri approcci che potevano essere usati per generare tutte le lunghezze possibili, non sembrava che gli studenti li stessero usando, così decise di suggerire un tipo di approccio sistematico alla classe. Chiese loro di provare a usare questo approccio per esaminare il numero di segmenti su tavole 3x3 e 4x4. Alla fine, la classe generò modelli come quelli delle figure 6.11 (c-d)). Quando gli studenti finirono, l'insegnante chiese loro di descrivere il numero di segmenti numericamente. Contarono i segmenti e riconobbero che in ogni quadrato successivo il numero di nuovi segmenti aumentava di 3, 4 e 5. Uno studente disse "Cioè uno per ogni chiodo sul lato del quadrato!" Decisero di mettere le informazioni in una tabella (vedere tabella 6.3).

L'insegnante chiese "Tutti hanno completato i primi quattro quadrati. Sapete fare un'ipotesi sul numero di segmenti nel prossimo quadrato?" Gli studenti contarono il numero di segmenti usando i loro quadrati e la tabella. Molti ipotizzarono che il quadrato 5x5 doveva avere venti diversi segmenti (2+3+4+5+6 oppure 14+6). Collegarono i segmenti sulla tavola e videro i 6 segmenti supplementari. Pensarono di aver finito con la prima parte dell'esercizio e poterono fare una generalizzazione.

Quadrati	Segmenti da aggiungere	Segmenti totali
1x1	2	2
2x2	2+3	5
3x3	2+3+4	9
4x4	2+3+4+5	14

Tabella 6.3. Segmenti unici in quattro tavole quadrate

L'insegnante ricordò agli studenti la richiesta di lunghezze uniche di segmenti e chiese loro di trovare l'esatta lunghezza di tutti i segmenti. Uno studente disse "Possiamo misurarli con le righe". Un altro disse "Possiamo guardare i triangoli per vedere se hanno qualcosa di diverso". L'insegnante chiese più spiegazioni per questo approccio e gli studenti commentarono che ogni elastico non parallelo a uno dei lati rappresentava l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, quindi potevano usare il teorema di Pitagora per trovare le lunghezze. Gli studenti trovarono le misure di tutte le lunghezze usando entrambi i metodi e trovarono che il segmento *AB* in figura 6.11(e) ha la stessa lunghezza del segmento *XZ* in figura 6.11(d). Erano entrambi lunghi cinque unità. Così, il numero di segmenti unici era solo 19, non 20. Il modello non riusciva a essere valido, come indicato nella tabella 6.4.

Quadrati	Segmenti da aggiungere	Segmenti totali
5x5	2+3+4+5+5	19

Tabella 6.4. Numero di segmenti nel quadrato 5x5

Nello sviluppo del ragionamento degli studenti gli insegnanti giocano un ruolo importante nel porre domande per aiutare gli studenti a capire il problema, a organizzare dati e a fare e verificare congetture. Gli insegnanti in entrambi gli episodi descritti sopra hanno usato domande, osservazioni e il lavoro degli studenti per aiutare la classe a sviluppare un approccio sistematico sui modelli. Gli insegnanti selezionavano problemi adeguati che aiutavano gli studenti a sviluppare diversi approcci al ragionamento e alla risoluzione di problemi. La scelta del problema nell'esempio della tavola dava anche all'insegnante una naturale opportunità di discutere la differenza tra una congettura e una dimostrazione. Non tutti i modelli si generalizzano nel modo che vogliamo o ci aspettiamo dalle prime osservazioni. Questa è una importante lezione che dà agli studenti un sano scetticismo nel loro lavoro futuro con i modelli. Le domande guida dell'insegnante, così come quelle usate nei problemi dei numeri figurati e dei segmenti sulla tavola, sono cruciali nell'aiutare gli studenti a organizzare dati, fare congetture e sviluppare e valutare argomentazioni. Gli insegnanti sono le maggiori fonti di ispirazione e guida per gli studenti mentre sviluppano il loro ragionamento matematico.

Standard 8: Comunicazione

I programmi di matematica devono usare la comunicazione per favorire la comprensione in modo che tutti gli studenti:

- organizzino e consolidino il loro pensiero matematico per comunicare con gli altri;
- esprimano idee matematiche coerentemente e in maniera chiara ai compagni, agli insegnanti e agli altri;
- estendano le loro conoscenze matematiche considerando i pensieri e le strategie altrui;
- usino il linguaggio matematico come un preciso mezzo di espressione.

Elaborazione: livelli 6 – 8

La comunicazione è un aspetto essenziale nelle classi dove gli studenti sono spronati a pensare e a ragionare sulla matematica e a esprimere i risultati dei loro ragionamenti agli altri, oralmente o per iscritto. Questo tipo di contesto di apprendimento è auspicabile a qualsiasi livello, ma ci sono pochi segnali di lavori collettivi simili nei livelli intermedi. Nei livelli intermedi la matematica che si discute è generalmente più complessa e forse più astratta e ipotetica della matematica delle classi iniziali. Un secondo aspetto distintivo mette in relazione le norme per la valutazione del pensiero dei membri all'interno della classe. Quando gli studenti dei livelli 6-8 esprimono il loro pensiero, possono attenersi a standard più rigorosi di quelli che probabilmente possono essere applicati a studenti più giovani, sebbene non così rigorosi come potrebbero essere applicati nelle scuole superiori. Le norme sociali sono anche critiche nelle classi intermedie. Perciò, un terzo aspetto distintivo della comunicazione nelle classi intermedie riguarda gli studenti stessi, piuttosto che il contenuto delle loro discussioni. Durante l'adolescenza, gli studenti sono spesso riluttanti a fare qualsiasi cosa che li faccia distinguere dal gruppo e molti studenti delle scuole intermedie sono timidi e riluttanti nell'esporre il loro pensiero agli altri. La pressione dei loro coetanei è forte, e il desiderio di adattarsi è dominante. Gli insegnanti hanno bisogno di costruire il senso di comunità nelle classi nei livelli intermedi, in modo che gli studenti si sentano liberi di esprimere le loro idee onestamente e apertamente, senza la paura del ridicolo.

Com'è la comunicazione nei livelli 6-8?

Considerate un esempio di comunicazione matematica nelle classi dei livelli intermedi. Nella classe di Mrs. Miller gli studenti spesso lavorano per risolvere problemi impegnativi. Un giorno, l'insegnante presentò il seguente problema:

Il rapporto della lunghezza della base di un rettangolo e della sua altezza è di 4 a 3.
La sua area è di 300 pollici quadrati. Quali sono la sua altezza e la sua base?

Mentre gli studenti lavoravano in coppia, Mrs. Miller rispondeva alle loro domande, in modo di non distogliere la loro attenzione dalla riflessione e dal ragionamento. Resistette ai tentativi degli studenti di farla pensare al posto loro, rispondendo con suggerimenti (prova a pensare alcuni modi di usare un diagramma) o con ulteriori domande (cosa sai sulla relazione tra l'area di un rettangolo, la sua altezza e la sua base? come puoi usare ciò che conosci?). Inoltre notò i diversi approcci alle soluzioni usati dagli studenti e decise a quali studenti avrebbe chiesto di presentare le soluzioni.

Dopo che la maggior parte degli studenti ebbero avuto la possibilità di ottenere una soluzione Mrs. Miller chiese ad Angela e a Dorothy di andare per prime. Utilizzando il proiettore spiegarono il loro approccio disegnando dapprima una tabella con tre colonne indicando *B* (per la base), *H* (per l'altezza), e *A* (per l'area). Nella prima riga della tabella Angela scrisse tre numeri: 4, 3, 12. Mrs. Miller le domandò perché avesse scritto quei tre numeri. Angela rispose che quelli erano i più piccoli valori possibili per la base e per l'altezza, ma che l'area non era corretta. Dopo spiegò che avevano continuato a elencare valori più grandi possibili per la base e l'altezza per vedere se potevano scoprire una regola. Quindi, elencò parecchie righe della tabella: (8, 6, 48), (12, 9, 108), (16, 12, 192), (20, 15, 300). Angela indicò la riga finale e spiegò che questa mostrava che la soluzione era 20 e 15 (Tabella 6.5). A questo punto Mrs. Miller, che aveva notato che Dorothy non aveva partecipato alla presentazione, le chiese se poteva spiegare per quale motivo pensavano che la loro soluzione fosse corretta. Dorothy spiegò: "l'area di un rettangolo è la base moltiplicata per l'altezza. Se fai 20 per 15 ottieni 300, ed è quello di cui avevamo bisogno". Darryl successivamente domandò perché 30 e 10 non era una soluzione, dato che 30 $\times$ 10 dà 300. Dorothy replicò che 30 e 10 non potevano essere una risposta corretta perché quei numeri non comparivano nella loro tabella. Mia alzò la mano e fece notare che i lati dovevano avere un rapporto di 4 a 3, e che 30 e 10 non avevano quel rapporto. Dorothy successivamente spiegò che questo era quello che voleva dire quando aveva detto che quei numeri non apparivano nella tabella - nella tabella c'erano solo coppie di numeri con rapporto corretto.

Base (*B*)	Altezza (*H*)	Area (*A*)
4	3	12
8	6	48
12	9	108
16	12	192
20	15	300

Tabella 6.5. Possibili valori per base e altezza

Mrs. Miller ringraziò le ragazze per aver condiviso il loro lavoro, e chiese se poteva avere il lucido della tabella che avevano creato per il problema. Progettò di conservarla per una lezione futura in cui gli studenti avrebbero considerato l'effetto, sull'area, del moltiplicare la lunghezza e l'altezza di un rettangolo per un certo fattore. Poi chiese se qualcuno aveva altre domande per le due ragazze. Lee alzò la mano e disse che lui e il suo compagno avevano risolto il problema in un modo simile, ma riteneva che il loro modo fosse più semplice. Mrs. Miller li invitò a presentare la loro soluzione. Lee e Randy andarono al proiettore per spiegare il loro lavoro. Dopo aver brevemente ripetuto le informazioni date nel problema, Lee indicò che 3 per 4 era uguale a 12 ed essi avevano bisogno di "un numero in cui potessero entrare sia il 3 che il 4”. Mrs. Miller chiese perché avevano moltiplicato 3 per 4, a ciò Randy rispose che il rapporto della base con l’altezza era dato come “3 a 4” nel problema. Lee continuò dicendo che avevano determinato che “3 sta nel 15 5 volte e che 4 sta 5 volte nel 20”. Dato che 15 per 20 era uguale a 300, l’area del rettangolo dato, conclusero che questi numeri rappresentavano la base e l’altezza del rettangolo.

Mrs. Miller chiese alla classe se aveva qualche domanda per Lee e Randy. Riprendendo la domanda di Mrs. Miller durante la presentazione della soluzione, Tyronne commentò che lui non aveva capito la loro soluzione, in particolare come il 12 fosse stato ottenuto e come fosse stato d’aiuto per risolvere il problema. Né Lee né Randy furono in grado di spiegare il motivo per cui avevano moltiplicato il 3 e il 4, né come il risultato di quella moltiplicazione si collegasse al loro modo di pensare per ottenere la soluzione. Mrs. Miller indicò che anche lei si chiedeva come avessero ottenuto il 15 e il 20. I ragazzi replicarono che loro avevano cercato un numero in cui “entrassero sia il 3 che il 4”, dopo di ciò Mrs. Miller e Darryl chiesero simultaneamente come avessero ottenuto il numero 5. Lee e Randy risposero che il 5 era il numero in cui “entrava sia il 3 che il 4”. A questo punto, Keisha chiese, “Voi ragazzi siete un po’ confusi. Indovinavate e controllavate?”, al che il ragazzi risposero all’unisono alla domanda, “Sì!”. Sebbene la risposta di Lee e Randy al problema fosse corretta, e sebbene contenesse il nocciolo di una buona intuizione matematica, la spiegazione del loro metodo risolutivo lasciava gli studenti confusi. Mrs. Miller decise di chiedere ancora un’altra soluzione.

Poiché aveva notato che Rachel e Keisha usavano un metodo risolutivo diverso, Mrs. Miller chiese loro di presentare la loro soluzione. Keisha fece lo schizzo di un rettangolo, etichettando la base con 4 e l’altezza con 3. Lei spiegò che il 3 e il 4 non erano realmente la lunghezza e l’altezza del rettangolo, ma che i numeri aiutavano a tenere in mente la relativa misura di quelle lunghezze. Dopo Rachel spiegò che si potevano immaginare 12 quadrati dentro il rettangolo, perché 3 moltiplicato per 4 era uguale a 12. Per mostrare ciò, disegnò delle rette per suddividere il rettangolo. Quindi, spiegò che l’area di un rettangolo doveva essere distribuita equamente nei 12 quadrati che erano “dentro”. Quindi, divisero 300 per 12 per determinare che ogni quadrato avrebbe contenuto 25 pollici quadrati. Su suggerimento di Mrs. Miller, Rachel scrisse un 25 in ogni quadrato del diagramma in modo da chiarire la situazione. Poi Keisha spiegò che, per trovare la lunghezza e l’altezza del rettangolo originale, dovevano determinare la lunghezza del lato di ogni quadrato. Poiché l’area di ogni quadrato era 25 pollici quadrati, affermò che il lato di ogni quadrato era 5 pollici. Dopo, indicando il diagramma (Figura 6.11), spiegò che la lunghezza del rettangolo era 20 pollici, poiché consisteva dei lati di quattro quadrati, e l’altezza era 15 pollici.

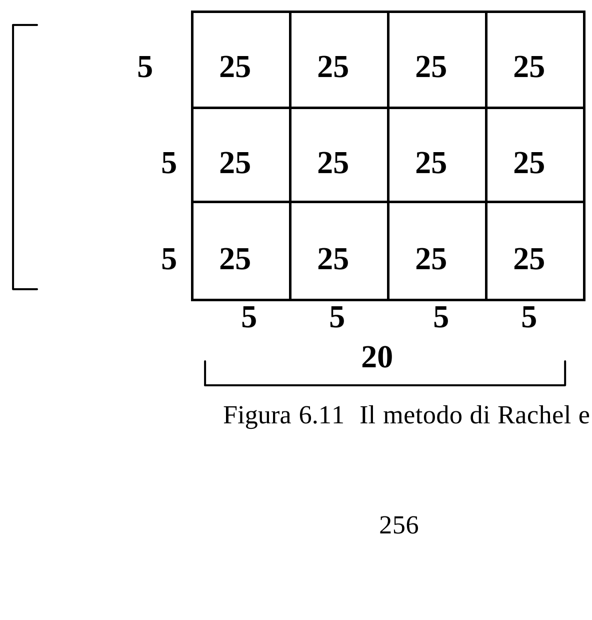


Figura 6.11 Il metodo di Rachel e Keisha

Alcuni studenti fecero domande per chiarire la loro comprensione della soluzione e a queste Keisha e Rachel risposero bene. In seguito Mrs Miller chiese alle ragazze se pensavano che il loro approccio potesse essere usato per qualsiasi problema simile. Per esempio, chiese cosa sarebbe successo se il rapporto non fosse stato 4 a 3, o cosa sarebbe successo se l'area non fosse stata 300? Rachel rispose che confidava nel fatto che il loro approccio avrebbe funzionato in generale, ma Keisha era meno certa. Darryl in seguito chiese cosa sarebbe accaduto se il prodotto "dei numeri del rapporto lunghezza/altezza non si divideva equamente nell'area" del rettangolo. Questo problema generò un vivace scambio di opinioni tra parecchi studenti, durante il quale Mia chiese se il metodo usato da Angela e Dorothy avrebbe funzionato in casi simili. Mrs Miller era contenta che questi argomenti di generalizzazione fossero presi in considerazione da alcuni degli studenti, ma voleva esser sicura di avere impegnato l'intera classe in questo modo di pensare. Poiché il tempo volava, chiese agli studenti di considerare questo problema come compito per casa. Negli ultimi minuti di lezione, chiese agli studenti di mettere per scritto nei loro quaderni le osservazioni su ciò che avevano imparato durante la lezione e le domande che avevano da fare.

- **Qual è il ruolo dell'insegnante nel sostenere la comunicazione nella classe di matematica nei livelli 6 – 8**?

Mrs. Miller ha stabilito una relazione con la classe nella quale la comunicazione è centrale per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Naturalmente, non tutti i giorni va così. Da parecchi anni lavora in collaborazione con i colleghi della scuola per stabilire momenti didattici ricchi di comunicazione, dove gli studenti sono incoraggiati a scambiarsi le idee e a cercare chiarimenti fino a quando non capiscono. Il punto focale è tentare di dare un senso alla matematica lavorando insieme come comunità. In qualità di insegnante, Mrs. Miller assume ruoli speciali, incluso monitorare e facilitare le discussioni. Nel suo ruolo fluidificante, Mrs. Miller cerca di sostenere gli studenti nella fase di assunzione di responsabilità nel loro processo di apprendimento della matematica e in quello dei loro coetanei. Guida la "direzione matematica" della conversazione per essere sicura che i suoi obiettivi siano raggiunti. L'atmosfera di fiducia reciproca e di rispetto in questa classe, rende accettabile lottare per le proprie idee, commettere errori, essere insicuri. Gli studenti sono disponibili a partecipare attivamente perché sanno che non saranno criticati personalmente, anche se il loro pensiero può essere oggetto di critica. Spiegazioni, domande, dibattiti, sono attività previste e naturali in questa classe di matematica.

La comunicazione nella classe di Mrs. Miller converge su lavori che impegnano gli studenti a pensare e ragionare su qualcosa di matematicamente importante. Sebbene il compito di questa lezione fosse per molti versi abbastanza semplice, con la guida determinata dell'insegnante essa fornì agli studenti l'opportunità di sollecitare la loro comprensione sull'area e sul rapporto, aspetto didattico importante nei livelli medi. Tipico dei "compiti di matematica proficui" (NCTM 1991), questo compito si prestava a vari metodi di soluzione: permetteva rappresentazioni multiple, richiedeva agli studenti di motivare, ipotizzare e interpretare, ed era connesso a importanti concetti matematici. Problemi con tali caratteristiche forniscono occasioni per un discorso matematico.

Questo compito era anche produttivo per Mrs. Miller in almeno tre direzioni. Nei giorni immediatamente seguenti alla sua lezione, lei e la sua classe esplorarono l'uso delle rappresentazioni algebriche e i metodi di soluzione per questo problema e per quelli correlati, nel tentativo di trovare un metodo per le aree e per i rapporti tra i lati che avrebbe funzionato per una gamma più ampia possibile di valori. Anche in una lezione successiva, usò il lucido fatto da Angela e Dorothy per fare esaminare alla classe il modo in cui l'area di un rettangolo varia quando le dimensioni del rettangolo vengono moltiplicate per un certo fattore. Infine, usò questo compito per aiutare i suoi studenti a considerare la qualità di un'opportuna spiegazione per la soluzione di un problema di matematica. Al fine di far conoscere agli studenti i criteri di valutazione che sarebbero stati usati nel test statale di rendimento, fece preparare agli studenti le soluzioni scritte di questo problema e poi fece valutare agli uni le soluzioni degli altri usando i suddetti criteri. In questo modo gli studenti impararono in modo efficace la necessità di essere accurati, precisi ed esaurienti nel linguaggio usato nella loro comunicazione scritta.

Nella classe di Mrs. Miller la scelta di un compito che aveva il fine sia di occupare gli studenti, sia di impegnarli a pensare e ragionare era il punto fondamentale. L'uso del compito per facilitare gli studenti nell'apprendimento della matematica richiese la sua massima attenzione. Ci sono numerosi problemi che gli insegnanti devono considerare nell'aiutare gli studenti a imparare a parlare di matematica, uno di questi è come orchestrare una conversazione in classe. Chi parla? quando? perché? Incoraggiare gli studenti a parlare può a volte non essere in contrasto con il progredire in matematica. Alcune risposte saranno più pertinenti o più specifiche di altre. E' importante aiutare gli studenti a riconoscere le idee buone. Da un lato, qualche volta, è produttivo per l'insegnante esaminare e analizzare le risposte sbagliate. Solo tirando fuori i fraintendimenti e gli errori questi possono essere esaminati e trattati in modo appropriato. E l'attenzione a risposte eccezionali deve essere bilanciata da azioni che incoraggino la partecipazione di tutti. E' importante assicurarsi che ognuno abbia l'opportunità di collaborare, sebbene non sia necessario dare a tutti gli studenti lo stesso tempo per il loro intervento.

La voce di Mrs. Miller fu ascoltata durante ciascuna delle presentazioni degli studenti e durante le discussioni, che durarono complessivamente 15 minuti circa. I suoi commenti furono cruciali nello svolgimento del discorso, ma i suoi silenzi durante le presentazioni e la discussione furono altrettanto importanti. È chiaro che gli studenti della classe erano abituati ad aver domande, non solo da parte dell'insegnante ma anche da parte di altri studenti, per spiegare il loro modo di pensare e di ragionare in matematica. Anche il tempo è importante. Mrs. Miller diede ai suoi studenti tempo sufficiente per produrre ed esplorare le loro stesse idee e per discutere le soluzioni del problema, inizialmente con i loro compagni e successivamente con l'intera classe. Mrs. Miller e molti studenti insistettero per la giustificazione e la spiegazione di ogni soluzione presentata. Ciò portò a un duplice messaggio - l'importanza dell'indagare in modo ponderato e l'importanza della comprensione del metodo usato per risolvere un problema.

Per quegli studenti che non partecipavano alla discussione, altri metodi furono utilizzati per coinvolgerli nella comunicazione. Per esempio, tutti gli studenti di Mrs. Miller ebbero l'opportunità di comunicare mentre lavoravano in coppia. Quest'approccio è spesso molto efficace con gli studenti nei livelli medi. Nella relativa privacy di un piccolo gruppo, gli studenti possono sperimentare le loro idee con una persona o poche persone prima di aprirsi all'intera classe. E Mrs. Miller offrì ai suoi studenti altre opportunità per la riflessione individuale e la comunicazione, come per esempio: i giornali, i commenti scritti e i compiti per casa individuali.

Standard 9: Collegamenti

I programmi di matematica devono mettere in evidenza i collegamenti per agevolare la comprensione della matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano e usino connessioni fra diverse idee matematiche;
- capiscano come le idee matematiche si assemblano l'una all'altra per produrre un insieme coerente;
- riconoscano, usino e imparino la matematica in contesti a essa estranei.

Elaborazione: livelli 6–8

Le connessioni sono inseparabili dall'apprendimento matematico in tutti i livelli. Osservare le connessioni è parte integrante di ciò che significa pensare matematicamente, e fare delle connessioni significa costruire conoscenza. Senza collegamenti gli studenti imparano e ricordano i concetti isolati, senza avere la possibilità di costruire su ciò che è stato precedentemente imparato e compreso. Gli insegnanti devono continuamente fornire opportunità per indurre gli studenti a rilevare e a descrivere i collegamenti, e nello stesso tempo devono costruire dei percorsi che rendano utili queste connessioni. Questo può essere fatto rivolgendo delle domande agli studenti, e può essere agevolato da un curricolo che vede i collegamenti come parte integrante dello studio della matematica.

Nei livelli intermedi ci sono molte opportunità di utilizzare e costruire delle connessioni grazie a nuovi contenuti matematici rivolti agli studenti. Una particolare attenzione meritano le connessioni tra i concetti chiave che gli studenti sviluppano in questi livelli (numeri razionali, proporzioni e relazioni lineari) e tra questi concetti e altri ai quali sono strettamente intrecciati.

Le connessioni possono anche scaturire dai contesti ricchi di problemi che offrono sia le altre discipline, sia le diverse esperienze di vita quotidiana che interessano questa età. In questi livelli, strumenti come i calcolatori diventano importanti per lo studio della matematica. Questi strumenti servono come base per stabilire connessioni e forniscono opportunità per migliorare la comprensione degli studenti.

- **Quali connessioni si possono fare nei livelli 6–8?**

Lungo il curricolo, nei livelli intermedi, l'insegnamento della matematica dovrebbe fornire delle opportunità per vedere e assaporare una matematica unitaria; ciò può essere realizzato ponendo agli studenti delle domande. Questi rivelano il modo in cui fanno collegamenti rispondendo a domande del tipo: perché? come hai fatto ad arrivare alla tua risposta? perché ha senso? qualcuno potrebbe pensarla in modo diverso? come sono collegate le due idee? in che modo il tuo lavoro di oggi è legato a quello che hai fatto nelle precedenti unità? Da questa discussione, altri potrebbero potenzialmente sviluppare collegamenti ulteriori e migliorare la loro comprensione ascoltando risposte a domande di questo tipo.

Con il curricolo e la programmazione incentrate sulla matematica come disciplina di idee in relazione, gli studenti imparano ad aspettarsi dei collegamenti tra le idee. In questa prospettiva, le nuove idee sono viste come estensioni di ciò che è stato precedentemente appreso; inoltre gli studenti potrebbero utilizzare ciò che già conoscono per orientarsi nelle nuove situazioni. Con quest'inclinazione gli studenti dovrebbero automaticamente chiedersi: in che modo questo problema è simile a qualcosa che ho già fatto? quali sono le differenze?

Attività e discussioni matematicamente ricche creano i presupposti affinché gli studenti sviluppino la comprensione e la capacità di fare connessioni. Questo tipo di attività fornisce gli stimoli per riflettere su particolari concetti e procedure, sulle connessioni con altre idee matematiche e sulle connessioni con il mondo reale. Le discussioni, che richiedono agli studenti di ragionare e di comunicare matematicamente, promuovono le loro abilità nel risolvere problemi e nel costruire nuove connessioni.

Per esempio, l'attività sotto descritta fu proposta in un settimo livello. Gli studenti stavano studiando un'unità su rapporti e proporzioni e l'intento fu quello di introdurli alla comprensione del confronto dei rapporti. Nel processo risolutivo, fecero numerose connessioni, specialmente per quanto riguarda i numeri.

La banda della Southwestern Middle School deve tenere un concerto. Il settimo livello ha l'incarico di preparare il rinfresco. Uno dei compiti è quello di servire il punch. Il cuoco della scuola ha dato agli studenti quattro diverse ricette che richiedono acqua frizzante e succo di mirtillo.

Ricetta A
2 tazze di succo di mirtillo
3 tazze di acqua

Ricetta B
4 tazze di succo di mirtillo
8 tazze di acqua

Ricetta C
3 tazze di succo di mirtillo
5 tazze di acqua

Ricetta D
1 tazze di succo di mirtillo
4 tazze di acqua

- Quale ricetta darà un punch con un sapore di mirtillo più forte? Spiega la tua risposta;
- Quale ricetta fornirà un punch con un sapore di mirtillo meno forte? Spiega la tua risposta;
- Il direttore della banda ritiene necessarie 120 tazze di punch. Per ogni ricetta, quanto succo di mirtillo e quanta acqua frizzante sono necessarie? Giustifica la tua risposta.

Gli studenti lavorarono sul problema formando quattro gruppi di due o tre persone (uno per ogni ricetta). Quando finirono, tutta la classe si ritrovò per condividere e spiegare le risposte. La classe cominciò discutendo le prime due domande. I gruppi interpretarono la domanda sulla ricetta con il sapore di mirtillo più forte in molti modi. Alcuni utilizzarono la relazione tra la parte e il tutto, cioè tra il numero di tazze di succo rispetto al numero totale di tazze della ricetta (2/5, 4/12, 3/8, 1/5). Altri considerarono il rapporto del succo rispetto all'acqua (2/3, 4/8, 3/5, 1/4). Altri ancora presero in considerazione solo il numero totale di tazze di succo in ogni ricetta (2, 4, 3, 1). Dopo la discussione tra le varie risposte e il confronto dei metodi, la classe arrivò all'ultima domanda. Sotto sono riportate quattro delle strategie usate dai gruppi per lavorare su questa parte del problema.

Gruppo con la ricetta A: noi abbiamo osservato che la ricetta è costituita da 5 tazze: 2 di succo e 3 di acqua. Così per fare 120 tazze dobbiamo dividere 120 per 5 ottenendo 24, il numero di volte in cui bisogna applicare la ricetta. Poiché occorrono 2 tazze di succo e 3 tazze di acqua per ogni ricetta, in tutto occorrono 2 X 24 = 48 tazze di succo e 3 X 24 = 72 tazze di acqua. E poiché 48 tazze di succo + 72 tazze d'acqua fanno 120 tazze, la risposta dovrebbe essere corretta.

Gruppo con la ricetta B: noi abbiamo visto che il rapporto tra 4 tazze di succo e 8 tazze di acqua è lo stesso rapporto che c'è tra 1 tazza di succo e 2 tazze di acqua. Allora abbiamo pensato alle 120 tazze di punch divise in tre gruppi di 40 tazze: 40 + 40 + 40 = 120. Occorrono 1 parte di succo, cioè 40 tazze, e 2 parti di acqua, cioè 80 tazze. In tutto sono 120 tazze di punch formato di 1 parte di succo e 2 parti di acqua.

Gruppo con la ricetta C: noi abbiamo ripetuto due volte la ricetta, ma non era abbastanza. Così l'abbiamo ripetuto un'altra volta, ma ancora non era abbastanza. Così abbiamo continuato a ripetere la ricetta osservando il numero totale di tazze che si ottenevano. Abbiamo ripetuto il procedimento fino ad ottenere 120 tazze. Ciò è mostrato nella Tabella 6.6.

tazze di succo	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
tazze di acqua	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
tazze totali	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120

Tabella 6.6.

Questo significa che occorrono 45 tazze di succo e 75 tazze di acqua. (Più tardi nella discussione in classe il gruppo notò che si poteva ottenere direttamente 45/75 da 3/5 moltiplicando il numeratore e il denominatore per 15, poiché occorrono appunto 15 ripetizioni della ricetta.)

Gruppo con la ricetta D: noi abbiamo provato con vari numeri. Prima abbiamo provato con 20 tazze di succo. In questo caso occorrerebbe una quantità d'acqua pari a 4 volte, cioè 80 tazze. Ma il totale sarebbe troppo poco, perché 20+80=100. Così abbiamo provato con 30 tazze di succo e di conseguenza 30X4=120 tazze d'acqua. Questa volta avremmo troppo punch, 30+120=150. Dopo abbiamo provato con 25 tazze di succo e 25X4=100 tazze d'acqua. Ma questo fa 125 tazze di punch che è più vicino, ma ancora troppo. Così abbiamo provato con 24 tazze di succo e 24X4=96 tazze d'acqua. Questo funziona poiché 24+96=120.

Dopo che i gruppi ebbero messo in comune le loro strategie, l'insegnante continuò la conversazione parlando delle analogie e delle differenze tra le strategie usate da ogni gruppo. Alcuni studenti conclusero che il numero di volte in cui bisognava ripetere la ricetta per ottenere 120 tazze di punch poteva essere calcolato trasformando il rapporto

$$\frac{\text{tazze di succo di mirtillo}}{\text{tazze totali di punch}}$$

in un rapporto equivalente avente per denominatore 120.

Con questo problema gli studenti fecero esperienza della matematica come integrazione di varie idee: frazioni, rapporti, proporzioni, operazioni, quantità, scala, significato dei numeri, schemi e così via. Il compito di "preparare il punch" è un singolo problema, perciò non offre necessariamente la possibilità di effettuare collegamenti a tutti i contenuti della matematica. Comunque, presenta la matematica come uno strumento per risolvere i problemi piuttosto che come un insieme di fatti isolati che devono essere memorizzati. Una parte del lavoro su questo problema coinvolse i modi di comunicare le strategie per risolvere i problemi. Le soluzioni mostrarono numerose e differenti idee matematiche e le connessioni tra loro. Tutti gli studenti ebbero l'opportunità di migliorare la comprensione dei rapporti ascoltando le idee degli altri. Alcuni costruirono il loro sapere a partire dalla matematica già appresa e usarono il concetto di variabile, ma non tutti nello stesso modo. I gruppi usarono parti diverse della matematica e diverse strategie. Per esempio, il gruppo con la ricetta D usò la strategia "prova e controlla" e la comprensione di numero per risolvere il problema. Il gruppo con la ricetta C costruì una tabella, usò il rapporto di scala, l'idea di addizionare ripetutamente, il concetto di frazioni equivalenti. I gruppi con le ricette A e B pensarono al confronto di quantità e usarono i rapporti. Ancora, degli studenti in differenti gruppi usarono il concetto di variabile come numero generico, pur non usando dei simboli algebrici. Un attento esame dei processi di ragionamento rivela che gli studenti hanno sviluppato una comprensione dei fenomeni che ha gettato le basi per il successivo studio delle proporzioni, delle velocità di cambiamento e delle relazioni lineari.

- **Qual è il ruolo degli insegnanti nell'aiutare gli studenti a capire le connessioni nei livelli 6–8?**

Il ruolo dell'insegnante consiste, da una parte nello stimolare gli studenti ad affrontare problemi che connettono idee matematiche all'interno dei singoli argomenti e attraverso l'intero curricolo, dall'altra nel fare in modo che gli studenti costruiscano nuove idee sulla matematica che già conoscono. Nel problema della "preparazione del punch" l'organizzazione della lezione ha permesso agli studenti di fare connessioni esplicite, e le domande poste dall'insegnante su analogie e differenze tra le strategie messe in atto dagli studenti ha indirizzato l'attenzione sulle relazioni e sulle generalizzazioni. L'insegnante ha sfruttato un'opportunità per incoraggiare gli studenti a osservare e a utilizzare le connessioni. In situazioni come questa è fondamentale che l'insegnante conosca e capisca i concetti sviluppati, per insegnarne non solo un uso astratto, ma anche per essere in grado di dirigere la conversazione. L'insegnante deve essere anche capace di prendere rapide decisioni sui passi successivi, come focalizzare l'attenzione degli studenti sull'uso appropriato delle parole e delle notazioni che sosterranno la comprensione dei nuovi concetti.

Gli insegnanti possono migliorare la comprensione della matematica utilizzando altre discipline come fonti di problemi. Le scienze e gli studi sociali sono ricchi di opportunità per l'apprendimento della misura, dell'analisi dei dati e dell'algebra; mentre le arti e la computer graphic possono essere usati per dare corpo a concetti come la forma, la simmetria, la similitudine e le trasformazioni delle figure geometriche. Gli studi ambientali offrono risorse per lo studio dei numeri, in particolare dei grandi numeri (i rifiuti prodotti da una famiglia, da una comunità, da uno stato, da una provincia); della geometria e della misura: volume, area, fattore di scala, rapporti (costruendo recipienti di diverso formato per il compost); l'analisi dei dati e la statistica, ponendo domande, raccogliendo e analizzando dati, interpretando risultati (studio di effetti dell'inquinamento su popolazioni di animali e piante); e molti altri.

In molte scuole medie gli insegnanti incoraggiano gli studi interdisciplinari. Se attuata bene, quest'attività aiuta gli studenti a connettere le idee matematiche che spesso sono usate nelle altre discipline alle idee discusse nelle ore di matematica. L'insegnante di matematica dovrebbe lavorare con gli insegnanti delle altre discipline per sviluppare unità integrate di studio. Per esempio nei livelli medi, le classi di scienze potrebbero studiare l'habitat di animali come cervi, pesci o aquile. Se gli studenti stanno utilizzando le tecniche di campionamento per determinare la popolazione di una specie, è importante che gli insegnanti di matematica e scienze discutano sulla comprensione da parte degli studenti delle varie tecniche di campionamento, in particolare sull'idea di estrazione casuale. Inoltre, è importante che gli insegnanti di scienze sappiano che gli studenti, per stimare la popolazione totale, sanno utilizzare più adeguatamente le scale e i rapporti equivalenti piuttosto che manipolazioni algebriche formali. Queste conversazioni sulle esperienze degli studenti, la comprensione dei concetti, le procedure che possono mettere in atto forniscono agli insegnanti l'opportunità di discutere temi specifici che riguardano la matematica, come per esempio gli algoritmi e il livello di manipolazione simbolica astratta che gli studenti sanno usare. Senza conversazioni di questa natura, gli insegnanti potrebbero utilizzare procedure che non appartengono al repertorio degli studenti e di conseguenza gli studenti potrebbero perdere l'opportunità di fare dei ragionamenti o di vedere che quanto è stato sviluppato nelle ore di matematica può essere utilizzato in altre discipline. Questo non implica che l'uso della matematica nello studio delle scienze, degli studi sociali e di altre discipline sia sufficiente per il curricolo di matematica dei livelli medi. Le esperienze interdisciplinari possono invece servire come strade lungo le quali le idee matematiche sono rivisitate. Questi tipi di esperienze aiutano gli studenti a vedere l'utilità della matematica e a cogliere le connessioni tra ciò che fanno in matematica e ciò che studiano nelle altre discipline.

Con questo stesso spirito, l'insegnante di matematica dovrebbe lavorare e cercare connessioni con altre discipline diverse dalle scienze. Per esempio, gli insegnanti di matematica dovrebbe parlare coi colleghi dell'area linguistica sullo sviluppo delle abilità di comunicazione e sulle strategie di lettura degli studenti. In questo ambito, gli insegnanti dell'area linguistica possono informare quelli di matematica sul livello raggiunto dagli studenti sulle capacità di scrittura e sulle strategie per migliorare le capacità di scrittura in matematica. Ancora, gli studenti trarranno beneficio dall'impegno che i docenti metteranno per comprendere gli uni le discipline degli altri e per stabilire delle connessioni tra le discipline. Con tutti gli insegnanti interessati alle connessioni tra le diverse aree, la matematica e le altre discipline saranno viste come impregnanti la vita reale e non solo come isolati oggetti di studio.

Le connessioni passano attraverso processi intrecciati, come si è visto nell'esempio della “preparazione del punch”. Il problem solving e la deduzione sono dei catalizzatori di connessioni tra idee. Gli studenti dovrebbero utilizzare le tecniche della comunicazione per dimostrare la loro comprensione degli argomenti. Inoltre, la rappresentazione deve essere connessa ai concetti per poter costruire la conoscenza matematica. Così, fare attenzione alle connessioni non è solo un modo per studiare la matematica, ma diventa un modo per incoraggiare gli studenti a pensare, usare e impegnarsi nel problem solving.

Standard 10: Rappresentazioni

I programmi di matematica devono mettere in evidenza le rappresentazioni per agevolare la comprensione della matematica, in modo che tutti gli studenti:

- creino e usino le rappresentazioni per organizzare, registrare e comunicare idee matematiche;
- sviluppino un repertorio di rappresentazioni che possa essere utilizzato proficuamente, con flessibilità e appropriatezza;
- usino le rappresentazioni per modellare e interpretare fenomeni fisici, sociali e matematici.

Elaborazione: livelli 6-8

Utilizza le rappresentazioni per costruire modelli interpretativi di fenomeni fisici, sociali e matematici. Rappresentazioni - come oggetti concreti, disegni, tavole, grafici e simboli - sono centrali per lo studio della matematica. Aiutano gli studenti a dare un significato a concetti matematici e relazioni. Danno inoltre agli studenti un mezzo per esprimere il proprio pensiero. Gli studenti, quando s'impegnano nella creazione, nel confronto e nell'elaborazione di rappresentazioni, ne approfondiscono la conoscenza.

Nei livelli intermedi, dove si dedica una maggiore attenzione a frazioni, decimali, percentuali, relazioni tra essi e ragionamenti connessi a questi argomenti, gli studenti imparano a riconoscere, confrontare, contrapporre e lavorare con queste idee esaminando una molteplicità di rappresentazioni. Altro principale impulso per la matematica nella scuola media è lo sviluppo del pensiero algebrico, con particolare attenzione per le funzioni lineari. Gli studenti, mentre creano modelli e risolvono problemi che scaturiscono sia dal mondo reale sia da quello della matematica, imparano a usare in maniera flessibile le variabili per rappresentare incognite, e anche a usare equazioni, tabelle e grafici, per rappresentare e analizzare relazioni.

- **Quale aspetto ha una rappresentazione nei livelli 6-8?**

Uno degli scopi principali della scuola media è quello di far sì che gli studenti conoscano e usino frazioni, decimali, percentuali e relazioni tra essi in maniera spedita e flessibile. Per gli studenti più giovani, il mondo delle frazioni e quello dei decimali sono due mondi completamente distinti. Anche studenti più grandi e adulti hanno la tendenza a considerare le frazioni come parti di un insieme, (per esempio due terzi di qualcosa) e invece, i decimali, come numeri. In effetti, frazioni, decimali, e percentuali sono tre modi diversi di rappresentare numeri che possono essere usati, l'uno o l'altro, per descrivere certi numeri. Per esempio, 0,75, 3/4, e 75% sono tutti uguali, ma, semplicemente, scritti utilizzando notazioni diverse. Anche se le frazioni possono essere espresse sotto forma decimale o percentuale, le connotazioni supportate da questi simboli sono piuttosto diverse. Un importante compito della scuola media è quello di aiutare gli studenti a vedere come queste differenti rappresentazioni sono uguali e diverse, per identificarne la forza e la debolezza in casi particolari, e per comprendere quando ciascuna è usata nel modo più appropriato. Come mostrato in Figura

6.13, frazioni, decimali, e percentuali possono essere contrapposte non solo in termini di simboli, ma anche come disegni o modelli.

Riconoscere come tutte queste idee sono collegate è importante e, in definitiva, veramente utile. In alcune situazioni, è più facile pensare 1/4 piuttosto che 25/100 o 0,25 (per esempio, quando alcuni oggetti sono in vendita con uno sconto del 25%, si può calcolare mentalmente un quarto del prezzo per determinare il risparmio). In altre situazioni, può essere preferibile un decimale piuttosto che una frazione (per esempio, quando si fanno i conti con una calcolatrice o si esegue una misura digitale). D'altra parte, è più conveniente fare i calcoli con frazioni quando, in cucina, si misura in tazze, o quando si misura il tempo in ore e minuti. Ogni rappresentazione presenta vantaggi sia concettuali sia pratici. Gli studenti possono servirsi di frazioni e immagini per operare con quei numeri razionali che sono facilmente rappresentabili mediante decimali: decimi, centesimi e millesimi. Inoltre, possono estendere il sistema decimale in base dieci sia ai numeri minori di uno sia ai numeri grandi, lavorando, per esempio, con blocchi in base dieci dove al cubo grande viene assegnato il valore 1, cosicché il piano di cubetti della base è 0,1, lo spigolo è 0,01 e il cubetto unitario rappresenta 0,001. Gli studenti possono usare modelli visivi per realizzare traduzioni significative tra frazioni, percentuali e decimali.

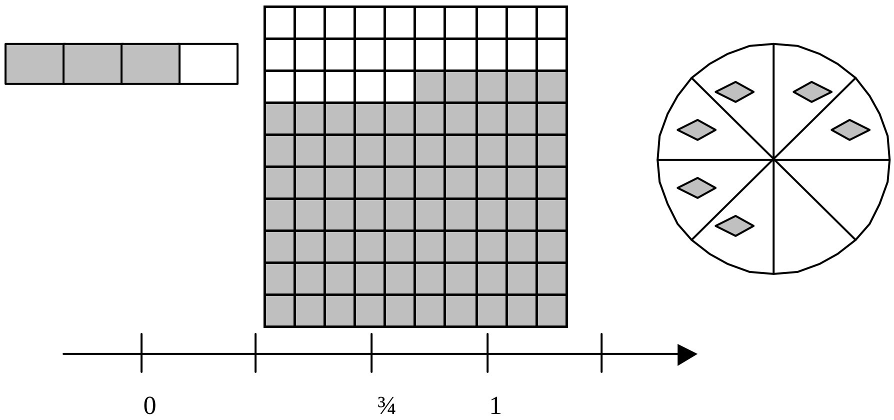


Figura 6.13. Modi di rappresentare 3/4

Anche i concetti di rapporto e proporzione ricevono, nella scuola media, un'attenzione particolare. Mentre nella scuola elementare vengono spesso proposti problemi in cui si chiede di confrontare quantità mediante la loro differenza, nella scuola media l'attenzione viene principalmente focalizzata sul confronto, realizzato attraverso il riconoscimento di relazioni moltiplicative. Il ragionamento proporzionale "è di tale importanza che merita tutto il tempo e gli sforzi necessari per assicurare il suo accurato sviluppo. Gli studenti hanno bisogno di vedere molti problemi per i quali si possa creare un modello e che possano essere risolti mediante ragionamenti proporzionali" (NCTM 1989, p. 82). Le rappresentazioni che aiutano gli studenti a sviluppare il ragionamento proporzionale includono disegni in scala, modelli, figure od oggetti (per collegare il concetto geometrico di similitudine con quello numerico di rapporto), o grafici di dati rilevati da situazioni in cui è coinvolta la proporzionalità. Nel grafico della Figura 6.14 sono rappresentate coppie ordinate di numeri che indicano la lunghezza e l'altezza di rettangoli simili. Il grafico aiuta gli studenti a vedere le connessioni tra similitudine, proporzione, linearità e pendenza.

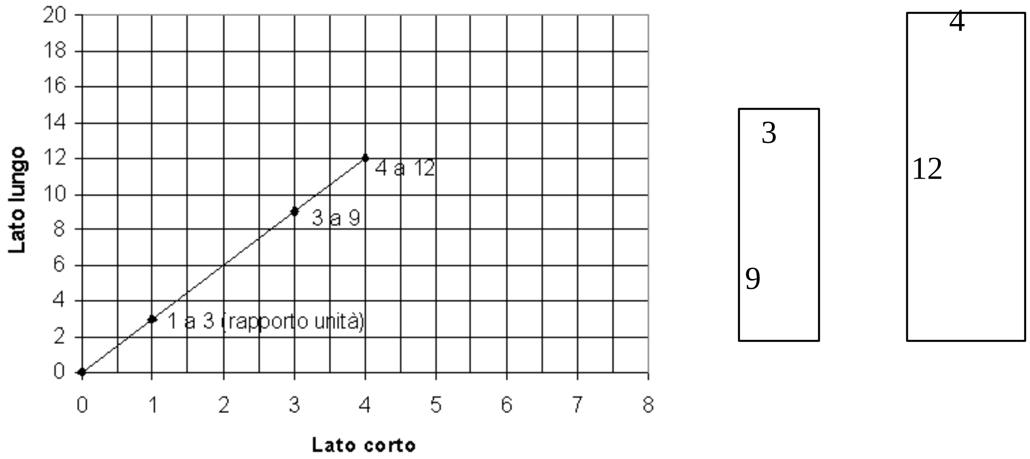


Figura 6.13bis Rapporti tra lati di rettangoli simili

Gli studenti della scuola media usano le rappresentazioni anche come procedimento per sviluppare importanti nozioni di algebra. Gli scopi principali per l'apprendimento dell'algebra, in questa fascia di livello, includono la conoscenza del concetto di variabile e di equazione; l'agile sviluppo di rappresentazioni algebriche equivalenti; l'uso di equazioni lineari e di altre rappresentazioni come modelli e strumenti per la soluzione di problemi; lo sviluppo di abilità nella rappresentazione di situazioni algebriche e nella risoluzione di equazioni lineari e di disequazioni; e l'uso del ragionamento algebrico per risolvere problemi e giustificare conclusioni. Gli studenti dovrebbero essere in grado di descrivere rappresentazioni di situazioni-problema verbalmente (con una storia), numericamente (con una tabella) simbolicamente (con un'espressione) e geometricamente (con un grafico). È proprio alla scuola media che gli studenti dovrebbero acquisire una certa agilità nel rappresentare relazioni e funzioni in modi diversi, e nello scegliere la più appropriata per la risoluzione di un problema.

La maggior parte degli studenti dovrebbe cominciare a lavorare con i simboli solo dopo aver raggiunto una certa praticità con rappresentazioni verbali, tabulari e grafiche delle relazioni che possono essere rappresentate anche con i simboli. Gli insegnanti trovano utile introdurre il lavoro con i simboli insieme ad altre forme di rappresentazione possibilmente più familiari agli studenti. Ad esempio, gli studenti possono indagare su un problema come il seguente:

> Una piscina rettangolare (B per H) deve essere bordata con delle mattonelle (assumiamo che B e H siano numeri naturali). Il bordo sarà di una mattonella lungo tutto il perimetro. Spiega a parole e simboli quale sarà il numero di mattonelle necessarie.

Alcuni studenti possono usare delle tabelle per annotare valori di B, H e T relativi a rettangoli di diverse dimensioni; altri potrebbero ragionare sulla situazione più geometricamente o più astrattamente. Ecco quattro possibili risposte:

> Ho disegnato una figura. Sono necessarie B+2 mattonelle per i due bordi nella parte alta e nella parte bassa. Successivamente ci vogliono soltanto H piastrelle per i due lati, destro e sinistro. Così, complessivamente il numero di piastrella necessarie è T=2(B+2) + 2H.

La formula per il numero di piastrelle è T=2(B+H)+4. Ho realizzato una tabella con una colonna per B, una per H e una per T. Ho disegnato alcune figure. Quindi ho contato le mattonelle di queste figure. Ho compilato la tabella con i numeri e cercato uno schema. E' facile! Basta semplicemente aggiungere la larghezza all'altezza, raddoppiare il risultato e aggiungere 4.

L'ho visualizzato mentalmente. Dapprima ho messo una mattonella a ognuno degli angoli della piscina. Dopo sono necessarie esattamente B mattonelle lungo la base e lungo la parte in alto, e H mattonelle lungo ciascuno dei lati. Così, complessivamente, il numero di mattonelle necessarie è 4+2B+2H.

Si può trovare il numero di mattonelle necessarie calcolando l'area dell'intero rettangolo (piscina più bordura di mattonelle), e sottraendo da questa l'area della piscina. L'area della piscina con il bordo è (B+2)(H+2). L'area della sola piscina è BH. Complessivamente il numero di mattonelle necessarie sarà (B+2)(H+2)-BH.

Lavorando con problemi come quello della piscina, gli studenti imparano a mettere in relazione rappresentazioni simboliche di certe situazioni con altre rappresentazioni (per esempio, diagrammi e tabelle). Comprendono anche che espressioni simboliche diverse possono rappresentare tutte la medesima situazione, e ciò conduce all'idea di espressioni equivalenti. La classe può adesso dedicare del tempo a parlare e a riflettere sul perché le quattro espressioni ottenute dagli studenti devono essere uguali, un passo verso lo sviluppo di regole basate sul significato della manipolazione dei simboli. Ad esempio, gli studenti possono osservare, riferendosi ai loro schemi, che addizionare due larghezze a due altezze ($2B+2H$) equivale a addizionare due volte la larghezza e l'altezza $2(B+H)$, e ciò riconduce ad una rappresentazione visiva della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione (uno strumento utile per riscrivere espressioni e risolvere equazioni).

L'uso di rappresentazioni, per organizzare e raccogliere dati aiuta gli studenti a cogliere il significato di problemi complessi e li mette in grado di trovarne uno schema. Una classe di settimo livello potrebbe lavorare su un problema di questo tipo:

Un club di scrittura creativa riceve due offerte relative al costo della stampa di libri. La Chris's Print Shop chiede 100 dollari per preparare la stampa più 4 dollari per ogni libro stampato. La Kelly's Book Nook chiede 25 dollari per preparare la stampa più 7 dollari per ogni libro stampato. Come varia il costo di ogni libro stampato rispetto al numero di libri stampati? chi offre il prezzo migliore?

Il primo passo per analizzare ogni insieme di dati, consiste nell'organizzare e annotare i dati, usando qualche forma di rappresentazione come una tabella, un diagramma, un grafico o un'equazione. (Questo problema può essere affrontato semplicemente con carta e matita, anche se l'uso di una calcolatrice grafica aumenterebbe considerevolmente le possibilità di scelta degli studenti). Alcuni studenti potrebbero iniziare realizzando una tabella come la 6.7.

# dei libri	0	1	2
Prezzo di Chris	$ 100	$ 104	$ 108
Prezzo di Kelly	$25	$32	$ 46

Tabella 6.7. Prezzi dei libri

Altri studenti potrebbero tracciare dei punti sul piano cartesiano, usando simboli diversi (ad esempio * e #) per riferirsi rispettivamente a Chris o a Kelly. Alcuni studenti potrebbero presentare lo schema verbalmente dicendo, ad esempio, "il prezzo di Chris è 100 dollari più 4 dollari a libro", o sviluppando una forma personale di rappresentazione simbolica (come PC = 100$ + 4$ $\times$ L). Alcune di queste rappresentazioni sono più utili di altre per rispondere a eventuali questioni che possono sorgere come: quanto chiede ogni tipografia per 10 libri? e per 20 libri? è facile ricavare dalla tua rappresentazione la spesa per ogni quantitativo di libri? per un ordine molto piccolo con quale tipografia spendi di meno? e per un ordine molto grande? c'è un numero di libri per i quali la spesa è la stessa? puoi ottenere più libri da Chris o da Kelly, se vuoi ordinare il maggio numero di libri possibile a un costo inferiore a 300 dollari?

Gli studenti, una volta acquistata familiarità con l'uso di varie rappresentazioni, capiranno che tali rappresentazioni sono un importante strumento di comunicazione del proprio pensiero. Alcuni studenti potrebbero discutere a piccoli gruppi sul modo di rappresentare il problema dei libri tracciando simultaneamente, con l'aiuto di calcolatrici grafiche, i grafici delle due equazioni sul piano cartesiano. Altri potrebbero confrontare tabelle di numeri. Quando l'intera classe si riunisce gli studenti dovrebbero confrontare grafici, equazioni e tabelle. I diversi gruppi potrebbero illustrare i loro ragionamenti. Possono nascere questioni importanti: perché avete deciso di usare una scala a 5 per l'asse delle y? il grafico avrà un andamento diverso se si usa una scala diversa? che cosa succederebbe al grafico se il prezzo di Chris crescesse da 4 a 6?

Uno dei punti forti della matematica è il fatto che le stesse rappresentazioni, o rappresentazioni molto simili, sono utili in molti problemi di tipo diverso. Supponiamo che agli studenti che avevano lavorato sul problema della stampa dei libri venga proposto, più tardi, il seguente problema:

> Hai già messo da parte, dalla paghetta e da regali, 23 dollari. Puoi risparmiare 12 dollari ogni due settimane. Quante settimane saranno necessarie per accumulare 89 dollari con i quali comprare un paio di scarpe da ginnastica? e quanto tempo ci vuole per avere 279 dollari per comprare una mountain bike? quanto risparmi in un anno? Spiega perché hai scelto le rappresentazioni da te usate.

Dopo aver fatto alcuni calcoli o realizzato tabelle o grafici, gli studenti dovrebbero notare che le caratteristiche matematiche essenziali di questo problema sono le stesse del problema della stampa dei libri. Entrambi i problemi coinvolgono funzioni lineari. La potenza di queste realizzazioni consiste nel fatto che gli studenti possono usare, per risolvere questo problema, lo stesso tipo di rappresentazioni e gli stessi metodi usati per il problema precedente. Tutte le tecniche che si applicano allo studio delle equazioni lineari possono essere applicate a questo nuovo problema

Infine, è importante che gli studenti di scuola media abbiano l'opportunità di usare il proprio repertorio di rappresentazioni matematiche per risolvere problemi di ampio respiro, stimolanti e significativi. Lo scopo è far sì che gli studenti acquistino un'approfondita padronanza dell'utilizzo della matematica che conoscono, e una maggiore conoscenza e comprensione della loro realtà. Per esempio, alcuni studenti potrebbero decidere di fare una ricerca sui problemi legati alle discariche e al riciclaggio, raccogliendo dati sul volume di carta cestinata nella loro classe o a casa per un certo numero di settimane o mesi. Dopo aver organizzato i propri dati mediante grafici, tabelle o diagrammi, dovrebbero chiedersi quali siano le rappresentazioni più utili per mettere in luce le regolarità dei dati. Da queste osservazioni, dovrebbero essere in grado di fornire stime ragionevolmente giustificate del volume e del tipo di carta buttata in tutta la loro scuola, nelle scuole del distretto o della città, in una settimana, in un mese o in un anno e forse anche dare dei suggerimenti per ridurre il volume di carta che finisce nelle discariche o negli inceneritori.

- **Qual è il ruolo dell'insegnante nell'attività di supporto a studenti di livello 6-8 relativamente alla loro conoscenza della rappresentazione matematica?**

Il ruolo dell'insegnante è aiutare gli studenti a imparare a usare rappresentazioni in modo flessibile e ragionevole nelle loro ricerche matematiche. E' importante aiutare gli studenti quando, in situazioni di problemi non familiari, esperimentano rappresentazioni personali strane e inusitate. E' essenziale ascoltare, indagare, e fare un sincero sforzo per capire che cosa gli studenti stanno cercando di comunicare con i loro disegni e con i loro scritti. Per esempio, gli studenti di scuola media devono fare molte esperienze per sviluppare una robusta comprensione della nozione molto complessa di variabile. Lungo il percorso possono usare lettere al posto di numeri in maniera non convenzionale. I professori non devono avere troppa fretta nell'indirizzare gli studenti verso rappresentazioni convenzionali. Se ciò che l'insegnante propone è troppo distante da ciò che lo studente pensa in quel momento, il suggerimento potrebbe essere controproducente. Gli studenti, ad esempio, potrebbero rimanere disorientati dall'uso di simboli per rappresentare quantità variabili indeterminate (per esempio, $y = kx$, dove k, che è una costante, può assumere diversi valori e anche x e y possono variare) Quando gli studenti lavorano per la prima volta con le variabili tendono a pensarle soltanto come costanti fissate ma incognite (ad esempio la soluzione di un'equazione come $4k = 16$). I professori possono aver bisogno di usare rappresentazioni informali o inventate dagli studenti, quali l'uso di immagini di tazze per rappresentare il numero di tazze di un mucchio, per costruire un collegamento tra il modo di pensare degli studenti e le rappresentazioni convenzionali.

E' altresì fondamentale incoraggiare gli studenti a parlare tra loro dei grafici, delle tabelle o dei simboli che hanno usato. Quando gli studenti osservano come gli altri interpretano ciò che hanno scritto, e hanno l'opportunità di vedere in che modo gli altri hanno rappresentato le stesse idee, possono ragionevolmente imparare ad analizzare e criticare le proprie rappresentazioni e a riconoscere le caratteristiche che rendono una rappresentazione flessibile, appropriata e utile. Alla fine gli studenti non potranno fare a meno di imparare a usare notazioni convenzionali per comunicare realmente con gli altri. La maggior parte delle rappresentazioni convenzionali sono utili perché semplici ed efficaci per la risoluzione di problemi. È compito dell'insegnante far sì che gli studenti si rendano conto dell'efficacia e delle caratteristiche rilevanti delle rappresentazioni convenzionali.

Ad esempio, un insegnante di scuola media, interessato ad aiutare gli studenti a familiarizzare con le nozioni di rappresentazione in scala e di proporzionalità, potrebbe iniziare con una lezione dimostrativa servendosi di un computer o di una calcolatrice grafica. Potrebbe inserire una formula, (per esempio, $y = 5x$) e chiedere agli studenti di fare una previsione sull'aspetto del grafico. Potrebbe poi cambiare la scala sull'asse delle y da 1 a 10 e chiedere agli studenti di prevedere l'aspetto del nuovo grafico. Potrebbe chiedere come deve essere manipolata l'equazione per aumentare o diminuire la pendenza della retta. Gli studenti dovrebbero arrivare a comprendere che cambiando la scala anche il grafico cambierà, e anche che, mantenendo invariata la scala, ma cambiando il coefficiente, si otterrà ancora una variazione del grafico. Si possono confrontare simultaneamente i grafici di equazioni diverse. Si potrebbe chiedere agli studenti che aspetto avrà il grafico di una tabella di valori. Allora gli studenti per conto loro, ma con l'uso della tecnologia, potrebbero provare con altre equazioni, tabelle e grafici, e annotare le proprie congetture. Quest'attività concentrata sulla rappresentazione dovrebbe aiutare gli studenti a comprendere maggiormente i concetti di proporzionalità e rapporto in scala.

Gli insegnanti devono capire che il semplice uso di una rappresentazione da parte dello studente non significa, necessariamente, che egli possieda una migliore e più efficace comprensione del problema o del concetto di cui si sta occupando. Per esempio, chiedere a uno studente di includere figure e grafici in una relazione relativa a un progetto per la creazione di un modello, non ci garantisce che egli li usi in maniera appropriata. Un'attenta indagine da parte dell'insegnante può mettere in luce tali debolezze. Ad esempio, è importante fare domande del tipo: "che cosa rappresenta la variabile k?", "che cosa hai imparato dalla realizzazione di questa tabella?", "che cosa ci mostra il grafico?", "in che modo l'equazione ci aiuta a risolvere il problema?", "perché hai scelto di usare tabelle piuttosto che grafici?", "avresti trovato una soluzione diversa affrontando il problema graficamente?". È necessario che si stabilisca un equilibrio tra l'utilizzo di molte rappresentazioni e la necessità di un uso appropriato di tali rappresentazioni. Attraverso la rappresentazione vengono chiarite molte idee matematiche, non si tratta di un processo fine a sé stesso.