

Capitolo 5

Standard per i livelli 3-5

La matematica è una materia che piace alla maggior parte degli studenti dei livelli 3-5. Quasi i tre quarti degli studenti del quarto anno affermano di apprezzare la matematica (Kenney e Silver 1997). Gli studenti tra il terzo e il quinto anno vedono la matematica come una cosa utile, sono stimolati da molte idee nuove e pensano che quello che imparano sia importante. Comunque, qualche volta, tra il quarto e l'ottavo anno l'interesse degli studenti per la matematica comincia ad affievolirsi. Sebbene continuino a considerare la matematica come una cosa importante, dall'ottavo anno sono meno portati a ritenerla interessante o a considerarsi bravi in matematica (Kenney e Silver 1997). E' molto importante che l'educazione matematica nelle classi terminali delle elementari e nelle prime classi medie sia coinvolgente, interessante e affascinante per gli studenti.

I materiali curriculari e le scelte didattiche che l'insegnante adotta, aiutano gli studenti a collegare le idee matematiche e forniscono una base per dare loro un significato. Poiché la mole di concetti, nei livelli 3-5, aumenta molto rispetto ai livelli precedenti, gli studenti hanno bisogno d'aiuto nel costruire connessioni e nel gestire i concetti e le procedure nuove che incontrano. Gli studenti nei livelli 3-5 devono anche capire il significato di quanto viene loro insegnato e devono diventarne responsabili. In matematica questo significa imparare a esaminare, a porre domande, e a considerare diverse strategie - tutto con il duplice scopo di costruire idee matematiche sensate e di adattare queste ad altre idee collegate.

I dieci standard esaminati in questo capitolo sono comuni a tutte le fasce di livello, pre-K-12, e ciascuno di essi dovrebbe essere incluso in un corposo programma di matematica per il livello 3-5. I punti focali dell'istruzione di questa fascia si appoggiano su quelli considerati per i livelli pre-K-2, ma si estendono ben oltre essi. Sebbene il numero e l'operazione continuino ad essere pietre miliari per i livelli 3-5, ciascuno degli standard di contenuto (numeri, dati, misura, algebra e geometria) è essenziale per la formazione della conoscenza degli studenti. Molte "grandi idee" e molti aspetti centrali per questa fascia evolvono a partire da queste aree, fino a includere il ragionamento moltiplicativo, l'equivalenza e la nozione di unità. Allo stesso modo, la conoscenza e l'uso dei processi matematici dovrebbero essere approfonditi ed estesi. Gli studenti dei livelli 3-5 sono capaci di ragionamenti sofisticati e dovrebbero essere stimolati e aiutati nell'apprendimento.

Discussione dei contenuti

Uno dei principali obiettivi nello standard *Numeri e operazioni* in questa fascia di livello è diventare scorrevoli nel calcolo. La scioltezza si riferisce al possedere efficienti e accurati metodi di calcolo. In alcuni casi, questi metodi sono strategie mentali. In altri, sono

strategie scritte (sia inventate dagli studenti sia algoritmi convenzionali). La scorrevolezza dipende da un efficiente richiamo dei concetti di base e da una buona comprensione delle idee riguardanti numeri e operazioni. Gli studenti dovrebbero avere l'opportunità di sviluppare le loro strategie per il calcolo basate sulla comprensione delle proprietà dei numeri e sul particolare contesto del problema. In più, gli insegnanti dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare efficienti metodi da avere a portata di mano e da ricordare con chiarezza. Gli studenti possono avere bisogno d'aiuto per rifinire e consolidare i loro metodi come pure per trascrivere il proprio lavoro in modo organizzato.

Quando il metodo di uno studente è molto complesso, inefficiente, o adatto solo ai numeri di un dato problema, lo studente dovrebbe essere aiutato a usare e a capire metodi più efficienti e generali usati da altri, compresi gli algoritmi di calcolo inventati dagli studenti e gli algoritmi convenzionali. Gli studenti dovrebbero arrivare a vedere gli algoritmi come uno strumento per risolvere i problemi piuttosto che come l'obiettivo dello studio matematico.

Nei livelli 3-5, la comprensione dei numeri, dagli interi alle frazioni e ai decimali è un obiettivo chiave del programma. Gli studenti hanno bisogno di molte e svariate esperienze per capire cosa rappresentano frazioni e decimali, come si relazionano gli uni agli altri, e quali sono le differenze con i numeri interi. Queste esperienze dovrebbero includere il disegnare numeri razionali, posizzionarli sulla linea dei numeri, collegare rappresentazioni simboliche e fisiche (p.e. cerchi, rette numeriche), confrontare e ordinare le frazioni usando punti di riferimento quali $\frac{1}{2}$, stimare somme di frazioni (p.e. la somma è più o meno di 1?), sviluppare la comprensione di forme equivalenti ai numeri razionali. La stima e il calcolo mentale con frazioni comuni possono e dovrebbero essere incoraggiati, basandosi su relazioni fra numeri e su modelli visivi. Il tempo di insegnamento dedicato ai numeri razionali nei livelli 3-5 dovrebbe essere utilizzato per arrivare alla comprensione concettuale delle frazioni - cosa sono, come sono rappresentate e come sono collegate ai numeri interi. Questo genere di esperienze costruirà una buona base per il successivo lavoro con il calcolo sui numeri razionali nei livelli 6-8. La facilità con il calcolo frazionario e l relativo uso di algoritmi convenzionali dovrebbe essere rinviato ai livelli intermedi.

Equilibrare l'attenzione verso comprensione concettuale e procedure

Gli studenti capiscono un'idea matematica quando possono vederla sotto più prospettive, relazionarla con altri concetti ed esperienze, usarla come ulteriore passo verso il pensare concetti più complessi. Il nuovo concetto matematico deve poter essere usato in modo commisurato alla capacità dello studente di applicarlo per risolvere un problema. Ogni nuova comprensione costituisce una solida base e consente una certa indipendenza di pensiero. La comprensione di idee matematiche può stimolare e supportare l'acquisizione tanto di competenze quanto di abilità per risolvere problemi (Hiebert et al.1997). Le competenze possono essere fatte proprie senza una reale comprensione, ma sono dimenticate facilmente o usate scorrettamente. Allo stesso modo, capire un concetto senza sviluppare l'abilità di applicarlo per risolvere problemi non è sufficiente. Insegnare a capire è essenziale ma allo stesso tempo difficile; giudicare se uno studente capisce è molto più difficile che giudicare se lui, o lei, è in grado di seguire una procedura. Ogni studente capisce in modi e tempi differenti. Sebbene sia una sfida impegnativa, gli insegnanti devono organizzare l'istruzione in modo che la comprensione costituisca un fondamento per fare in prima persona.

Le procedure matematiche sono strumenti importanti che permettono agli studenti di applicare ciò che comprendono e di risolvere problemi in modo efficiente. Sono utili a ogni livello d'istruzione e includono alcune modalità come calcoli algoritmici, formule, tecniche per risolvere equazioni, e metodi per costruire grafici e tabelle. Mentre gli studenti sviluppano procedure, parte del compito dell'insegnante è valutare il loro lavoro, aiutarli a riconoscere e sviluppare procedure efficienti, e supportarli nella pratica di queste procedure in modo che diventino per loro facili da usare.

Gli insegnanti hanno bisogno di bilanciare i due obiettivi di far comprendere concetti e di far sviluppare procedure. Devono verificare continuamente i progressi degli studenti e far capire ciò che è da ritenersi più importante. A volte, gli insegnanti mettono in rilievo alcuni concetti e incoraggiano gli studenti a sviluppare procedure basate sulle proprie conoscenze. Altre volte, aiutano gli studenti a riconoscere e ad apprezzare il valore di procedure convenzionali che sono eleganti nella loro efficienza.

La tecnologia come strumento per imparare e per fare matematica

La calcolatrice e molti software dovrebbero essere considerati come metodi legittimi, per imparare e per fare matematica e dovrebbero essere utilizzati dagli studenti dei livelli 3-5. Gli insegnanti dovrebbero creare le opportunità e fornire giudizi riguardo a quando e a come utilizzare questi metodi come supporto all'apprendimento. Gli studenti dovrebbero usare calcolatrici e fogli, come strumenti per fare matematica, per eseguire le procedure necessarie a risolvere i problemi. Gli studenti dei livelli 3-5 dovrebbero usare software geometrici, grafici e dinamici, e calcolatrici, come strumenti per imparare la matematica, per esplorare, sperimentare, verificare e visualizzare concetti matematici. Per esempio, gli studenti dei livelli 3-5 dovrebbero analizzare le relazioni geometriche usando software per creare, modificare ed esaminare le formule. Dovrebbero creare grafici e considerare come alcune rappresentazioni di dati chiariscano o distorcano certe situazioni. Dovrebbero usare le calcolatrici per studiare le relazioni fra decimali e numeri interi o fra numeri negativi e numeri positivi. Dovrebbero anche avere l'opportunità di apprendere tecniche di ricerca in Internet per raccogliere informazioni e risolvere problemi matematici.

Il curriculum matematico delineato con questi standard rinforza il duplice obiettivo che l'apprendimento sia rivolto a dare un senso alle idee matematiche come pure a far acquisire competenze e intuizioni per risolvere problemi. La calcolatrice è uno strumento importante per il raggiungimento di questi obiettivi nei livelli 3-5. Comunque, la calcolatrice non può rimpiazzare l'esigenza di un veloce richiamo ai concetti di base, alla comprensione dei concetti, o all'abilità a formulare e usare strategie per il calcolo. Piuttosto, la calcolatrice dovrebbe supportare questi obiettivi valorizzando e stimolando l'apprendimento degli studenti. Quando gli studenti risolvono problemi che richiedono calcoli complessi, la calcolatrice dovrebbe essere usata per eseguire questi calcoli. La calcolatrice serve per mettere in grado il risolutore del problema di focalizzare l'idea principale piuttosto che rimanere intrappolato nei dettagli del calcolo. Le calcolatrici possono inoltre aiutare gli studenti a capire i concetti. Per esempio, usando la calcolatrice per evitare i conti col dieci e col cento, si mettono in mostra modelli in decimali che non sono evidenti in altre situazioni.

È necessario che gli insegnanti di matematica abbiano competenza e credibilità

Un punto critico nei livelli 3-5 è la formazione di insegnanti competenti. Questa competenza include una completa comprensione sia dei contenuti matematici sia del modo di pensare la matematica degli studenti a questo livello. Sempre più, le scuole e gli organismi che sono seriamente impegnati per il miglioramento dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica si rivolgono agli insegnanti stessi per provvedere al miglioramento professionale e al supporto nelle scuole di appartenenza. Agli insegnanti con più esperienza viene dato incarico di supportare altri insegnanti. A volte questi insegnanti sono completamente staccati dalla classe per un anno o due, a volte combinano metà tempo insegnando in classe con metà dedicato al supporto; altre volte hanno un compito in più che va oltre al loro orario normale di insegnamento. Definito l'obiettivo di alzare la qualità della matematica nei livelli inferiori, è essenziale coinvolgere insegnanti selezionati in questa iniziativa. Comunque, affinché gli insegnanti diventino credibili, devono ricevere un supporto considerevole e devono avere il tempo e le risorse per lavorare efficacemente con altri insegnanti.

Alcuni distretti scolastici stanno usando un "matematico esperto" per fornire un'esperienza di insegnamento di livello più alto nelle classi terminali della scuola elementare. Per esempio, l'istruzione di un gruppo di allievi del quinto anno di una particolare scuola potrebbe essere fornita da un insegnante, con un altro insegnante che organizza l'istruzione scientifica e un altro ancora che sia responsabile dell'istruzione degli studi sociali. Questa strategia offre al singolo insegnante l'opportunità di concentrarsi sul proprio sviluppo professionale e di pianificare il proprio lavoro. Esistono vari modelli specialistici per la matematica, e ciascuno presenta vantaggi e svantaggi, a seconda del particolare contesto. Siccome gli studenti di matematica incontrano contenuti di sofisticatezza crescente, è indispensabile che le strategie siano studiate in modo da esser certi che gli insegnanti abbiano l'esperienza pedagogica e matematica necessaria ad adottarle.

La seconda parte di questo capitolo elabora i dieci standard per i livelli 3-5. I concetti, le procedure, le proprietà, e le relazioni descritte in questo capitolo formano la base di un curriculum matematico che gli studenti dei livelli 3-5 possono e dovrebbero imparare, comprendendolo. Sia l'insegnante sia un curriculum matematico comprensibile e coerente, servono come "telaio" per aiutare gli studenti a tessere fatti e concetti nel tessuto delle conoscenze matematiche.

#7**Reazione del lettore**

Mentre leggi le sezioni successive, considera i seguenti punti:

- **Pensi che sia una cosa positiva adottare l'uso della calcolatrice nel livello 3-5? La guida data è sufficiente?**
- **Come possiamo perfezionare la discussione sull'importanza degli algoritmi di calcolo inventati dagli studenti e di quelli convenzionali?**
- **Possono i sotto-obiettivi dello Standard 1, *Numeri e Operazioni*, offrire una guida sufficiente? Spiega e dà suggerimenti mirati.**

Standard 1: Numeri e operazioni

I programmi di matematica devono facilitare lo sviluppo della percezione dei numeri e delle operazioni in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici;
- capiscano il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro;
- usino gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e facciano stime in modo appropriato.

Elaborazione: livelli 3-5

Nei livelli pre-K-2, gli studenti sviluppano conoscenze e competenze riguardo l'ordine dei numeri e la struttura del sistema numerico in base dieci e imparano come i numeri sono collegati gli uni con gli altri in questo sistema, focalizzando l'attenzione sulle decine e sulle unità. Incontrano in molte situazioni addizione e sottrazione e imparano a scegliere e usare le operazioni per risolvere tali problemi. Sviluppano strategie di calcolo per le addizioni e per le sottrazioni di numeri interi. Cominciano a usare e nominare frazioni comuni in contesti che richiedono di confrontare alcune parti di una certa totalità. In questo lavoro, il punto focale è stato sviluppare il significato delle operazioni, dare un senso alla grandezza dei numeri e alle relazioni tra loro e imparare come ricordarsi e spiegarsi il lavoro utilizzando modelli concreti, disegni, parole, e numeri.

A partire da questo lavoro, gli studenti nei livelli 3-5 rivolgono l'attenzione a moltiplicazioni e divisioni di numeri interi. Gli studenti arricchiscono il loro senso del numero così come sviluppano una forte comprensione dei vari significati di queste operazioni, incontrano una più vasta gamma di rappresentazioni e situazioni problematiche che li coinvolgono, imparano le proprietà delle operazioni, e acquisiscono gradualmente scioltezza nella risoluzione di problemi con moltiplicazioni e divisioni. Gli studenti devono anche mirare ad aumentare la propria comprensione del sistema numerico in base dieci mentre lavorano con i numeri più grandi - migliaia e oltre - come pure con i decimali. Imparano il significato delle frazioni, come le frazioni sono in relazione fra loro e con l'unità, e acquisiscono dimestichezza nel confrontare frazioni, spesso usando parametri come $1/2$ o 1.

Quando gli studenti lasciano il quinto livello dovrebbero essere capaci di scegliere operazioni appropriate per risolvere problemi e riconoscere che ogni tipo di operazione li aiuterà a risolvere molti problemi differenti. Dovrebbero essere capaci di stimare un risultato ragionevole per un problema, risolvere mentalmente molti problemi, e svolgere con facilità calcoli con i numeri interi. Dovrebbero vedere i numeri come entità significative, capire come il sistema numerico cresce dalle decine alle centinaia, alle migliaia e oltre, essere capaci di richiamare velocemente nozioni di base per tutte le operazioni, e avere un repertorio di strategie che possono essere usate per risolvere i problemi con i numeri. Dovrebbero capire come sono scritte e modellate le frazioni, i decimali e le percentuali, come sono in relazione con l'unità intera e tra loro. Capire e saper usare tutto questo contribuisce ad aumentare il significato che hanno i numeri, cosa che rispecchia una ricerca puntigliosa del significato e della fondatezza dei risultati del lavoro matematico. Acquisendo competenze, conoscenze e una visione della matematica come qualcosa che ha un senso, gli studenti saranno ben

preparati a risolvere problemi numerici in svariati contesti e a concentrarsi sui numeri razionali e sul ragionamento proporzionale trattati nei livelli intermedi.

Punti nodali per i livelli 3-5

- **Capire i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici.**

Nei livelli 3- 5, tutti gli studenti dovrebbero:

- capire la struttura del sistema numerico in base dieci, inclusa la rappresentazione dei decimali;
- continuare a sviluppare la percezione della grandezza relativa dei numeri, con una focalizzazione sulle potenze di dieci (specialmente centinaia e migliaia) e sul loro ruolo come parametri nel sistema numerico;
- leggere e scrivere i numeri grandi e collegare le notazioni al significato di questi numeri;
- sviluppare il significato delle frazioni come parti di un'unità intera, come parte di una serie, come numeri, e come divisioni fra numeri interi;
- leggere e scrivere frazioni e decimali e collegare le notazioni al significato di questi numeri;
- sviluppare strategie per valutare la grandezza di frazioni e decimali, e per confrontarli anche quando si usano modelli e parametri diversi (come $\frac{1}{2}$ o 0,5);
- riconoscere e usare frazioni comuni, decimali, e percentuali equivalenti;
- riconoscere le caratteristiche di numeri particolari (per esempio, è pari o dispari? è primo o composto?) e usare queste informazioni per descrivere le caratteristiche di classi di numeri (per esempio, i multipli di sette);
- sviluppare il significato di fattori e multipli, diventare celeri nell'utilizzare le relazioni fra fattori e multipli, e classificare i numeri a seconda dei loro fattori (primi, composti).

- **Capire il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro.**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- comprendere il significato di moltiplicazioni e divisioni, comprese le rappresentazioni molteplici (moltiplicazione come addizione iterata o come raggruppamento in blocchi uguali);
 - riconoscere e usare relazioni fra operazioni per risolvere problemi (p.e. moltiplicazione come inverso della divisione);
 - identificare e usare le proprietà delle operazioni per risolvere problemi (p.e. 28×7 è uguale a $(7 \times 20) + (7 \times 8)$ oppure a $(7 \times 30) - (7 \times 2)$).
-
- **Usare gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e fare stime in modo appropriato.**

Nei livelli 3-5 tutti gli studenti dovrebbero:

- entro il quarto livello, sviluppare la dimestichezza con le moltiplicazioni a una cifra e con le relative divisioni, e usare questi fatti per calcolare in modo efficiente problemi collegati (p.e. 30×50 è collegato a 3×5 , 300×5 e 15×100);
- sviluppare e confrontare algoritmi con numeri interi per ogni operazione che sia basata sulla comprensione delle relazioni fra numeri, sul sistema numerico in base dieci e sulle proprietà di queste operazioni e, entro la fine del quinto livello, sviluppare efficientemente e accuratamente l'uso di questi algoritmi;
- sviluppare e usare strategie di stima nel calcolo basate sulla comprensione di concetti, proprietà, e relazioni fra numeri;
- stimare somme e differenze di frazioni comuni e decimali usando parametri (p.e. $\frac{3}{8} + \frac{1}{3}$ deve essere minore di uno poiché tutte e due le frazioni sono minori di $\frac{1}{2}$);
- sviluppare e usare modelli visivi, parametri, e equivalenze per addizionare e sottrarre con frazioni comuni (p.e. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ equivale a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ o a $\frac{3}{4}$; $1 - \frac{1}{5}$ lascia 4 quinti delle parti rimanenti);
- sviluppare e usare modelli visivi, parametri, e equivalenze per sviluppare procedure di calcolo per le addizioni e le sottrazioni di decimali (p.e. determinando $0,10 + 0,15$ ripartendolo in una tabella 10×10 , calcolando e collegando questi numeri a frazioni equivalenti);
- scegliere appropriate procedure di calcolo e appropriati strumenti (p.e. calcolatrici, carta e penna, calcolo mentale, stima) per risolvere problemi.

Discussione

• Concetti e proprietà dei numeri

Gli studenti nei livelli 3-5 sviluppano strategie per valutare la grandezza relativa dei numeri e per usare importanti parametri del sistema numerico in base dieci, specialmente i multipli di 10, 100 e 1000. Non è sufficiente che gli studenti siano in grado di dire semplicemente che il numero 886 ha “8 centinaia, 8 decine, e 6 unità”. Devono conoscere la posizione di questo numero nel sistema numerico in base dieci e la sua relazione con numeri di riferimento come 500, 900 e 1000. Hanno bisogno di imparare gli effetti delle operazioni sui numeri, come addizionare o sottrarre 10 o 100, o moltiplicare per 10. Per fare ciò, dovrebbero incontrare questi numeri in una varietà di contesti nei quali esplorare come sono strutturati. Per esempio, una classe del terzo livello può prendere in considerazione la grandezza 1000 contando e scrivendo fino a 1000, costruendo 1000 per mezzo di tabelle da dieci centinaia, sommando 1000 unità, come le graffette, e sviluppando efficienti modi di contarle, o usando stringhe lunghe 10 o 100 centimetri per valutare la lunghezza di 1000 centimetri.

A questi livelli, gli studenti sviluppano anche le loro conoscenze sui numeri razionali. Nei livelli 3-5 dovrebbero usare molti modelli per le frazioni in modo da approfondire la conoscenza delle frazioni come numeri. Usando un modello di area, gli studenti possono vedere come sono collegate all'unità intera, confrontare le parti frazionarie con gli interi, e trovare frazioni equivalenti. Usando linee numeriche parallele, ciascuna che mostra una unità frazionaria e i suoi multipli (Figura 5.1), gli studenti possono vedere le frazioni come numeri collegati a 1, e possono vedere le relazioni fra loro.

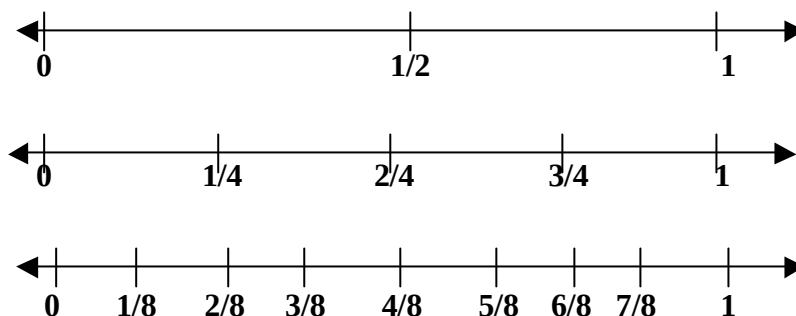


Figura 5.1 Frazioni su una linea numerica

Gli studenti nei livelli 3-5 lavorano soprattutto con frazioni familiari, come mezzi, terzi, quarti, sest, ottavi, e decimi, e puntano l'attenzione sull'ordinare e confrontare, spesso usando parametri come $1/2$ e 1 . Per esempio, gli allievi del quinto anno possono usare la loro conoscenza di $1/2$ per confrontare altre frazioni come $2/5$ e $5/8$. Dovrebbero anche mirare alla ricerca di frazioni equivalenti a quelle note e puntare sul significato del numeratore e del denominatore.

Gli studenti nei livelli 3-5 rappresentano, chiamano, scrivono, leggono e confrontano decimali e percentuali. I decimali come le frazioni, possono essere rappresentati in un modello d'area come parti di un intero o sulla linea numerica, indicando la loro posizione come numeri. Le caratteristiche della notazione in base dieci possono aiutare gli studenti a capire le notazioni decimali. Così come muoversi verso sinistra dove sono scritti i numeri, indica un incremento di un fattore 10, muoversi verso destra - cioè, da unità a decimi o da decimi a centesimi - indica una divisione per 10.

Quando gli studenti confrontano le frazioni con i decimali, incontrano anche il significato di frazione come divisione di due numeri interi ($5/2 = 5 \div 2 = 2 + 1/2$). Usando la calcolatrice per portare a termine le divisioni corrispondenti alle frazioni (come $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, e così via) imparano le equivalenze tra frazioni e decimali. Imparano anche che alcune divisioni hanno come risultato dei decimali periodici. Con lo studio simultaneo di frazioni, decimali, e percentuali, gli studenti possono usare ciò che conoscono sulle equivalenze per risolvere i problemi. Per esempio, uno studente può aggiungere 0.5 e 0.25 usando i loro equivalenti, $1/2$ e $1/4$.

• Operazioni e loro proprietà

Nei livelli 3-5, gli studenti mettono a fuoco il significato della moltiplicazione e della divisione e le loro relazioni. E' molto importante che subito all'inizio di questi anni di scuola gli studenti capiscano il significato delle varie quantità in un problema di moltiplicazioni. Nella moltiplicazione, diversamente dall'addizione, i numeri nel problema possono riferirsi a diverse unità. Per esempio, se gli studenti stanno risolvendo il problema 29×4 per trovare quante zampe hanno 29 gatti, 29 è il numero di gatti (o numero di gruppi) e 4 è il numero di zampe in ogni gatto (o numero di elementi in ogni gruppo). Attraverso la rappresentazione di problemi moltiplicativi con disegni, diagrammi, o materiali concreti, gli studenti imparano a essere chiari riguardo a ciò che ogni numero rappresenta nel problema.

Un ulteriore significato per la moltiplicazione si sviluppa quando gli studenti costruiscono e descrivono tabelle, mostrando come il prodotto è collegato al fattore. Questo modello è importante per aiutare gli studenti a sviluppare una comprensione di come si

comportano le moltiplicazioni (per esempio, che $3 \times 4 = 4 \times 3$). Le tabelle forniscono anche un modello in cui gli studenti possono vedere le relazioni tra fattori pari. Per esempio, una tabella 20×6 può essere divisa a metà e le metà possono essere affiancate per formare una tabella 10×12 , mostrando che $10 \times 12 = 20 \times 6$. Studiando fattori e multipli, gli studenti accrescono le loro conoscenze sulle proprietà dei numeri (p.e. trovando che alcuni numeri sono primi e altri composti) e sviluppano la percezione del numero riguardo a cosa succede quando certi numeri sono moltiplicati o divisi (per esempio, può un multiplo di 20 essere sempre diviso per 4?).

Le divisioni hanno diversi significati, che dipendono dal contesto. Per esempio, se ci sono 116 persone che viaggiano in autobus e ogni autobus può contenere 29 persone, quanti autobus occorrono? In questo caso, $116 : 29$ significa che ci sono 116 persone, che ci saranno 29 persone in ogni gruppo, ed è necessario trovare il numero di gruppi. In un altro problema, possiamo conoscere il numero di gruppi per trovare quanti elementi ci sono in ogni gruppo. Se 116 persone si dividono equamente in 4 autobus, quante persone ci sono in ogni autobus? In questo caso, $116 : 4$ indica che noi conosciamo il numero totale e il numero di gruppi, ma non quanti elementi ci sono in ogni gruppo. Gli studenti dovrebbero riconoscere tutti e due i tipi di problemi come situazioni di divisione, dovrebbero essere abili a formalizzare e risolvere ogni tipo di problema, e dovrebbero conoscere il significato dei risultati - sono 29 bus o 29 persone per bus?

Nel terzo anno di scuola, a molti studenti piace pensare alle moltiplicazioni come a ripetizioni di addizioni e alle divisioni come a ripetizioni di sottrazioni. Siccome in questi anni lavorano con una varietà di problemi e di modelli, gli studenti dovrebbero aumentare la loro conoscenza di moltiplicazione e di divisione. In particolare, dovrebbero sviluppare idee sulla proprietà distributiva della moltiplicazione, sulla quale sono basate molte efficienti strategie risolutive, compreso l'algoritmo moltiplicativo standard. Per esempio, gli studenti possono calcolare 7×28 risolvendo questo problema in ognuno dei seguenti modi- tutte applicazioni della proprietà distributiva (Figura 5.2.).

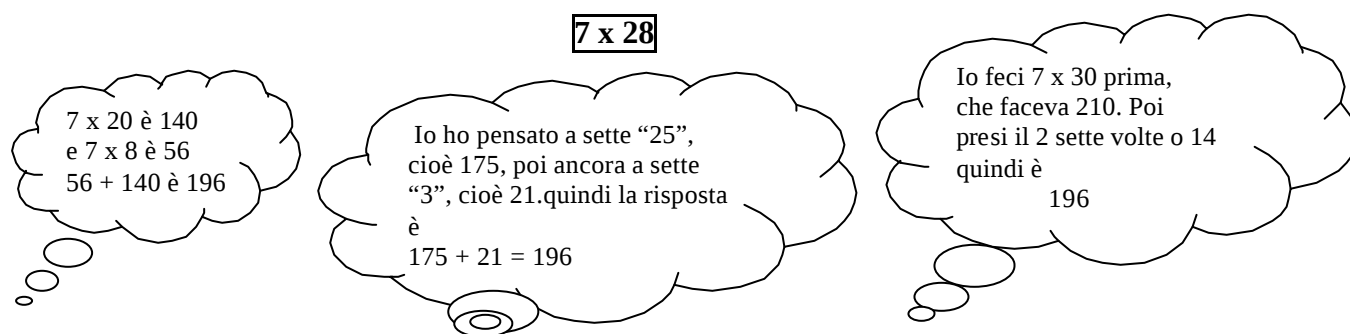


Figura 5.2. Soluzione dell'operazione 7×28 .

- **Calcolo e stima**

Gli studenti nei livelli 3-5 dovrebbero acquisire scioltezza nelle moltiplicazioni e nelle divisioni con i numeri interi e dovrebbero cominciare a estendere la loro comprensione di queste operazioni per lavorare con frazioni familiari, con decimali, e con percentuali. L'obiettivo è, per gli studenti, sviluppare la padronanza nel calcolo sulla base della loro comprensione del sistema numerico in base dieci, delle loro conoscenze di un largo repertorio

di relazioni fra numeri che includono le conoscenze di base, e di una certa comprensione delle proprietà delle operazioni.

All'inizio dei livelli 3-5, gli studenti cominciano a focalizzare la loro attenzione sull'apprendimento di relazioni fra moltiplicazioni e divisioni e sul pensare a strategie, che li aiuteranno a capire i concetti sulle moltiplicazioni ad una cifra e quelli sulle divisioni corrispondenti. In questi livelli, gli studenti dovrebbero sviluppare approcci al fare calcoli con tutte le operazioni basati su concetti matematici e su relazioni che per loro abbiano un significato. Strategie importanti includono la scomposizione dei numeri che compaiono nel problema, come nella prima soluzione nella Figura 5.2, o creando un problema equivalente che sia più accessibile, come usare 7×30 come punto di partenza. Gli studenti che usano approcci come questi richiamano alla mente la percezione che hanno dei numeri e delle operazioni (p.e. usando la proprietà distributiva o associativa).

Quando gli studenti confrontano le strategie in classe imparano gli uni dagli altri, analizzano l'efficacia e la generalità di vari approcci, e sono incoraggiati a provare le strategie degli altri. In passato, la pratica scolastica più diffusa è stata insegnare un solo algoritmo per ogni operazione. In realtà, esiste più di un algoritmo efficiente, accurato e matematicamente appropriato per ogni operazione. Inoltre, alcuni metodi di notazione di algoritmi tendono a oscurare, piuttosto che illuminare, il significato e le fasi della procedura... Confrontando e analizzando vari approcci, gli studenti possono imparare di più sulle operazioni che stanno eseguendo. Gli algoritmi convenzionali per calcolare moltiplicazioni e divisioni possono essere presi in considerazione verso la fine dei livelli 3-5 come un metodo di calcolo efficiente. Come per tutti gli altri approcci, gli studenti che usano questi algoritmi dovrebbero essere in grado di esporre e giustificare le loro procedure. Il seguente esempio illustra come un'insegnante aiuta gli studenti ad analizzare e confrontare le loro procedure di calcolo per le divisioni.

Gli studenti della classe quinta di Ms. Sparks stanno confrontando i loro compiti: risolvere il problema $728 \div 34$. Ms. Sparks chiede ad alcuni studenti di scrivere alla lavagna il loro lavoro per discuterlo. Sceglie di proposito studenti che si sono avvicinati al problema in modi differenti. Mentre scrivono alla lavagna, Ms. Sparks gira tra gli altri, controllando i loro compiti. Henry ha scritto questa soluzione:

$34 \times 10 =$	340
$34 \times 20 =$	680
680	728
+34	-714
-----	-----
714	14

Henry spiega alla classe, "Venti 34 più uno fa 21 volte 34. Sapevo di esserci vicino. Non pensavo di poter aggiungere più 34, quindi ho sottratto 714 da 728 e ho ricavato 14. Dopo avevo 21 col resto di 14."

Michaela ha mostrato la sua soluzione:

$$\begin{array}{r} 21 \\ 34 \overline{) 728} \\ \underline{68} \\ 48 \\ 34 \\ \underline{14} \end{array}$$

Michaela: il 34 sta nel 72 due volte e dà 68. Ora devi sottrarre e abbassare l'8, poi il 34 sta nel 48 una volta.

Ricky: Non so come farlo.

Michaela: Dividi, poi moltiplichi, sottrai, poi abbassi.

Ricky: Continuo a non capire.

Ms. Sparks: C'è qualcuno che vede qualcosa di simile nei lavori di Michaela e Henry?

Christy: Tutti e due hanno diviso 728 per 34.

Ms. Sparks: Bene, avevano tutti e due lo stesso problema. Vedi altri aspetti simili nel loro modo di risolvere il problema?

Fanshen: Beh, c'è un 680 in quello di Henry e un 68 in quello di Michaela.

Ms. Sparks: Quindi, cos'è questo 68, Michaela?

Michaela: Uhm, è 2×34 .

Ms. Sparks: Oh, è proprio 2×34 ?

Samir: Oh! È 20 volte 34. E' come il 20×34 di Henry.

Henry: Ma 20 per 34 fa 680, non 68.

Ms. Sparks: Quindi cosa succederebbe se io scrivessi uno zero qui per mostrare che questo è 680? Questo può aiutarvi a vedere altre similitudini?

$$\begin{array}{r} 21 \\ 34 \overline{) 728} \\ \underline{680} \\ 48 \\ 34 \\ \underline{14} \end{array}$$

Maya: Tutti e due hanno fatto 20×34 come prima cosa.

Rita: Ho capito. Michaela ha calcolato quanti doveva toglierne, e ha ottenuto 48, e poi ha tolto una volta ancora 34.

Mentre la classe continua lo studio sulle divisioni, Ms. Sparks torna a confrontare le strategie di calcolo per aiutare tutti gli studenti a spiegare e a giustificare il proprio approccio.

Nel passaggio dal terzo al quinto livello, gli studenti dovrebbero consolidare e praticare un piccolo numero di strategie per moltiplicazioni e divisioni che essi capiscono bene e che possono usare con facilità. Sviluppare più di un metodo per ogni operazione, permette agli studenti di scegliere un metodo che sia il più appropriato ai numeri in un particolare problema. Per esempio, per risolvere 298×42 , può essere più facile pensare al problema come $(300 \times 42) - (2 \times 42)$, così come 525×12 è facile risolvere moltiplicando 525 prima per 10, poi per 2, e sommando i due sottoprodotti.

Gli studenti dovrebbero avere ampie opportunità di usare calcoli mentali e dovrebbero imparare a scegliere attentamente tra metodi mentali, uso di carta e penna, uso di calcolatrici, o combinazioni di questi metodi. Durante questi anni, useranno frequentemente la calcolatrice per risolvere problemi. Comunque ci saranno anche volte in cui affineranno le loro capacità con concetti di base o con calcoli mentali e scritti senza la calcolatrice. L'obiettivo nei livelli 3-5 è calcolare accuratamente ed efficientemente con i numeri interi di grandezza ragionevole - numeri che possono essere usati ogni giorno - usando strategie che abbiano senso per loro e, a volte, ricorrendo a strumenti come la calcolatrice. Nelle addizioni, dovrebbero essere capaci di operare con numeri grandi che hanno caratteristiche speciali nel loro sistema numerico (per esempio quant'è 100 volte 100? Quant'è $10.000 + 2.500$?).

Gli studenti svilupperanno strategie di stima del calcolo a questi livelli e cominceranno a valutare regolarmente la ragionevolezza di problemi e soluzioni. Per esempio, prima di cominciare a risolvere un problema, dovrebbero guardare i numeri del problema e pensare a come eseguire le operazioni che saranno adatte a questi numeri. Le risposte saranno maggiori di 50? e di 100? entro il 1000? più di 1000? quale limite maggiore o minore può essere proposto per la soluzione (p.e. 68×34 deve essere compreso tra 1800 e 2800, in quanto 60×30 è più piccolo di 68×34 e 70×40 è più grande). Inoltre, gli studenti dovrebbero incontrare situazioni in cui la stima fa parte del procedimento da scegliere. Quando una stima è necessaria, gli studenti devono considerare fra quali valori sia sufficiente dare una stima e se è meglio nel contesto particolare che la stima sia per difetto o per eccesso.

Con le basi che gli studenti hanno gettato nel comprendere e nel mettere in relazione frazioni e decimali, possono cominciare a risolvere una varietà di problemi che comprendono frazioni semplici e decimali. In questi livelli, l'importante non è sviluppare procedure generali per risolvere tutti i problemi con le frazioni ma sviluppare soluzioni basate sulla percezione del numero e usando modelli di area e di linee per i numeri. Per esempio, in una classe quinta, gli studenti lavorano su questo problema: Jamal ha invitato 7 amici a pranzo. Pensa che ognuna delle 8 persone mangerà un panino e mezzo. Quanti panini dovrebbe preparare? Gli studenti potrebbero fare un disegno e contare il numero di panini o fare ragionamenti basati sulle loro conoscenze di numeri e operazioni: questo vorrà dire considerare 8 panini interi e 8 mezzi panini; poiché 2 mezzi panini fanno un panino, gli otto mezzi panini formeranno quattro ulteriori panini, quindi Jamal ha bisogno di preparare 12 panini. Gli studenti dovrebbero anche usare le loro conoscenze sulle relazioni tra frazioni per stimare un risultato ragionevole (p.e. $1/3 + 2/5$ deve essere minore di 1 poiché tutte e due le frazioni sono minori di un mezzo).

Standard 2: Modelli, funzioni e algebra

I programmi di matematica devono porre attenzione ai modelli, alle funzioni, ai simboli in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali;
- usino forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche;
- usino modelli matematici e analizzino le variazioni in contesti sia reali sia astratti.

Elaborazione: livelli 3-5

Sebbene algebra non sia una parola che si è comunemente sentita nelle aule dei livelli 3-5, le ricerche matematiche e le conversazioni degli studenti in queste classi frequentemente includono elementi di ragionamento algebrico. Queste esperienze e conversazioni forniscono un ricco contesto per un conoscenza matematica avanzata e sono precedenti importanti per studi più formalizzati di algebra nella scuola media e secondaria.

Nei livelli 3-5, le idee algebriche emergono e sono indagate mentre gli studenti identificano o costruiscono modelli numerici e geometrici, descrivono verbalmente modelli e li rappresentano con tabelle o simboli, cercano e applicano relazioni tra quantità variabili per fare previsioni, fare e verificare generalizzazioni (o regole) che sembrano funzionare in situazioni particolari, usano grafi per descrivere modelli e fare previsioni, ed esplorano le proprietà dei numeri. Gli studenti considerano anche la nozione di variabile e iniziano a usarla come sostituzione per rappresentare una quantità incognita o variabile.

Lo standard Modelli, Funzioni e Algebra in questa fascia di livello comprende un importante insieme di idee matematiche che possono impegnare e stimolare la riflessione degli studenti nei livelli 3-5. Una varietà di esempi è utilizzata per chiarire i contenuti di questo standard ai livelli 3-5 e mostrare come spesso le idee algebriche si presentano mentre gli studenti esplorano e acquistano abilità e confidenza nell'operare con numeri, operazioni, misura, dati e geometria.

Punti nodali per livelli 3-5

- **Capire i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- identificare, descrivere ed estendere modelli geometrici e numerici compresi modelli di ingrandimento e di rimpicciolimento;
- rappresentare e registrare modelli usando strumenti come tabelle e grafici;
- identificare e descrivere relazioni tra due quantità che variano contemporaneamente (p.e. il perimetro di un quadrato e l'area;
- studiare e descrivere situazioni che implicano relazioni inverse (p.e. più amici meno biscotti per ogni persona, più grande il denominatore in una frazione dell'unità più piccola è la quantità);
- identificare, esprimere e verificare generalizzazioni e usarle per fare previsioni (p.e. raddoppiare un numero e poi raddoppiarlo di nuovo è lo stesso che moltiplicarlo per quattro).

- **Usare forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- identificare e usare relazioni tra operazioni per risolvere problemi (p.e. la moltiplicazione è l'inversa della divisione);

- identificare e usare proprietà algebriche delle operazioni per risolvere problemi (p.e. 28×7 è equivalente a $(7 \times 20) + (7 \times 8)$ oppure $(7 \times 30) - (7 \times 2)$);
 - sviluppare il concetto di variabile come utile strumento per rappresentare quantità incognite;
 - usare variabili (caselle, lettere o altri simboli) per risolvere problemi o per descrivere regole generali.
- **Usare modelli matematici e analizzare le variazioni in contesti sia reali sia astratti**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- rappresentare ed esaminare come un cambiamento di una variabile è collegato al cambiamento di una seconda variabile (p.e. l'altezza di una pianta con il tempo);
- identificare e descrivere situazioni con tassi di variazione.

Discussione

• **Modelli, funzioni e relazioni**

Gli studenti dei livelli 3-5 sono incoraggiati a cercare modelli e a esprimerli matematicamente (in parole o simboli) per scoprire, comprendere e usare proprietà dell'algebra e per risolvere una varietà di problemi. Identificare e operare con vari modelli aiuta gli studenti a sviluppare la capacità di classificare e organizzare informazioni in modo sistematico, e a fare sì che i modelli matematici varino nelle loro strutture. Collegare modelli a numeri, geometria e misura li aiuta a comprendere connessioni tra ambienti matematici. Rappresentare un modello sia geometricamente sia numericamente spinge gli studenti nella comprensione della situazione e fornisce molteplici prospettive di modelli e relazioni. Per esempio, sviluppare ed esplorare un disegno di numeri quadrati (Figura 5.3) ed esprimere il modello che emerge in frasi matematiche rendono più evidenti le proprietà di questi numeri. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a spiegare questi modelli verbalmente e a fare previsioni su ciò che accadrà più avanti. Gli studenti del livello 4 potrebbero usare carta centimetrata per ritagliare quadrati, iniziando con un quadrato 1×1 , poi 2×2 e così via.

Con una serie di cinque o sei quadrati possono sperimentare, per mezzo delle loro dimensioni relative e dei modi di rappresentarli, le regolarità che scoprono nel modello.

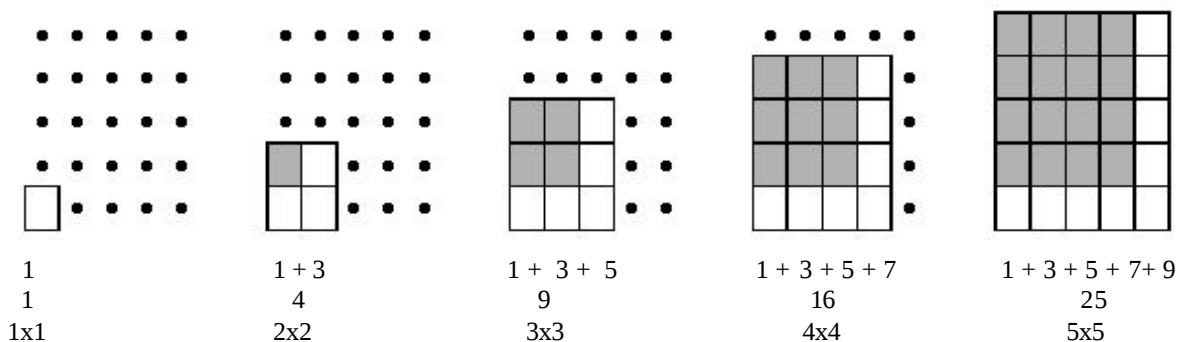


Figura 5.3. Numeri quadrati

Una studentessa nota che un quadrato entra sempre nell'angolo del quadrato successivo più largo lasciando una L formata nello spazio vuoto. Verbalizza questo modello e descrive l'area del quadrato più largo come uguale all'area di quello più piccolo più “due lati” più uno. Rappresenta la sua soluzione scrivendo:

$$\text{area di un quadrato } 5 \times 5 = \text{area di un quadrato } 4 \times 4 + 4 + 4 + 1$$

Un altro studente nota che l'area del quadrato si incrementa di un numero dispari in ogni nuovo quadrato. Genera i numeri sotto ogni disegno e scrive:

$$\text{area del terzo quadrato} = 1 + 3 + 5$$

Le idee e il ragionamento algebrico sono inerenti alle discussioni che hanno gli studenti mentre provano a riconoscere modelli, a descriverli ed eventualmente a rappresentarli. Sono i contesti più appropriati per gli studenti dei livelli 3-5 nei quali investigare e descrivere relazioni tra quantità che variano in certi modi prevedibili. All'inizio, le descrizioni possono essere espresse con l'uso di parole e successivamente con relazioni funzionali più esatte. Mentre gli studenti esaminano relazioni, fanno generalizzazioni e previsioni. Ciò è appropriato per studenti del terzo livello per sentirsi convinti che hanno stabilito una regola per una specifica serie di esempi. Per la fine del quinto livello, gli studenti dovrebbero essere capaci di giustificare generalizzazioni attraverso il ragionamento sulle strutture delle relazioni. Per esempio, si consideri il seguente problema:

Qual è l'area della superficie della torre di cubi? Quando la linea dei cubi è estesa, come varia l'area della superficie?

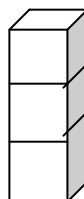


Figura 5.4. Problema della torre di cubi

Uno studente del quarto livello potrebbe costruire una tabella e decidere dall'esame della tabella che moltiplicando il numero di cubi per 4 e aggiungendo 2 si ottiene il numero di quadrati unitari “perché succede ogni volta”.

Numero di cubi N	Area superficie (quadrati unitari) S
1	6
2	10
3	14
4	18

Figura 5.5. Soluzione del problema della torre di cubi

Uno studente del quinto livello dovrebbe essere impegnato a giustificare la regola in riferimento al modello geometrico. Per esempio, “è quattro volte il numero dei cubi più due perché sono sempre 4 unità quadrate attorno a ogni cubo e una fuori di ogni estremo della torre” oppure “è 5 per i cubi estremi, poi 4 in più per tutti i cubi in mezzo, perché i cubi estremi ne hanno 6 ma una è coperta e i cubi in mezzo ne hanno 6 ma due sono coperte”. Gli studenti potrebbero ancora notare la natura iterativa del modello: “Addiziona quattro al numero precedente”. Una volta che è stabilito un modello, gli studenti possono usarlo per rispondere a domande come “qual è l’area della superficie di una torre di 50 cubi?” oppure “quanti cubi ci sarebbero in una torre con l’area della superficie di 242 unità quadrate?”.

In questo esempio, alcuni studenti possono utilizzare una tabella per organizzare e ordinare i loro dati, mentre altri utilizzano oggetti concreti per modellizzare la crescita di una sequenza aritmetica. Alcuni studenti possono usare parole, mentre altri usano numeri o simboli per esprimere la generalizzazione da loro trovata. Tutto questo è un modo importante e appropriato di organizzare ed esprimere idee sulle funzioni, e gli studenti nei livelli 3-5 dovrebbero sentirsi a loro agio muovendosi in mezzo a loro.

- **Struttura e notazione simbolica**

Esempi di proprietà algebriche quali commutatività, associatività, distributività della moltiplicazione si presentano mentre gli studenti operano con i numeri e dovrebbero essere il punto centrale delle discussioni informali e delle indagini degli studenti.

5×7 è lo stesso che 7×5 ? invertendo i fattori si trova sempre lo stesso prodotto? se i fattori sono più grandi? se i fattori sono numeri decimali? come puoi giustificare che la proprietà commutativa vale per tutti i numeri? Gli studenti potrebbero usare un modello di area per mostrare che 4×5 e 5×4 hanno la stessa rappresentazione fisica e gli stessi quadrati unitari di area. La stessa specie di modello può essere usato poi per mostrare che la commutatività vale anche per le frazioni e i decimali. Gli studenti possono anche determinare se la commutatività è una caratteristica delle altre operazioni (addizione, sottrazione, divisione).

A volte gli studenti usano, naturalmente e intuitivamente, alcune proprietà mentre calcolano. Per esempio, uno studente potrebbe moltiplicare 8 e 14 usando la proprietà distributiva ($8 \times 10 + 8 \times 4$). L’insegnante può iniziare a formalizzare e ampliare la comprensione intuitiva degli studenti della proprietà distributiva. L’insegnante può voler focalizzare la discussione sul processo descritto da questo studente. Per esempio, questa tecnica (scomporre un fattore in parti) può essere usata in altri problemi oppure funziona proprio con un fattore di 14? può 14 essere scomposto in altri modi (p.e. 7 e 7) all’interno di questa tecnica? Perché questo potrebbe essere vantaggioso? Possiamo vedere perché la proprietà distributiva è vera usando un modello di area?

La discussione sulle proprietà, oltre a servire da strumento per risolvere una serie di problemi, è importante perché gli studenti consolidino le loro nozioni intuitive. Ciò dà loro la possibilità di ampliare e completare la riflessione su una strategia e costruire una base per applicarla in altre situazioni. Facendo generalizzazioni sulle tecniche le impiegano come un modo per estendere la propria familiarità con la matematica.

A questa fascia di livello l'idea e l'utilità di variabile (etichetta, lettera o simbolo) dovrebbe emergere ed essere sviluppata. Mentre gli studenti esaminano modelli e notano relazioni, dovrebbero essere invitati a rappresentare il loro pensiero. All'inizio questo può avvenire con parole ("moltiplicando il numero di cubi per 4 e aggiungendo 2 si ottiene l'area della superficie della torre") e successivamente gli studenti possono anche registrare un modello usando una notazione con variabili, informale o formale, $4xN+2=S$. La notazione con variabili è uno strumento importante specialmente mentre gli studenti iniziano a fare generalizzazioni.

- **Variazione e modellizzazione**

Rappresentare e descrivere variazioni è un'idea matematica importante che richiama gli strumenti dell'algebra. Per esempio, come parte di un progetto di scienze, gli studenti hanno piantato semi e registrato la crescita di una pianta in funzione del tempo.

Tempo (giorni)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Altezza (cm)	0	0	1	2	4	6	7	8	8	9	

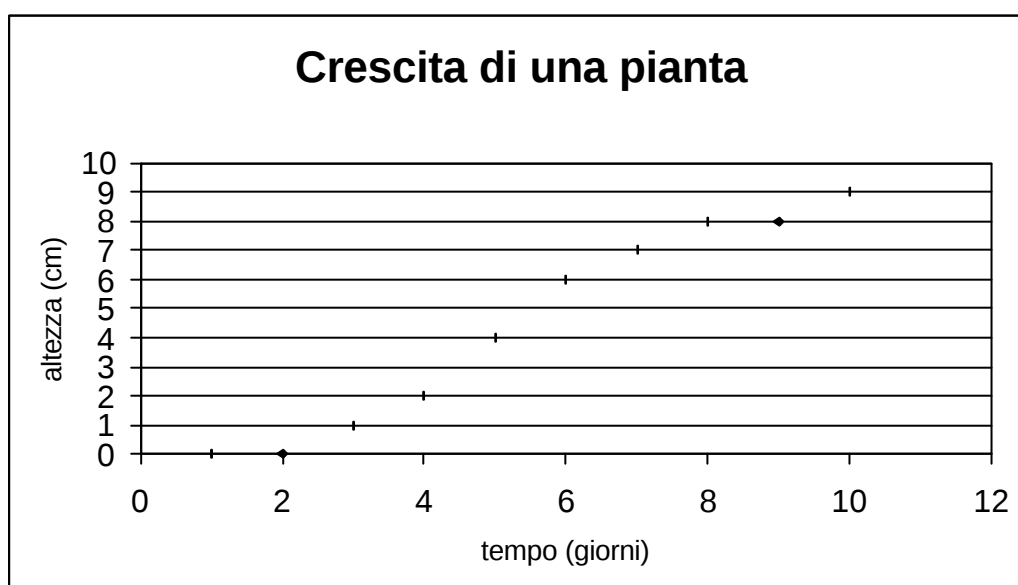


Figura 5.6. Crescita pianta

Usando i dati raccolti in tabella e grafico (Figura 5.6), gli studenti dovrebbero essere invitati a descrivere come il tasso di crescita varia in funzione del tempo. Per esempio, uno studente potrebbe esprimere il tasso di crescita in questo modo: "la mia pianta cresce lentamente per i primi 3 giorni, poi inizia a crescere più rapidamente". Dovrebbero avere più opportunità di raccogliere informazioni e descrivere le relazioni rappresentate nei dati – alcune che variano in un modello coerente (p.e. area della superficie e numero di cubi) e alcune che variano secondo modelli non regolari (p.e. la temperatura all'aria aperta in un periodo di giorni di scuola).

Standard 3: Geometria e senso dello spazio

I programmi di matematica devono essere attenti alla geometria e al senso dello spazio in modo che tutti gli studenti:

- analizzino le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali;
- selezionino e usino diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici;
- riconoscano l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche;
- usino la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica.

Elaborazione: livelli 3-5

La geometria comprende lo studio di figure bi- e tridimensionali, proprietà e relazioni di queste figure e movimenti e posizioni nello spazio. Nella scuola primaria gli studenti costruiscono ed esaminano figure, descrivono le loro grandezze e le ordinano per dimensione, studiano quali figure tridimensionali rotolano e quali no, oppure quali quadrilateri hanno angoli retti e quali no. Iniziano a sviluppare e usare un vocabolario di base relativo a queste figure ma non sviluppano precisi significati per molti dei termini che usano.

Le crescenti capacità di ragionamento degli studenti nei livelli 3-5 permettono loro di indagare problemi geometrici di crescente complessità e di studiare come termini geometrici si collegano a oggetti geometrici. Mentre passano dal livello 3 al livello 5, sviluppano chiarezza e precisione nel descrivere proprietà di oggetti geometrici e nel classificare oggetti per mezzo di queste proprietà all'interno di categorie come rettangolo, triangolo, piramide o prisma. Apprendono le relazioni tra oggetti bi- e tridimensionali descrivendo le caratteristiche di oggetti tridimensionali, rappresentando oggetti tridimensionali in due dimensioni e costruendo o identificando oggetti tridimensionali analizzando rappresentazioni bidimensionali di questi oggetti, come viste, sviluppi o disegni isometrici. Sviluppano conoscenze su come le figure geometriche sono in relazione l'una con l'altra e iniziano a esprimere chiaramente argomenti geometrici sulle proprietà di queste figure. Mentre gli studenti indagano proprietà e relazioni geometriche, il loro lavoro è strettamente connesso con altri elementi matematici, specialmente misura e numeri.

Lo studio della geometria nei livelli 3-5, come nei pre-K-2, dovrebbe essere attivo. Ciò richiede l'uso di immagini visive e oggetti concreti. Gli studenti scelgono, plasmano, modellizzano, tracciano, misurano e costruiscono. Fanno e provano congetture e giustificano il loro pensiero. Questa esplorazione richiede l'accesso a una varietà di strumenti concreti come carta millimetrata, regoli, compassi, modelli a blocchi, mappe e solidi geometrici ed è molto rafforzata da software che sostengono l'esplorazione.

Punti nodali per i livelli 3-5

- **Analizzare le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- identificare, confrontare e analizzare grandezze di figure geometriche bi- e tridimensionali;
 - classificare figure bi- e tridimensionali secondo le loro grandezze e sviluppare definizioni di classi di figure (p.e. triangolo, piramide);
 - indagare, descrivere e ragionare sui risultati di suddivisioni, combinazioni e trasformazioni di figure usando modelli e rappresentazioni;
 - indagare e ragionare su proprietà di figure geometriche (p.e. il numero delle diagonali di un poligono regolare);
 - costruire e usare un vocabolario geometrico per descrivere figure bi- e tridimensionali;
 - comprendere e dimostrare congruenze;
 - fare congetture su proprietà e relazioni di figure e usare ragionamento spaziale e strumenti geometrici per verificarle.
- **Selezionare e usare diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- descrivere posizione e movimento usando il linguaggio comune e il vocabolario geometrico (p.e. posizione di un oggetto in una stanza o in una griglia);
 - costruire un sistema di coordinate (con assi, origine e scala) e usarlo per segnare e leggere la posizione per mezzo di coppie di coordinate;
 - costruire e usare sistemi di coordinate per rappresentare posti reali (p.e. ufficio postale, scuola ecc.) in un'area;
 - rappresentare rettangoli e triangoli rettangoli in un sistema di coordinate e identificare i vertici con le coordinate;
 - trovare distanze tra punti lungo rette orizzontali e verticali di un sistema di coordinate;
 - data una distanza, trovare coppie di punti nel sistema di coordinate separati da tale distanza.
- **Riconoscere l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- prevedere i risultati di scorrimenti, traslazioni e rotazioni delle figure bidimensionali;

- descrivere un movimento o una serie di movimenti che mostrano che due figure sono congruenti;
 - identificare e descrivere simmetrie assiali e centrali in varie figure bidimensionali;
 - esplorare simmetrie in oggetti tridimensionali.
- **Usare la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- identificare una figura tridimensionale da una serie di vedute bidimensionali (p.e. far corrispondere un solido con la sua vista di fronte, di lato e dall'alto);
- visualizzare e abbozzare figure tridimensionali in due dimensioni (p.e. facendo viste, reticoli o disegni isometrici);
- descrivere e disegnare figure geometriche da immagini mentali ricordate;
- usare orientamento spaziale per navigare fino a un certo punto da posizioni di partenza diverse.

Discussione

- **Figure e strutture**

Gli studenti nei livelli 3-5 focalizzano il loro studio sulle figure identificando e descrivendo le proprietà di figure bi- e tridimensionali. Nella scuola primaria gli studenti hanno iniziato a costruire le loro idee su cosa è un triangolo o un cilindro, ma in questi livelli gli studenti dovrebbero sviluppare modi più precisi di descrivere le figure. Per consolidare queste idee, gli studenti disegnano e costruiscono figure, confrontano e discutono le loro grandezze, le classificano e sviluppano e considerano definizioni in base a proprietà delle figure (p.e. che un triangolo ha tre lati dritti e tre angoli). Per esempio, molti studenti in questi livelli identificheranno facilmente le prime due figure nella Figura 5.7 come triangoli ma ci sarà bisogno di spendere più tempo discutendo perché la terza figura, che non viene vista come “simile a un triangolo”, tuttavia è un triangolo. Nei livelli 3-5, gli studenti definiscono figure descrivendo caratteristiche che sono comuni a tutti gli esempi di una figura. Descrivono anche grandezze che non definiscono la figura, come la posizione.

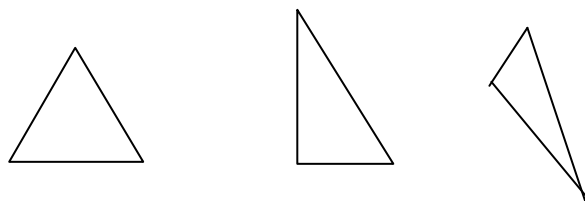


Figura 5.7. Triangoli

Gli studenti dovrebbero anche discutere le relazioni tra classi di figure. Hanno necessità di una varietà di materiali per indagare queste relazioni – possono esaminare e confrontare direttamente figure bi- e tridimensionali, strumenti per disegnare figure e software per costruzioni geometriche. In tale ambiente software gli studenti possono, per esempio, costruire un parallelogramma e indagare come possono manipolarlo per costruire nuovi parallelogrammi: quali caratteristiche della figura cambiano? quali rimangono le stesse? gli

studenti potrebbero esaminare i due quadrilateri sotto per esplorare le somiglianze e le differenze usando software dinamico geometrico (Battista 1998). Quali sono le caratteristiche di ognuno e come sono differenti?

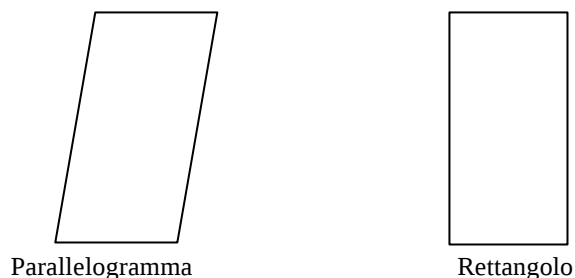


Figura 5.8. Quadrilateri con l'uso di software geometrico dinamico

Gli studenti nei livelli 3-5 dovrebbero ragionare sulle relazioni geometriche, indagare le proprietà delle figure e fare congetture su queste proprietà. Per esempio, una classe di quarto livello potrebbe considerare il seguente problema: presi due triangoli congruenti qualsiasi, unirli lungo lati di uguale lunghezza. Che figura si ottiene? Gli studenti potrebbero disegnare vari triangoli, poi tracciare o tagliare due coppie di ognuno per formare figure. Questo può guidarli alla congettura che i parallelogrammi sono formati da due triangoli congruenti oppure forse che i lati opposti di parallelogrammi sono congruenti. Comunque se uno dei triangoli è “invertito” allora si formerà un aquilone invece di un parallelogramma.

Nel quinto livello, gli studenti fanno uso frequente di disegni e figure concrete per indagare e dimostrare le loro idee ma svilupperanno anche modelli mentali di figure e loro proprietà. Al quinto livello gli studenti dovrebbero operare per sviluppare argomentazioni matematiche chiare sul perché una relazione geometrica è vera, per esempio: “non è possibile costruire un triangolo con due angoli retti perché se inizi con un lato del triangolo orizzontale, gli altri due lati vanno su verticali. Sono paralleli, e non possono mai incontrarsi, così non puoi ottenere un triangolo”.

È importante che gli studenti in questi livelli lavorino con oggetti tridimensionali così come con gli oggetti bidimensionali. Molto del loro lavoro con oggetti tridimensionali implicherà descrizioni, confronti e classificazioni di queste figure. Il lavoro con prismi rettangolari è strettamente connesso allo studio del volume, mentre sviluppano l'idea di scomporre una figura tridimensionale in cubi unitari per misurarne il volume.

Quando descrivono figure gli studenti nei livelli 3-5 imparano a usare una terminologia matematica sentendola usare ripetutamente nel contesto. Mentre descrivono figure dovrebbero sentire, acquisire familiarità e usare termini matematici come parallelo, perpendicolare, faccia, spigolo, vertice, angolo, trapezoide, prisma, e così via, per comunicare le loro idee. Gli studenti hanno bisogno di ampliare il loro vocabolario così da poter descrivere idee geometriche con maggiore precisione. Per esempio, per molti studenti, due figure sono la “stessa” solo se sono la stessa in dimensione, forma e orientamento. Così, un quadrato ruotato attorno al centro di 45° è spesso visto dagli studenti come una figura diversa – un rombo. Quando gli studenti imparano la parola congruente, la loro idea di identità diventa più coerente con ciò che vogliono dire i matematici.

- **Coordinate geometriche e altri sistemi**

Nei livelli 3-5 gli studenti si basano sull'idea introdotta in pre-K-2 che possono collocare punti e misurare distanze usando una griglia di coordinate. Imparano come usare due numeri per identificare punti su questa griglia e come navigare sulla griglia usando punti di riferimento e misure. Gli studenti possono tracciare percorsi tra posizioni, confrontare lunghezze di percorsi diversi e esaminare simmetrie, congruenze e similitudini di figure su una griglia di coordinate. Mentre le loro idee sui sistemi numerici si espandono per includere i numeri negativi, possono operare in tutti e quattro i quadranti (per il livello 5). Il loro lavoro in coordinate dovrebbe essere messo in relazione con altre specie di mappe per riconoscere che sistemi differenti possono essere usati per denotare posizioni e misurare distanze.

- **Trasformazioni e simmetrie**

Lo studio degli studenti sulla congruenza conduce direttamente alla considerazione di tre importanti specie di trasformazioni: simmetria, traslazione e rotazione. Studenti più giovani possono aver “provato” che due figure sono congruenti facendole combaciare fisicamente una sull'altra. Ma gli studenti nei livelli 3-5 possono sviluppare maggiore precisione nella descrizione del movimento necessario a mostrare la congruenza (“ruotalo di 90°” oppure “traslalo verticalmente”). Sebbene gli studenti non svilupperanno una comprensione completa della similitudine fino ai livelli medi quando focalizzeranno il ragionamento sulla proporzionalità, gli studenti in questi livelli possono iniziare a riflettere sulle trasformazioni di “dilatazione” o “riduzione”. Quando una figura è ingrandita, che cosa rimane uguale, che cosa cambia?

Gli studenti in questi livelli ampliano la loro nozione di simmetria. Nei livelli pre-K-2 gli studenti focalizzano molto spesso una retta di simmetria in una figura o modello. Nei livelli 3-5 gli studenti esplorano figure con più di una retta di simmetria. Per esempio, dovrebbero esplorare questioni come queste:

- in quanti modi puoi piazzare uno specchio in un quadrato in modo che puoi vedere il quadrato esattamente uguale all'originale? questa risposta è vera per tutti i quadrati?
- puoi costruire un quadrilatero esattamente con due rette di simmetria? Se sì, che specie di quadrilatero è?
- puoi costruire un quadrilatero esattamente con una retta di simmetria? Se sì, che specie di quadrilatero è? Puoi costruire un quadrilatero senza rette di simmetria?

Gli studenti descrivono anche la simmetria rotazionale più precisamente mentre imparano di più su cerchi e misura degli angoli. Sebbene i giovani studenti spesso creano figure simmetriche rotazionalmente, per esempio con modelli a blocchi, hanno difficoltà a descrivere ciò che vedono. Sanno ripetere il modello in alcuni modi, ma non sono sicuri del come. Nei livelli 3-5, gli studenti possono sviluppare descrizioni di figure come quella in Figura 5.9: “esce dal mezzo la stessa parte su ogni lato”, “se lo ruoti di 90°, è esattamente lo stesso” oppure “ci vorrebbero quattro giri per tornare da dove hai iniziato ma non puoi dire dove hai iniziato a meno che lo segni perché si vede sempre la stessa cosa”.

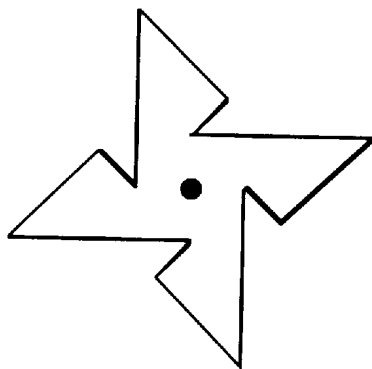


Figura 5.9. Simmetria rotazionale

- **Visualizzazione e senso spaziale**

Mentre gli studenti nei livelli 3-5 esaminano proprietà e relazioni di figure bi- e tridimensionali, dovrebbero essere invitati a ragionare su queste proprietà usando relazioni spaziali (p.e. ragionando sull'area di un triangolo visualizzandola in relazione a un rettangolo). Oltre allo studio reale di modelli fisici di questi oggetti, dovrebbero anche sviluppare e usare immagini mentali. Gli studenti di questa età sono pronti a manipolare mentalmente oggetti e possono trarre profitto dalle esperienze che li impegnano e possono verificare fisicamente. Per esempio, a uno studente potrebbe essere chiesto di immaginare e poi disegnare o scegliere un oggetto con una certa serie di attributi (p.e. tre lati, un angolo retto, due segmenti della stessa lunghezza).

Molto del lavoro degli studenti con figure tridimensionali implica visualizzazioni. Attraverso la rappresentazione di figure tridimensionali in due dimensioni e costruendo figure tridimensionali da rappresentazioni bidimensionali, gli studenti imparano a descrivere queste figure con più precisione. Per esempio, per creare un reticolo per figure tridimensionali, gli studenti hanno bisogno di fare attenzione a numero, forma e relativa posizione delle sue facce. Gli studenti dovrebbero diventare esperti nella rappresentazione di semplici figure tridimensionali in una varietà di modi, compreso disegno a mano libera, viste (cioè di lato, di fronte e dall'alto), e sviluppi, e interpretando rappresentazioni bidimensionali di oggetti tridimensionali. Per esempio, il modello bidimensionale in Figura 5.10 può essere ripiegato in un cubo?

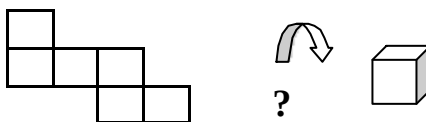


Figura 5.10. Sviluppo del cubo

Molti aspetti di geometria sono strettamente connessi con altri elementi matematici, soprattutto con la misura. I modelli geometrici possono essere usati per comprendere meglio i concetti sui numeri. Per esempio, la retta numerica è un modello per l'insieme dei numeri reali, e un modello di area per la moltiplicazione può essere usato per motivare o spiegare

proprietà dei numeri. Molte manipolazioni usate per modellizzare i concetti di numeri sono realizzazioni geometriche di oggetti aritmetici.

Standard 4: Misura

I programmi di matematica devono dare spazio ai problemi di misura in modo che tutti gli studenti:

- capiscano le grandezze, le unità, e i sistemi di misura;
- applichino diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure.

Elaborazione: livelli 3-5

La misura è un procedimento che studenti e adulti utilizzano ogni giorno. Utilizzando concetti e strumenti relativi alla misura, si possono raccogliere dati e utilizzare una varietà di tecniche in grado di descrivere e quantificare il mondo che ci circonda. Nei programmi scolastici di matematica, la misura aiuta a collegare sia concetti relativi a differenti aree della matematica che la matematica stessa con altre discipline. Essa può servire come contesto in cui aiutare gli studenti a introdurre e sviluppare importanti concetti matematici come le frazioni, i numeri in forma decimale e le proporzioni.

La misura è contemporaneamente un oggetto di studio (che comprende concetti, abilità e strategie) e un processo da applicare. Gli studenti, che apprendono cos'è la misura e imparano a misurare, dovrebbero sentirsi coinvolti in prima persona attraverso l'utilizzo di contesti familiari e facilmente accessibili. Gli studenti dei livelli 3-5 dovrebbero misurare oggetti e grandezze presenti nella loro classe, dovrebbero utilizzare delle cartine geografiche per determinare la distanza con i paesi vicini, valutare il tempo impiegato per effettuare i vari compiti e misurare e rappresentare le variazioni delle grandezze, come la loro altezza o quella delle piante che stanno coltivando.

Prima del livello 3 gli studenti raggiungono una conoscenza generale del processo di misura – identificando una grandezza da misurare, scegliendo un'unità di misura appropriata e iterando l'utilizzo di tale unità allo scopo di assegnare un numero a una particolare grandezza di un oggetto o di un evento. Dovrebbero anche aver avuto molte esperienze di misura di differenti grandezze, in particolare la lunghezza, il peso e il tempo. Nei livelli 3-5 gli studenti estendono la loro conoscenza e la loro familiarità con la misura esaminando nuove grandezze (ad esempio, area, volume e ampiezza), prestando maggiore attenzione al grado di accuratezza e utilizzando una più ampia varietà di strumenti di misura per ottenere i valori delle misure. Cominciano anche a definire e utilizzare delle formule per misurare certe grandezze (ad esempio, il perimetro o l'area).

Punti nodali per i livelli 3-5

- **Capire le grandezze, le unità, e i sistemi di misura.**

Nei livelli 3-5 tutti gli studenti dovrebbero:

- sviluppare una consapevolezza delle misure come approssimazioni e capire come gli strumenti utilizzati per misurare influenzino il grado di precisione;
- capire la necessità di utilizzare unità di misura uniformi e sviluppare una certa abilità nell'utilizzo delle unità di uso comune dei sistemi di misura inglese e metrico;
- identificare grandezze come la lunghezza, l'area e il volume e conoscere tipo di unità e strumento necessari per misurare ogni grandezza;
- effettuare semplici conversioni di unità di misura all'interno di un sistema di misura (per esempio, da centimetri a metri, da ore a minuti);
- esplorare l'effetto sulla dimensione quando gli oggetti si modificano sotto l'azione di semplici trasformazioni (per esempio, le differenti forme ottenute combinando otto cubi hanno la stessa area superficiale? e lo stesso volume?).

- **Applicare diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure.**

Nei livelli 3-5 tutti gli studenti dovrebbero:

- scegliere e applicare unità standard appropriate (metriche o inglesi) e strumenti (per esempio, righelli graduati, carta millimetrata, cilindri graduati) per stimare e misurare lunghezza, area, volume, peso, tempo, temperatura e angoli;
- determinare perimetro, area e volume di forme e solidi contando segmenti, unità di area o unità di volume;
- costruire, comprendere e utilizzare formule per determinare il perimetro e l'area di rettangoli;
- stimare la misura di oggetti fisici confrontandoli con oggetti di riferimento (per esempio, stimare l'ampiezza di un angolo confrontandolo con un angolo retto);
- determinare l'area superficiale di cubi e di altri solidi a facce rettangolari considerando ogni faccia;
- utilizzare le scale sulle carte geografiche per misurare la distanza tra diverse località e fare semplici rappresentazioni in scala utilizzando la carta millimetrata.

Discussione

- **Caratteristiche, unità e sistemi di misura**

Gli studenti nei livelli 3-5 continuano a misurare le grandezze di un gran numero di oggetti fisici, estendendo il processo di misura a grandezze più complesse tra le quali l'area, il volume, la massa (il peso) e l'angolo. Analizzano le grandezze area e volume utilizzando unità non standard (per esempio, dei chicchi) per ricoprire o riempire una regione del piano o dello spazio. Gli studenti imparano che alle misure di lunghezza, in particolari contesti, vengono attribuiti dei nomi specifici, come perimetro, larghezza, altezza, circonferenza e

distanza. Cominciano a fissare alcuni oggetti di riferimento con cui stimare o valutare la dimensione di altri oggetti. Per esempio, imparano che uno “spigolo quadrato” viene chiamato un angolo retto e stabiliscono questo come oggetto di riferimento rispetto al quale confrontare gli altri angoli.

Gli studenti dei livelli 3-5 dovrebbero rendersi conto della necessità di scegliere delle unità di misura adatte alla grandezza da misurare. Per misurare l'area sono necessarie unità di tipo diverso da quelle per misurare la lunghezza. Inizialmente, utilizzano un qualsiasi oggetto che occupa spazio per valutare l'area e poi giungono a riconoscere la necessità di un'unità standard come il centimetro quadrato per ricoprire lo spazio. Analogamente, la necessità di un tipo diverso di unità (unità cubica) per misurare il volume prende l'avvio da esperienze che iniziano col riempire contenitori (ad esempio, con semi, riso o acqua) per poi rendersi conto della scarsa attendibilità di tali unità (non riempiono completamente lo spazio).

Gli studenti dei livelli 3-5 cominciano a rendersi conto che le misure nel mondo reale sono approssimate, sia per gli strumenti che utilizziamo che per la nostra capacità di interpretare i risultati. Ad esempio, se misuriamo gli oggetti utilizzando un righello graduato in centimetri, la precisione della nostra misura è limitata dalla nostra vista e dalla graduazione sul righello. Gli studenti incontrano questo problema quando confrontano tra loro le misure di vari oggetti. Ad esempio, l'attività riportata in figura 5-11 rappresenta una situazione in cui l'insegnante pone alla classe il problema di considerare la misura come un processo di stima.

Misurate e confrontate: lavorate in coppia e utilizzate i vostri righelli per misurare gli oggetti elencati nel tabellone in fondo all'aula. Prendete nota delle vostre misure per ogni oggetto sul tabellone.

OGGETTO DA MISURARE	Jo & Rustin	Whit & Beth	Ben & Anna
Altezza della cattedra	70 cm	68 cm	67 cm
Diametro del quadrante dell'orologio	92 cm	96 cm	91 cm
Lunghezza dell'aula	8 m	7.5 m	8.2 m

Figura 5.11 Misure.

Ogni coppia di studenti ha trovato misure leggermente diverse anche se i gruppi stavano misurando lo stesso oggetto. Dato che l'attributo da misurare (ad esempio, il diametro dell'orologio) non cambia, che cosa porta a misure leggermente differenti? Le risposte degli studenti variano a seconda della loro età, dell'esperienza e delle conoscenze matematiche. Nel livello 5, gli insegnanti dovrebbero prestare attenzione alle spiegazioni che includono il grado di precisione usato dagli studenti (con quanta accuratezza hanno letto la scala dello strumento utilizzato?), alla scala inserita nello strumento utilizzato (è graduato in centimetri o in millimetri?) e al modo in cui gli studenti percepiscono la necessità di misure accurate (quale precisione è necessaria in questo particolare contesto?). La discussione potrebbe portare a considerare l'importanza di effettuare la misura in modo preciso in certi contesti (per esempio, i carpentieri spesso misurano “due volte” e utilizzano strumenti speciali allo scopo di minimizzare lo scarto di materiali) e di ritenersi soddisfatti di una stima approssimata in altri contesti (per esempio, il gruppo degli scout ha fatto un'escursione a piedi di circa 2.5 miglia).

- **Tecniche, strumenti e formule per la misura**

Gli studenti nei livelli 3-5 aumentano il numero di strumenti e di tecniche che utilizzano per misurare. Si accingono a utilizzare strumenti convenzionali, come i righelli e i metri a nastro, per misurare la lunghezza e devono imparare come utilizzare questi strumenti in modo corretto (per esempio, leggere le graduazioni sul righello o identificare i diversi pesi su una bilancia a due piatti). Quando gli studenti hanno difficoltà a utilizzare gli strumenti disponibili per misurare una particolare grandezza, possono imparare a inventare tecniche che funzionano in una data situazione: un righello non è di grande aiuto nel misurare la circonferenza del quadrante di un orologio, ma gli studenti potrebbero utilizzare una corda da mettere attorno al quadrante e poi misurare la corda.

Gli studenti dovrebbero essere messi alla prova per adattare le tecniche di misura al caso di misurazioni di oggetti o figure complesse. Ad esempio, potrebbero misurare l'area di un poligono irregolare ricoprendolo con un foglio quadrettato trasparente e contando i quadretti oppure potrebbero suddividerlo in forme regolari che sanno misurare. Potrebbero misurare il volume di un piccolo contenitore di forma irregolare, immergendolo nell'acqua contenuta in un cilindro graduato e osservando di quanto sale il livello dell'acqua.

Gli studenti dei livelli 3-5 dovrebbero essere incoraggiati a utilizzare la loro accresciuta conoscenza delle unità di misura per effettuare delle stime sulla misura, sfruttando spesso delle strategie di suddivisione in parti con punti di riferimento. Ad esempio, per valutare la lunghezza della classe, gli studenti potrebbero utilizzare una piastrella come unità di misura (una "parte" dell'oggetto da misurare) e decidere quante piastrelle compongono la lunghezza. In tal modo il compito si riduce a stimare la lunghezza della piastrella e a moltiplicare quel valore per il numero delle piastrelle. Un'altra strategia per valutare la misura è quella di confrontare l'oggetto da misurare con un opportuno segno di riferimento. Ad esempio, uno studente potrebbe fare una stima dell'altezza dell'insegnante osservando che l'insegnante è alto circa una volta e mezza lo studente. Gli studenti conoscono la loro altezza e possono utilizzare questo dato per effettuare una stima dell'altezza dell'insegnante. Le strategie per stimare le misure variano molto e spesso dipendono dalla particolare situazione in esame. Forniscono agli studenti un'opportunità eccellente per condividere intuizioni e tecniche. Gli studenti hanno anche bisogno di una certa esperienza per poter valutare quale grado di accuratezza è richiesto in una data situazione e se è preferibile una stima per difetto o per eccesso. Se una persona acquista un tappeto, l'errore dovrebbe essere per eccesso. Invece, una stima del tempo necessario per riscaldare del cibo dovrebbe essere fatta probabilmente per difetto.

Le formule per misurare il perimetro, l'area e il volume dovrebbero essere prese in considerazione quando gli studenti hanno l'opportunità di effettuare misure, prendere nota delle informazioni e osservare le eventuali regolarità. Ad esempio, la tabella in Figura 5.12 fu ottenuta da un gruppo di studenti del terzo livello, i quali utilizzarono una carta quadrettata trasparente per determinare l'area di un insieme di rettangoli. Trovarono che la carta quadrettata era uno strumento facile da usare nella determinazione delle aree dei diversi rettangoli. Quando compilarono la tabella, gli studenti si resero conto che non era necessario contare tutti i quadretti, una volta che era stata determinata la lunghezza e la larghezza del rettangolo. Verificarono la loro congettura (che $\text{area} = \text{base} \times \text{altezza}$) utilizzando la carta quadrettata e tale congettura si dimostrò valida per ogni rettangolo dell'insieme considerato. In seguito l'insegnante li invitò a riflettere se la loro formula funzionava sempre – sia per i rettangoli grandi sia per quelli piccoli.

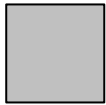
A	B	C	D	E	Rettangolo	Base	Altezza	Area
					A	5	2	10 q
					B	3	4	12 q
					C	1	6	6 q
					D	2	3	6 q
					E	4	4	16 q

Figura 5.12. Aree dei rettangoli

Gli insegnanti dovrebbero far tesoro dell'opportunità di utilizzare la misura per mettere in evidenza il legame tra matematica, scienza e altri settori. Ad esempio, gli studenti possono esplorare concetti scientifici studiando la relazione tra l'altezza di caduta e l'altezza di rimbalzo di differenti palle, come è previsto nel seguente problema:

Esperimento del rimbalzo della palla. Tutte le palle fanno lo stesso numero di rimbalzi? prendete in esame una palla da tennis e una palla da raquet [N.d.T. gioco simile al tennis ma praticato in luogo chiuso]. Rimbalzano allo stesso modo? In caso di risposta negativa, come potete descrivere la quantità di rimbalzi che possiede una palla? Un modo è quello di confrontare il rimbalzo di una palla con l'altezza da cui è stata lasciata cadere. Fate quest'esperimento: lasciate cadere diversi tipi di palla da differenti altezze. Costruite una tabella delle altezze di caduta e di rimbalzo. Siete in grado di fare qualche previsione?

TIPO DI PALLA	ALTEZZA DI RIMBALZO	ALTEZZA DI CADUTA	RAPPORTO
Palla da tennis	53 cm	100 cm	Circa 5/10
Palla da raquet	73 cm	100 cm	Circa 7/10
Palla da baseball	37 cm	100 cm	Circa 4/10
Palla da golf	62 cm	100 cm	Circa 6/10

Figura 5.13. Palle che rimbalzano

Quando gli studenti effettuano questo esperimento e raccolgono i dati, come in Figura 5.13, scoprono che effettivamente le palle da rimbalzo rimbalzano quasi fino al punto in cui erano state lasciate cadere. Le altre palle non rimbalzano così in alto. Il rapporto tra l'altezza del rimbalzo e l'altezza di caduta (R/C) è una misura derivata che possiamo chiamare la "capacità di rimbalzo" della palla. Una palla da tennis ha una capacità di rimbalzo di circa $1/2$, mentre la capacità di rimbalzo di una palla da raquet è prossimo a $7/10$.

Le attività legate alla misura risultano più coinvolgenti e capaci di stimolare una riflessione se vengono effettuate con uno scopo ben preciso. Gli studenti sentono la necessità di effettuare le misure attraverso attività come il *rimbalzo della palla*, precedentemente

considerato e quando devono rispondere a domande riguardanti la loro classe o l'ambiente scolastico. Ad esempio:

- quanto tempo impiegano ogni mattina gli studenti della classe per prepararsi ad andare a scuola?
- quanta acqua viene consumata ogni giorno nella fontana della scuola?
- quanto ketchup viene consumato ogni giorno alla tavola calda della scuola?
- qual è l'area del cortile della scuola? quanto spazio ha a disposizione ogni studente se tutti quelli della quarta classe si trovano nel cortile contemporaneamente?
- qual è la distanza tra casa mia e la scuola?

Riassumendo, la misura è un argomento importante nei livelli 3-5 a causa dei suoi aspetti pratici, della facilità con cui collega la matematica al mondo reale e delle sue connessioni con altre aree della matematica.

Standard 5: Analisi dei dati, statistica e probabilità

I programmi di matematica devono porre attenzione all'analisi dei dati, alla statistica e alla probabilità in modo che tutti gli studenti:

- si pongano domande e vi rispondano raccogliendo, organizzando e rappresentando dati;
- interpretino dati usando metodi analitici;
- sviluppino e valutino deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati;
- capiscano e applichino nozioni di base su caso e probabilità.

Elaborazione: livelli 3-5

Gli studenti nei livelli 3-5 diventano più consapevoli del mondo che circonda loro, la loro famiglia, e le loro classi e cominciano a pensare a problemi e a domande più vasti. Gli studenti a questi livelli sono pronti a espandere le loro conoscenze su come investigare, descrivere, e analizzare informazioni sul loro mondo, usando come strumento l'analisi di dati.

Le investigazioni sui dati dovrebbero avere luogo frequentemente durante i livelli 3-5. Queste possono andare da brevi sondaggi in classe a investigazioni che prendono più giorni. Indagini frequenti e corte sui dati (quanti fratelli e sorelle hanno gli studenti della nostra classe? qual è la massima distanza da casa?) possono essere usate per informare gli studenti sui vari aspetti del raccogliere, rappresentare, riassumere, confrontare e interpretare i dati (per esempio, la classe ha bisogno di quindici minuti per raccogliere i dati, rappresentarli in un grafico, e analizzare i risultati). Progetti più estesi possono impegnare gli studenti in un ciclo di investigazioni. Formulano questioni, raccolgono, rappresentano, e analizzano dati, poi si chiedono se i dati a loro disposizione danno l'informazione richiesta. Potrebbero rappresentare poi i loro dati in differenti maniere e considerare altre descrizioni statistiche, o potrebbero rivedere le loro domande e raccogliere nuovi dati. Gli studenti imparano come rivedere e preparare una presentazione al pubblico: possono sviluppare appunti e schizzi di grafici e di tabelle mentre analizzano i dati per creare rappresentazioni più raffinate quando sono pronti a presentarli.

In questi progetti più estesi, gli studenti dovrebbero talvolta prediligere le domande e le investigazioni sperimentali in modo da essere in grado di giungere a conclusioni o consigli che possano influenzare le decisioni. Per esempio, una classe che esamina gli infortuni che si verificano sul campo da gioco della scuola ha raccolto prove che hanno portato alla conclusione che le parallele sono troppo grandi per le mani di molti studenti dei primi tre livelli. Questa scoperta ha portato a una nuova politica della scuola circa la sicurezza del campo da gioco.

Gli studenti dei livelli 3-5 cominciano a considerare attivamente la probabilità degli eventi. In questi livelli, sono utili le osservazioni informali sulla probabilità. Tali osservazioni di solito comprendono la discussione di probabilità di eventi, sia in contesti familiari (quanto è probabile che nevierà in luglio nella nostra città?) che in esperimenti (se io metto tutti i nomi della classe in una scatola, quanto è probabile estrarne uno che comincia con L?).

Punti nodali per i livelli 3-5

- **Porsi domande e rispondervi raccogliendo, organizzando e rappresentando dati.**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- formulare domande per fare indagini;
- ideare indagini sui dati per rispondere a una domanda;
- raccogliere dati usando osservazioni, misure, sondaggi ed esperimenti;
- organizzare dati usando tabelle e grafici (per esempio, grafici a barre, a torta, e a linea);
- usare grafici per analizzare i dati e per presentare le informazioni al pubblico;
- studiare le rappresentazioni dei dati per determinare quali aspetti sottolineano o nascondono.

- **Interpretare dati usando metodi analitici.**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- descrivere la forma e le qualità principali di un insieme di dati numerici, inclusa la gamma, lungo la quale i dati sono concentrati o dispersi, e se ci sono dati che si discostano dalla norma;
- descrivere il centro di insiemi di dati numerici, prima informalmente, poi usando la media;
- classificare e descrivere dati organizzati per categorie (per esempio, strade usate per arrivare a scuola) in modi differenti; analizzare e confrontare le informazioni evidenziate attraverso differenti classificazioni;
- confrontare insiemi di dati in relazione fra loro, con enfasi sul campo di variabilità, sulla media, e su come sono distribuiti i dati;
- proporre e giustificare conclusioni basate sui dati;
- formulare questioni o ipotesi basate sulla collezione iniziale di dati, e ideare successivi studi per esplorarla.

- **Sviluppare e valutare deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati.**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- descrivere come i metodi di raccolta dei dati possono influenzare la natura dell'insieme di dati;
- discutere il concetto di non-rappresentatività di un campione entro il contesto di un particolare esempio (p.e. la classe è rappresentativa delle altre classi di quinto livello della nostra città? Perché sì o perché no?);
- paragonare i dati di un campione a altri campioni e considerare perché sono diversi;
- mediante semplici esperimenti, dedurre la struttura di una popolazione attraverso ripetuti campioni.

- **Capire e applicare nozioni di base su caso e probabilità.**

Nei livelli 3-5, tutti gli studenti dovrebbero:

- discutere la probabilità o l'improbabilità di eventi e dare descrizioni del grado di probabilità in termini informali (per esempio, improbabile, molto improbabile, certo, impossibile);
- stimare, descrivere, e controllare le probabilità di dati che si discostano dalla norma associando al grado di certezza un valore variante da 0 a 1 (per esempio, in semplici esperimenti con ruote della fortuna con diverse fasce ombreggiate).

Discussione

- **Raccogliere, organizzare, e rappresentare i dati**

Le attività riguardanti dati a questi livelli dovrebbero spingere gli studenti a rispondere a domande su situazioni diverse per loro interessanti. Queste potrebbero comprendere la ricerca del gruppo musicale o della parata di carnevale preferita, effettuare un sondaggio sulla classe o sulla scuola circa l'ammontare di ore di televisione guardate ogni giorno, o completare un esperimento per determinare quanto lontano gli studenti possono lanciare una palla. Una volta che la questione è formulata, i dati possono essere raccolti. Poi i dati possono essere rappresentati in carte, tabelle e grafici.

Ogni forma di rappresentazione è appropriata per certi tipi di domande e di dati, e ognuna sottolinea particolari aspetti dell'insieme di dati. Gli studenti dovrebbero diventare familiari con le rappresentazioni creandole, guardando il loro maestro crearle, e considerando rappresentazioni trovate nei media. Gli studenti devono considerare quali aspetti delle loro rappresentazioni aiutano la gente a capirle: i titoli per le tabelle, i nomi per gli assi di un grafico, gli oggetti etichettati in una carta, o le scale usate in un grafico. Una volta costruiti grafici dei dati, gli studenti lavorano per capire il significato dei valori sull'asse orizzontale (p.e. le categorie delle strade prese per arrivare a scuola o il numero di familiari), e quello dei valori sull'asse verticale (la frequenza con la quale questi valori si presentano nell'insieme di dati). Attraverso esperienze con molti grafici, gli studenti affrontano e discutono argomenti come il motivo per cui la scala dell'asse orizzontale deve includere valori non attualmente nell'insieme di dati e come rappresentare lo zero in un grafico.

Gli studenti dovrebbero familiarizzarsi con metodi veloci di rappresentazione dei dati, come tabelle o grafici a linea, in modo da raggiungere una prima visione d'insieme dei dati, e quindi creare e mostrare un grafico a barre durante una presentazione in classe. Gli studenti cercheranno inoltre di capire quando un grafico a linea è più appropriato di un grafico a barre, e quando tabelle e grafici a cerchio possono dare più informazioni o essere più efficienti al momento della presentazione dei dati.

- **Descrivere, analizzare e interpretare dati**

Nei livelli pre-K-2, gli studenti sono spesso più interessati ai dati che riguardano loro stessi o quelli nei quali il proprio valore sia “il migliore” del grafico. Nei livelli 3-5, gli studenti cominciano a essere in grado di considerare un insieme di dati come un blocco unico, che può essere descritto come un insieme e può essere confrontato con altri insiemi di dati. Per gli studenti di questo livello, comincia ad avere senso discutere di un valore “tipico” per un insieme di dati ed essere in grado di descrivere la forma di una distribuzione. È essenziale che gli studenti in questi livelli collaborino alla descrizione e all'analisi in maniera più profonda di quanto fatto ai livelli pre-K-2. Devono abituarsi a esaminare i dati in più di una maniera e a considerare parecchie delle loro caratteristiche.

Gli studenti dei livelli 3-5 incontrano diversi tipi di dati: dati che possono essere classificati e dati ordinabili numericamente. Mentre gli studenti esaminano un insieme di dati numerici ordinati, essi imparano a prestare attenzione alle caratteristiche dell'insieme di dati: dove i dati sono concentrati o dispersi, dove non ci sono dati, o quali dati sembrano avere valori insoliti. Per esempio, una classe di quarto livello raffigurò le altezze delle “piante veloci” cresciute nella loro aula, vedi Figura 5.14 (Wisconsin Alumni Research Foundation 1989, p.11). Gli studenti, descrivendo questi dati, dovrebbero notare che la misura più bassa è 15 cm e che la pianta più alta misura 40 cm; la maggioranza dei dati sono concentrati tra 20 a 23 cm; e che la pianta cresciuta fino a 40 cm è molto fuori dalla norma, distaccata di parecchio dal resto dei dati. Gli studenti imparano gradualmente termini statistici come serie e dati che si discostano dalla media che aiutano a descrivere l'insieme di dati.

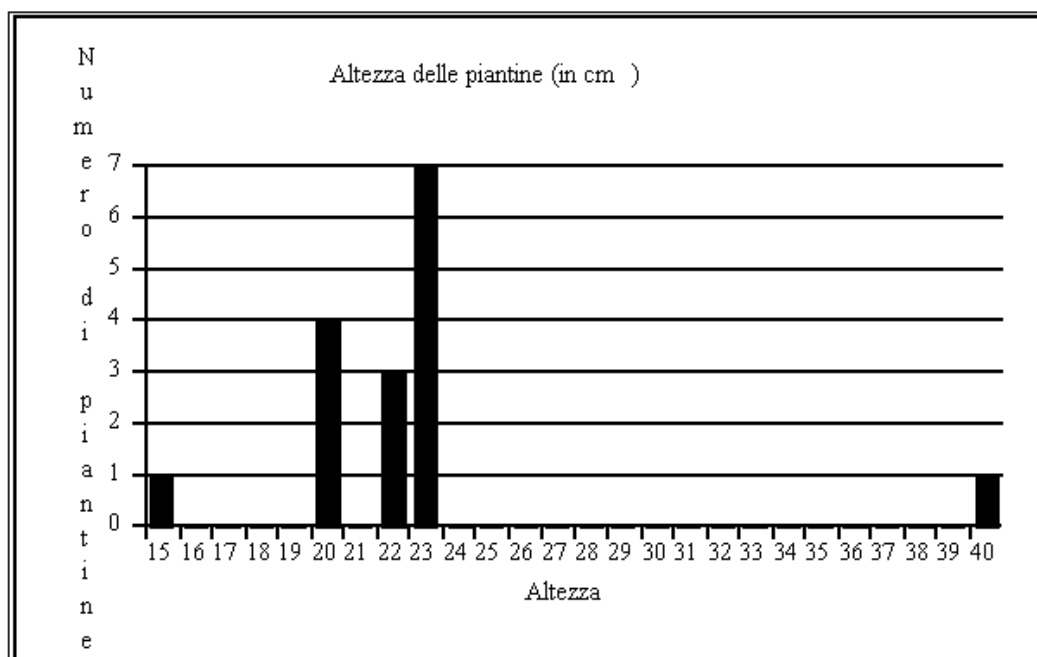


Figura 5.14. grafico a barre sulle “piante a crescita veloce”

Con dati che devono essere organizzati in categorie gli studenti dovrebbero provare differenti classificazioni al fine di ottenere differenti visioni dei dati. Per esempio, un semplice sondaggio circa i tipi di animali da compagnia può diventare molto complesso nel caso che gli studenti esaminino differenti modalità di classificazione. Un gruppo potrebbe classificarli come mammiferi, pesci, anfibi e così via; un altro potrebbe invece dividerli in trovatelli, comprati in un negozio di animali, figli di animali domestici di amici, e così via. Gli studenti dovrebbero usare frazioni e percentuali per descrivere le loro scoperte.

Confrontare insiemi di dati porta al bisogno di discutere su come gli insiemi di dati sono simili o diversi. La Figura 5.15 mostra una tabella sull'altezza a cui delle piante veloci sono cresciute in due classi (Wisconsin Alumni Research Foundation 1989, p.11). Gli studenti notarono che, anche se i campi di valori erano all'incirca gli stessi, i dati del quarto livello si concentravano tra i 20 e i 23 cm e che i dati del terzo livello erano molto più sparpagliati, con molti più valori alti.

Altezza delle piante veloci (in centimetri)

livello 4	livello 3
0	0 9
1 5	1 47
2 00002223333333	2 23556777899
3	3 0123359
4 0	4 0

Figura 5.15. tabella “piante veloci”

Durante i livelli 3-5, gli studenti sviluppano gradualmente l'idea di un valore "tipico" o media. Lavorando sulle conoscenze delle locuzioni "il più" e "il medio", si può fare imparare loro almeno tre tipi di valori medi, moda, mediana, e, informalmente, la media aritmetica. Gli studenti non devono solo imparare come identificare la moda o la mediana in un insieme di dati. Devono arrivare alla comprensione di cosa dice quel numero circa i dati, e devono vedere questi valori nel contesto delle altre caratteristiche dei dati. Nella Figura 5.15, la mediana del quarto livello è 22,5 ma la mediana del terzo è 27,5, e questo indica che circa metà dei dati del terzo livello deve essere uguale o maggiore di 27,5. Ma è anche importante guardare la distribuzione dei dati, che mostra che circa l'80% delle piante del terzo livello sono più alte di tutte le piante del quarto meno una. Procedendo verso la fine del terzo livello, una volta che gli studenti si siano familiarizzati con l'uso della moda e della mediana come parte delle loro descrizioni di dati, essi possono cominciare a esplorare concettualmente il ruolo della media come punto di bilanciamento dell'insieme di dati usando piccoli insiemi di dati.

- **Inferenza e predizione**

In questi livelli, gli studenti dovrebbero impegnarsi nel confrontare alcuni insiemi di dati correlati (per esempio, le altezze degli studenti di ogni livello) e cominciare a considerare più di una variabile in un insieme di dati (per esempio, se altezza e età sono correlati). Quando s'imbattono in confronti e associazioni, pensano sia alle caratteristiche dei dati sia al perché di queste caratteristiche. Proprio come in altre aree della matematica, si enfatizza l'uso dell'evidenza come dimostrazione. Quando gli studenti discutono i loro dati, cominciano a distinguere tra cosa mostrano attualmente e cosa potrebbe essere preso in considerazione nei risultati. Per esempio, una classe di quarto livello trovò che i ragazzi il venerdì sera andavano a letto un'ora e mezzo dopo le ragazze (Russel et al. 1995). Dopo avere descritto i loro dati, cominciarono a sviluppare ipotesi circa la ragione della differenza: le ragazze si alzavano prima dei ragazzi, e così dormono lo stesso ammontare di ore? Le ragazze erano più obbedienti dei ragazzi, mentre questi occupano più tempo litigando, così da ritardare l'ora di andare a letto?

Verso la fine dei livelli 3-5, gli studenti cominciano a capire che gli insiemi di dati sono campioni di popolazioni più grandi. Possono guardare alcuni campioni estratti dalla stessa popolazione (per esempio, dimensione delle famiglie in diverse classi della loro scuola) o confrontare il loro campione con le statistiche conosciute della popolazione (per esempio, la dimensione media della famiglia per la loro classe con le statistiche riportate per la loro cittadina). Possono pensare a problemi che rendono un campione non rappresentativo e cominciano a notare come i campioni della stessa popolazione possono variare.

- **Probabilità**

Gli studenti nei livelli 3-5 incontrano idee iniziali su come la probabilità può essere usata per descrivere aspetti possibili di certi eventi. Queste idee sono incoraggiate dall'esplorazione attiva di eventi in contesti quotidiani, e particolarmente da indagini che riguardano la probabilità. Per esempio, qual è la probabilità di vedere una pubblicità quando si accende la TV? Gli studenti possono raccogliere dati sul numero di minuti di pubblicità in un'ora per stimare la probabilità.

Gli studenti possono anche fare esperimenti sulla probabilità in situazioni che presentano pochi dati, come ruote della fortuna con certe parti ombreggiate. A questo livello, la probabilità è collegata strettamente alla comprensione delle idee importanti sui numeri razionali. Gli studenti possono considerare come la possibilità di un evento sperimentale può variare da impossibile a certo e possono evidenziare questo campo di probabilità da 0 a 1.

In conclusione, gli studenti dei livelli 3-5 sviluppano alcune abilità critiche di analisi dei dati. A questi livelli l'analisi di dati diventa un mezzo per investigare questioni interessanti e importanti. Gli studenti espandono il loro repertorio di rappresentazioni di dati (tabelle, grafici, e altre rappresentazioni), imparano le misure statistiche che li aiutano a descrivere e a riassumere i dati, confrontano insiemi di dati correlati e sviluppano il linguaggio necessario per discutere le loro nozioni informali di probabilità.

Standard 6: Problem Solving

I programmi di matematica devono concentrarsi sulla soluzione di problemi come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- costruiscano nuove conoscenze matematiche attraverso il loro lavoro con i problemi;
- sviluppino l'attitudine a formulare, rappresentare, astrarre e generalizzare in situazioni all'interno e all'esterno della matematica;
- applichino un'ampia varietà di strategie per risolvere problemi e le adattino a nuove situazioni;
- controllino e riflettano sul loro pensiero matematico nella risoluzione dei problemi.

Il problem solving è il processo di identificazione e di uso delle conoscenze disponibili per formulare e adattare strategie in grado di affrontare una situazione nuova. Il problem solving dovrebbe essere il tema centrale del curriculum di matematica. Come tale, esso diventa lo scopo primario di tutto l'insegnamento della matematica e rappresenta una parte fondamentale di ogni attività matematica. Il problem solving non è un argomento a sé stante, bensì è un processo che dovrebbe permeare l'intero programma educativo e fornire il contesto in cui si possono apprendere concetti e abilità (NCTM 1989, p. 23.)

- **Quali caratteristiche assume il problem solving nei livelli 3-5?**

Quando gli studenti affrontano situazioni matematiche nuove che non si adattano esattamente alle tecniche apprese precedentemente, devono sviluppare e utilizzare altre strategie – devono risolvere dei problemi. Chiedere “come puoi suddividere nove biscotti tra otto persone?” rappresenta un vero problema per molti studenti dei livelli 3-5, che non hanno ancora imparato le strategie di calcolo adatte a questo problema. Tuttavia, gli studenti hanno a disposizione abilità e concetti che li possono aiutare a risolvere il problema.

Secondo Hiebert et al. (1997), gli studenti migliorano le loro conoscenze matematiche, “quando inventano e analizzano dei metodi per risolvere problemi matematici” (p. 17). In generale un buon problema di matematica ha tre caratteristiche. Innanzi tutto, è problematico; c'è qualcosa che lo rende significativo e la strada che porta alla soluzione non è immediatamente evidente. In secondo luogo, è stimolante e interessante da un punto di vista matematico. Terzo, si ricollega alle conoscenze che lo studente già possiede in modo che egli possa adattare e applicare le sue attuali abilità e capacità per completare il lavoro intrapreso. Il lavoro su problemi intelligenti stimola la riflessione e la comunicazione e può emergere dall'ambiente stesso degli studenti o da contesti puramente matematici. Gli studenti costruiscono nuove conoscenze matematiche quando lavorano con i problemi. La parte fondamentale delle lezioni quotidiane di matematica può essere rivolta al lavoro con problemi veri.

In generale lavorare con i problemi serve a molteplici scopi, come stimolare gli studenti a sviluppare e ad applicare nuove strategie, presentare loro nuovi concetti e fornire un contesto in cui mettere in pratica le loro abilità. Consideriamo il seguente problema posto da un insegnante che voleva coinvolgere i suoi studenti in una discussione sul concetto di probabilità:

Se lanciate due dadi e moltiplicate i numeri sulle due facce, è più probabile che il prodotto ottenuto sia pari o dispari?

Inizialmente gli studenti pensavano che i prodotti pari e dispari fossero ugualmente probabili. Quando raccolsero dei dati lanciando diverse volte i dadi, furono sorpresi nel constatare che erano favoriti i prodotti pari. Dopo ulteriori lanci, l'insegnante chiese loro di fare delle congetture sul perché i prodotti pari erano più probabili ed emersero diverse spiegazioni. Alcuni studenti costruirono, o ricorsero a, tavole di moltiplicazione e cominciarono a contare il numero di prodotti pari e dispari. Altri osservarono che, "ogni volta che moltiplichiamo un numero per 2, si ottiene sempre una risposta pari. Questo è vero anche quando moltiplichiamo per 4." Altri studenti cominciarono a fornire spiegazioni per il caso generale. "Dispari per dispari è sempre dispari. Pari per pari è sempre pari. Quando si moltiplica dispari per pari si ottiene un risultato pari." Allo scopo di approfondire il problema, l'insegnante chiese agli studenti di considerare di quanto era più probabile ottenere un prodotto pari che uno dispari. Gli studenti furono sorpresi nello scoprire che era tre volte più probabile ottenere un prodotto pari che uno dispari. Questa attività mostra una situazione in cui una semplice domanda ha prodotto un gran lavoro di ricerca: ha fornito agli studenti l'opportunità di utilizzare le tecniche per la raccolta dei dati, li ha costretti a esaminare rappresentazioni organizzate di dati per poter dare significato alle loro osservazioni e ha permesso loro di far pratica con le proprietà della moltiplicazione mentre esploravano concetti matematici nuovi.

Gli studenti devono anche rendersi conto che i problemi si possono risolvere in molti modi diversi, e che ognuna delle strategie impiegate è fonte di nuove intuizioni. Un insegnante ha chiesto ai suoi studenti di scoprire modi diversi per determinare quale frazione era maggiore tra $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{9}$. Gli studenti hanno riportato le seguenti strategie:

"Fai una buona rappresentazione grafica di ogni frazione e poi confronta le rappresentazioni."

"Confronta ogni frazione con $\frac{1}{2}$. Poiché $\frac{3}{7}$ è minore di $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{9}$ è maggiore di $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$ deve essere la maggiore."

"Scrivi ogni frazione in una forma equivalente che utilizza un denominatore comune e poi confrontale."

"Sottrai ogni frazione da uno, ottenendo $\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{9}$, poi confronta queste."

"Costruisci uno schema ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{10}$, ... $\frac{96}{100}$) e guarda cosa succede (le frazioni diventano più grandi)."

Nell'esaminare i diversi modi di confrontare le due frazioni, gli studenti hanno individuato dei collegamenti tra diversi concetti matematici e hanno avuto l'opportunità di esaminare altre strategie a cui non avevano pensato. Il problema ha fornito anche la possibilità di analizzare le relazioni tra le diverse strategie e di valutare queste ultime in termini di efficienza, accuratezza e grado di generalità (per esempio, le rappresentazioni grafiche possono essere di aiuto nel fornire informazioni ma possono essere di scarsa utilità quando si deve scegliere tra frazioni molto vicine tra loro come valore).

I problemi intelligenti aiutano a prendere in esame delle generalizzazioni. Agli studenti fu richiesto di utilizzare la disposizione di punti riportata nella Figura 5.16 per scoprire diversi

modi di determinare quanti punti erano situati sul contorno del quadrato e poi di rappresentare le loro riflessioni e le loro soluzioni in una forma che risultasse comprensibile dagli altri.

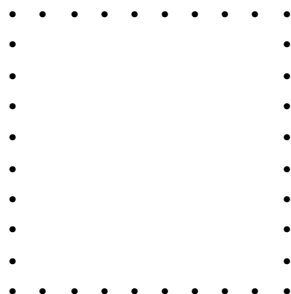


Figura 5.16. Problema dei quadrati di punti

Quando gli studenti presentarono le loro soluzioni alla classe, come in Figura 5.17, l'insegnante chiese loro di mettere in relazione le rappresentazioni grafiche con i numeri presenti nelle loro equazioni. Quando tutte le strategie furono state presentate, l'insegnante chiese agli studenti di esaminare i vari modi di risolvere il problema e di prendere nota sia delle loro analogie sia delle loro differenze. L'insegnante poi ampliò la portata del problema chiedendo agli studenti di determinare il numero totale di punti se ne erano presenti 98 su ogni lato del quadrato, compresi i vertici, e di decidere quale strategia sarebbe stata più adatta per rispondere alla domanda. In tal modo, fu richiesto agli studenti di valutare l'efficacia delle strategie relativamente a una classe di problemi.

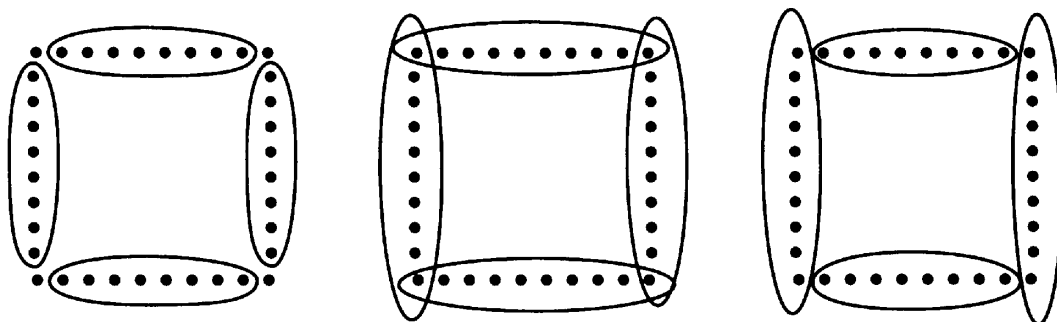


Figura 5.17. Lavoro degli studenti sul problema dei quadrati di punti

Oltre a sviluppare e a utilizzare diverse strategie, gli studenti devono anche imparare a porsi delle domande in grado di estendere i problemi. In tal modo, gli studenti vengono incoraggiati a trarre vantaggio dalla loro effettiva curiosità sui concetti matematici. Ad esempio, l'insegnante potrebbe chiedere agli studenti di creare un problema simile al problema del quadrato di punti o di ampliarlo in qualche modo. Per esempio, “se ci fosse un totale di 76 punti, quanti sarebbero presenti su ogni lato del quadrato?” oppure “potrebbe esistere un quadrato formato da un totale di 75 punti?” Gli studenti in grado di ampliare i problemi e di porsi domande diventano sia creatori sia risolutori di problemi.

- **Qual è il ruolo dell'insegnante nell'aiutare gli studenti dei livelli 3-5 a diventare dei migliori risolutori di problemi?**

Il ruolo dell'insegnante nell'aiutare gli studenti a diventare risolutori di problemi consiste nel favorire la formazione dell'ambiente classe, nello scegliere compiti o problemi ricchi e appropriati, nell'armonizzare il loro uso e nel valutare la comprensione degli studenti. Per far diventare gli studenti dei risolutori di problemi fiduciosi e sicuri di sé risultano essenziali le norme sociali stabilite all'interno della classe dall'insegnante. Gli studenti devono imparare a rispettare e a valutare le idee e i modi di pensare dei compagni. Questi atteggiamenti sono essenziali se si vuole che gli studenti capiscano il senso della matematica, affrontino il rischio intellettuale di porre domande e formulare congetture e sostengano le loro affermazioni con argomentazioni di tipo matematico (NCTM 1991, p. 57).

In questo ambiente l'insegnante assegna agli studenti una serie di problemi e di compiti intellettualmente stimolanti e adeguati al loro curriculum. Deve anche concedere agli studenti il tempo necessario per esplorare a fondo i problemi; è molto meglio esplorare in modo approfondito pochi problemi che esplorarne molti in modo superficiale. Inoltre, l'insegnante deve essere attento a cogliere le occasioni per fare collegamenti di tipo matematico. Durante lo svolgimento di una unità didattica sulla conservazione delle risorse, un insegnante chiese agli studenti se essi pensavano che la fontanella d'acqua presente nell'ingresso fosse uno strumento efficiente per la distribuzione dell'acqua. Gli studenti decisero di fare una valutazione della quantità d'acqua che veniva sprecata bevendo alla fontanella. Essi fecero diverse misure per valutare quant'acqua erogava la fontanella in un minuto e fecero la media dei risultati. Quindi adottarono un procedimento analogo sull'utilizzo medio della fontanella da parte degli studenti. Poi dovettero studiare in che modo determinare quant'acqua veniva effettivamente inghiottita e quanta andava dispersa nella fogna. Gli studenti decisero di cronometrare diversi compagni e misurarono la quantità d'acqua che essi bevevano da un bicchiere. Facendo l'ipotesi che l'operazione di bere da una fontanella fosse più lenta, valutarono il consumo d'acqua e riuscirono a formulare una risposta in merito all'efficienza della fontanella. In questo caso, la ricerca prese l'avvio da una semplice domanda che gli studenti avevano trovato interessante.

Poiché i problemi intelligenti stimolano gli studenti a pensare, spesso si sforzano tenacemente per trovare delle soluzioni. Questo non è un aspetto negativo. Fa parte della responsabilità dell'insegnante sapere quando un particolare studente ha bisogno di aiuto o è in grado di continuare a lavorare da solo, nonostante qualche frustrazione. Prestare aiuto troppo presto può privare gli studenti dell'opportunità di fare scoperte matematiche. Gli studenti devono sapere che un problema stimolante richiederà un certo tempo e che la perseveranza è un aspetto importante del problem solving.

Quando gli studenti condividono le loro soluzioni con i compagni, è di vitale importanza che gli insegnanti li aiutino a esaminare a fondo i vari aspetti delle loro strategie. Gli insegnanti non possono dichiararsi soddisfatti di spiegazioni che non sono altro che descrizioni procedurali o riassunti. Invece, devono pretendere che gli studenti motivino le loro spiegazioni con argomentazioni di tipo matematico (Kazemi 1998). Nel dialogo riportato di seguito, un'insegnante pone delle domande a due studenti del quarto livello durante la loro spiegazione di come hanno diviso equamente nove biscotti tra otto persone:

Sarah: I primi quattro li tagliamo a metà. [Jasmine divide i quadrati a metà sul lucido].

Ms. Carter: Ora potresti spiegare perché li hai divisi a metà?

Sarah: Perché quando si divide a metà diventano quattro ... quattro ... otto metà.

Ms. Carter: Otto metà. Se ci sono otto metà cosa vuol dire?

Sarah: Allora ogni persona ne ottiene una metà.

Ms. Carter: Bene, ...ogni persona ne ottiene una metà. [Jasmine contrassegna le metà 1-8 per ognuna delle otto persone.]

Sarah: Poi restano cinque quadrati [biscotti]. Li dividiamo in ottavi.

Ms. Carter: Bene, quindi li hanno divisi in ottavi. Potete dirci perché avete scelto gli ottavi?

Sarah: E' facilissimo. Perché in tal caso ognuno otterrà ... ogni persona otterrà una metà e [si rivolge a Jasmine, "quanti ottavi?" Jasmine le risponde tranquillamente, "5/8."]

Ms. Carter: Io non sapevo perché li avevate divisi in ottavi. Quella è la ragione. Io volevo solo sapere perché avevate scelto gli ottavi.

Jasmine: Abbiamo scelto gli ottavi perché se li dividevamo in ottavi, ogni persona avrebbe ottenuto un ottavo, cioè un ottavo di ogni biscotto.

Ms. Carter: Bene, 1/8 di ogni biscotto. Potete mostrarci, senza farci vedere un numero, ma solo mostrarci che cosa intendete? Ho ascoltato le vostre parole, ma ...

Jasmine: [Tratteggia 1/8 di ognuno dei cinque biscotti non divisi a metà.] Una persona dovrebbe avere questo ... [indica 1/8]

Ms. Carter: Oh, di ogni biscotto.

Sarah: Di ogni biscotto, una persona ne otterrà 1/8.

Ms. Carter: Un ottavo. Bene. Quindi quanto hanno avuto se la divisione è stata equa?

Jasmine & Sarah: Ne hanno avuto una metà e 5/8.

Ms. Carter: Volete scrivere il vostro risultato in cima al lucido, in modo che io possa vedere quello che avete fatto?

Jasmine: [Scriva $1/2 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$ in cima al lucido.]

In questo dialogo l'insegnante ha sollecitato gli studenti a fornire delle spiegazioni delle loro decisioni e delle loro azioni. Se ci sono otto metà cosa vuol dire? Potete dirci perché avete scelto gli ottavi? Potete ... mostrarci che cosa intendete? L'insegnante non si è accontentata di un semplice riassunto dei vari passi, ma, al contrario, ha voluto che gli studenti fornissero delle giustificazioni verbali di tutto il cammino seguito e arricchissero le loro giustificazioni con numeri e grafici. Come risultato finale, è probabile che questi studenti imitino le tecniche di porre domande della loro insegnante durante le loro discussioni di gruppo. In questo modo gli studenti imparano a prendere nota e a riflettere sulle loro intuizioni matematiche durante la risoluzione di problemi.

Ascoltando le discussioni, l'insegnante è in grado di valutare il livello di comprensione degli studenti. Nel dialogo dei biscotti, l'insegnante capisce come gli studenti hanno scoperto un modo per dividere equamente i biscotti. Se poi l'insegnante prosegue la

sua indagine chiedendo agli studenti se ogni persona ha ricevuto più o meno di un biscotto (e come possono giustificare la loro risposta), allora riesce a ottenere ulteriori informazioni riguardo alla loro conoscenza dei concetti matematici. Per poter valutare la capacità di risolvere problemi, gli insegnanti devono guardare al di là della risposta e considerare il ragionamento che c'è dietro alla soluzione. Questo aspetto si può trovare nel dialogo in classe e nelle spiegazioni scritte e grafiche. Riflettendo su questi aspetti della valutazione, l'insegnante riesce a ottenere alcune indicazioni sulla sua futura azione didattica.

Creando un ambiente che favorisce la cooperazione, scegliendo accuratamente i compiti per gli studenti, predisponendo nel modo più adatto il loro utilizzo in classe e valutando continuamente il livello di comprensione dei concetti matematici da parte degli studenti, l'insegnante aiuta gli studenti a porsi problemi e a risolverli.

Standard 7: Ragionamento e dimostrazione

I programmi di matematica devono spingere a ragionare e costruire dimostrazioni come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano il ragionamento e la dimostrazione come parti essenziali e fortemente efficaci della matematica;
- formulino e indaghino congetture matematiche;
- sviluppino e valutino ragionamenti e dimostrazioni matematiche;
- scelgano e usino vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriati.

Elaborazione: livelli 3-5

Ragionare è fondamentale per conoscere e fare matematica. Il ragionamento matematico nei livelli 3-5 implica riflessioni, congetture e verifiche che aiutano gli studenti a vedere ciò che dà significato alla matematica. In questi livelli gli studenti imparano le idee fondamentali sulla natura della matematica come sistema logico. Quindi questi anni sono un periodo centrale per la comprensione di quali sono i mezzi per fare matematica. Un obiettivo in questi livelli è che gli studenti creino essi stessi idee matematiche per poi articularle, esaminarle, verificarle.

Durante i livelli 3-5, gli studenti sono coinvolti in un passaggio chiave nel loro ragionamento matematico. Molti studenti iniziano questa fascia di livello credendo che qualche cosa è vero perché è accaduto prima, perché hanno visto diversi esempi di ciò oppure perché la loro esperienza sui dati sembra confermarlo. Ora imparano a valutare affermazioni sulla base dell'esame di prove. Imparano che alcuni esempi non sono sufficienti per stabilire la verità di una congettura, e che devono considerare una gamma di possibili esempi e ragionare sulle proprietà e relazioni generali che trovano attraverso gli esempi.

Un clima di classe che incoraggia gli studenti a portare avanti le proprie idee è molto importante per lo sviluppo del ragionamento matematico. Sia le affermazioni degli insegnanti che quelle degli studenti dovrebbero essere aperte a domande, reazioni e elaborazioni di altri nella classe. Gli studenti devono imparare che è importante essere in grado di spiegare e

giustificare il proprio pensiero e dovrebbero iniziare a imparare come individuare errori nei pensieri degli altri. Questo modo di pensare si afferma quando hanno la possibilità di applicare le loro capacità di ragionamento e quando ci si aspetta da loro che giustificino il loro pensiero nelle discussioni matematiche. Gli studenti hanno bisogno di molto tempo, molte esperienze e di un modello e una guida buoni per sviluppare la loro abilità di costruire valide argomentazioni e valutare le argomentazioni degli altri.

Che aspetto ha il ragionamento nei livelli 3-5?

Gli studenti nei livelli 3-5 dovrebbero pensare attivamente la matematica come una disciplina in cui il lavoro implica fare congetture, sviluppare argomentazioni matematiche su di esse e tentare di verificarle o confutarle. Nella terza classe di Ms. Taylor gli studenti hanno avuto una discussione sul problema 4×8 , in particolare su come calcolavano a mente. Uno studente, Matt, spiegava: “Io ho pensato a 2×8 , cioè 16, poi lo raddoppio”, L’insegnante fece una pausa e chiese ad altri studenti di testare l’idea di Matt, poi chiese “Pensate che il metodo di Matt per moltiplicare per 4 funzioni sempre?” Quando risultò che c’erano opinioni diverse, chiese agli studenti di provare qualche problema simile prima di riunirsi ancora per discutere l’ipotesi di Matt.

Questo esempio mostra un’insegnante che approfitta di una opportunità per impegnare i suoi studenti nel ragionamento. Ponendo la domanda “Pensi che funzioni sempre?” sposta la discussione dal problema specifico a considerazioni sulle caratteristiche generali dei problemi sulla moltiplicazione – che i fattori di una moltiplicazione possono essi stessi essere fattorizzati e poi moltiplicati (detto in altro modo, vale la proprietà associativa per la moltiplicazione). In questo caso specifico, Matt aveva notato che moltiplicare per quattro è lo stesso che moltiplicare per due e poi ancora per due. In questa classe il ragionamento è una parte centrale di tutta l’attività matematica. Agli studenti si richiede, oltre che di trovare la soluzione a un problema singolo, di riflettere sulla comprensione di strutture e relazioni matematiche.

Dopo che gli studenti avevano lavorato su diversi problemi e avevano discusso con un compagno sul perché “raddoppiare poi raddoppiare ancora” fosse una strategia per moltiplicare per quattro, l’insegnante riconvocò la classe per un’altra discussione. Le risposte degli studenti mostrarono un’ampia gamma di riflessioni nel gruppo:

Carol: Perché se hai 2 volte 8 e 4 volte 8 stai raddoppiando la risposta. Funziona ogni volta.

Leonard: Se hai 2 volte 8, sarebbe 16, allora se vuoi ottenere 4 volte 8, stai aggiungendo due volte in più 8, così è raddoppiato.

Malia: Deve essere raddoppiato perché stai facendo la stessa cosa più volte. Se hai fatto che 2 volte 8 fa 16 e poi 2 volte 8 hai fatto di nuovo 16, allora deve essere 32.

Steven: Quello che stai facendo è contare per 8, allora stai contando avanti, stai saltando un po’ di otto. Ne stai facendo ancora due, così lo stai raddoppiando.

Matt: Ho provato a vedere se funziona con i tripli, così ho fatto 2 volte 8 e 6 volte 8 e ha funzionato. Lo moltiplichi per tre e la risposta è triplicata.

A questo punto l’insegnante mandò gli studenti a lavorare sul loro insieme di problemi sulla moltiplicazione, sapendo che sarebbe tornata di nuovo su questa discussione. Una

ragazza risolse 74×6 partendo con 74×2 , poi raddoppiando infine addizionando i due prodotti insieme per ottenere il prodotto finale (vedere figura 5.18).

$$\begin{array}{r} 74 \times 2 = 148 \\ 74 \times 4 = 296 \\ 148 + 296 = 444 \end{array}$$

Figura 5.18. Soluzione di 74×6

Che cosa imparano gli studenti sul ragionamento matematico nei livelli 3-5?

Gli studenti nei livelli 3-5 dovrebbero frequentemente fare congetture sugli oggetti matematici e le loro relazioni, indagare quelle congetture e costruire argomentazioni matematiche basate sul loro lavoro. Gli studenti devono sapere che porre congetture e tentare di verificarle è una parte di ciò che ci si aspetta dalla loro attività matematica. Per fare ciò, gli studenti devono sviluppare una gamma di abilità di ragionamento. Imparano a generare esempi per testare le loro ipotesi, a ricercare possibili controesempi, e che le congetture fatte sulla base di prove preliminari potrebbero non reggere.

Un obiettivo importante dell'istruzione matematica a questi livelli è arrivare a capire cos'è che costituisce un'argomentazione matematica convincente. Per esempio, in una classe di livello 4, gli studenti stavano risolvendo il seguente problema:

Piega un rettangolo a metà, dividi una metà in due triangoli rettangoli congruenti, dividi l'altra metà in due rettangoli congruenti (figura 5.19). Poi confronta uno dei triangoli rettangoli e uno dei rettangoli piccoli; hanno la stessa area o uno ha l'area più grande dell'altro?

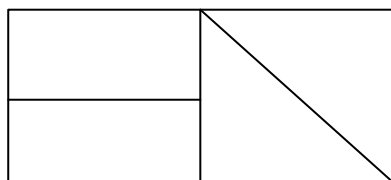


Figura 5.19. Piegare rettangoli

Molti studenti all'inizio tentarono di risolvere questo problema a occhio:

Il triangolo è più grande perché è più alto;

No, il rettangolo sembra di poco più grande;

Penso che siano uguali perché il triangolo è più alto ma il rettangolo è più lungo.

Mentre gli studenti lavoravano su questo problema, alcuni di loro si convinsero che le figure erano uguali oppure no a seconda che si potesse tagliare il triangolo e adattarlo al rettangolo in un modo disorganizzato, mentre altri riflettevano su come organizzare il loro tagliare e incollare, per esempio, tagliando il triangolo in due pezzi per ottenere un rettangolo congruente. Altri ancora svilupparono un modo di ragionare sulle relazioni nella figura senza tagliare e incollare: "Pieghiamo la carta a metà, così la parte con i rettangoli è la stessa che la

parte con i triangoli e così devono essere gli stessi”. Tutti gli studenti erano convinti delle proprie argomentazioni.

A questi livelli, molti studenti stavano giusto iniziando a sviluppare un’idea su cosa è un’argomentazione convincente. La prima soluzione – tagliare e incollare in modo disorganizzato – era centrata solo su questa particolare figura: c’è un modo per far adattare una all’altra? La seconda soluzione prendeva in considerazione alcune delle caratteristiche del triangolo e del rettangolo: il triangolo può essere risistemato in un modo organizzato per costruire un rettangolo con la stessa area. Benché gli studenti che usavano questa soluzione non l’avessero ancora generalizzata ad *ogni* triangolo rettangolo, il loro metodo era aperto a quella possibilità. La terza soluzione è l’inizio del ragionamento su relazioni e strutture, sebbene lo studente non avesse ancora sviluppato un’argomentazione articolata per spiegare perché uno dei triangoli aveva la stessa area di uno dei rettangoli.

Come nell’esempio sopra, ci sono molte differenze in ciò che gli studenti nei livelli 3-5 intendono come verifica. Certi studenti sono soddisfatti se possono mostrare un esempio (o diversi esempi) che funziona. Nel caso della strategia “raddoppio-raddoppio” per moltiplicare per quattro, alcuni del terzo livello sostenevano che la loro ipotesi era vera perché “funziona sempre”. Dal livello 3 a 5, gli studenti dovrebbero andare verso verifiche che dipendono da ragionamenti su relazioni e proprietà. Gli studenti devono essere interrogati e sfidati con domande come “Cosa succederebbe se ti dessi altri venti problemi come questo? Funzionerebbe sempre? Come fai a saperlo?” Confrontando le soluzioni e mettendo in dubbio i ragionamenti degli altri, gli studenti iniziano a imparare a descrivere relazioni che sono valide in molti casi e a creare argomentazioni sul perché quelle relazioni possono essere generalizzate e a quali casi esse vanno e non vanno applicate.

Qualche volta anche gli studenti che sembrano aver sviluppata una chiara argomentazione su una relazione matematica devono essere interrogati e sfidati se sono pronti a considerare nuovi aspetti della relazione. Per esempio, una classe di terzo livello ha passato molto tempo lavorando con le tabelle nel loro studio della moltiplicazione. Come gruppo, erano molto sicuri che la moltiplicazione fosse commutativa e potevano dimostrare questa proprietà usando le tabelle. Comunque, nel quarto livello iniziavano ad incontrare numeri più grandi e quando l’insegnante si accorgeva che alcuni studenti stavano usando la proprietà commutativa mentre risolvevano i problemi, introduceva questa nozione con la classe e li sfidava a sviluppare un’argomentazione per mostrare che valesse per tutti i numeri. Ciò si chiuse quando incalzò “Ma funzionerebbe per tutti i numeri? Che ne dite di 43279 volte 6892?”, persero la loro sicurezza che la commutatività fosse valida per tutti i problemi di moltiplicazione. Non potevano più usare una tabella fisica per modellizzare tali numeri grandi e avevano ancora bisogno di lavoro per sviluppare immagini mentali e argomentazioni matematiche basate su ciò che avevano appreso dal modello fisico. Questi studenti avranno anche bisogno di rivedere questa idea quando studieranno i calcoli con le frazioni e i decimali.

Qualche volta le congetture degli studenti su proprietà e relazioni matematiche risulteranno essere sbagliate. E’ essenziale per gli studenti imparare che parte del ragionamento matematico è esaminare e tentare di capire perché qualcosa che sembrerebbe essere vero non lo è e iniziare a usare controesempi in questo contesto. Forse ancora più importante: dovrebbero arrivare a capire che quando uno si impegna nel ragionamento matematico, presentare idee che poi non risultano vere è parte dello sforzo. Queste idee “sbagliate” spesso servono a portare a galla importanti discussioni e scoperte matematiche.

Mentre gli studenti sviluppano nuove abilità e conoscenze matematiche, oppure incontrano nuovi tipi di problemi matematici, devono continuamente rivedere, ampliare e aggiornare le generalizzazioni che hanno fatto. Quando gli studenti applicano il loro ragionamento a un'area di contenuti matematici, iniziano a sviluppare una rete di generalizzazioni che fornisce un fondamento per la comprensione matematica e la percezione (Russell, 1999). Quando Matt, lo studente dell'esempio del raddoppiare, partiva pensando a triplicare oltre che raddoppiare, aveva cominciato a ragionare su una classe più ampia di problemi e poteva alla fine arrivare ad affermazioni più generali della sua congettura.

Qual è il ruolo dell'insegnante nello sviluppo del ragionamento matematico?

Per fare sì che esperienze come quelle degli esempi in questa sezione accadano frequentemente, l'insegnante deve stabilire l'aspettativa che la classe come comunità matematica, continuamente sviluppa, verifica e applica congetture sulle relazioni matematiche. Per esempio, in una classe di quarto livello, gli studenti stavano ordinando frazioni. Per iniziare questa attività, l'insegnante aveva chiesto agli studenti di identificare le frazioni comprese tra $\frac{1}{2}$ e 1. Dopo che gli studenti avevano parlato a coppie, l'insegnante chiese come avevano scelto le loro frazioni:

Patrice: Stavamo parlando su come si potrebbe fare, se prendi il numero sopra, il numeratore, più grande della metà del denominatore ma non uguale al denominatore come $\frac{5}{5}$ perché sarebbe un intero.

Insegnante: Sembra che abbiate fatto un'ipotesi. Qualcun'altro può spiegarla?

Justin: Se hai $\frac{3}{4}$, la metà di 4 è 2, allora hai bisogno di un numero più grande di 2 ma non 4.

Insegnante: C'è qualcun altro che può spiegarlo?

Rita: $\frac{4}{8}$ dovrebbe essere lo stesso che $\frac{1}{2}$ perché 4 è la metà di 8, così qualcosa oltre la metà dovrebbe funzionare, ma non può essere lo stesso numero o sarebbe un intero.

Interrogando abitualmente gli studenti in questo modo, l'insegnante ha stabilito l'aspettativa che gli studenti ascoltino con cura e tentino di capire le idee degli altri studenti. Nelle lezioni in cui avevano luogo i ragionamenti, anche la comunicazione – sia proporre idee chiaramente che ascoltare con attenzione – doveva essere una priorità. Oltre ad ascoltare e riformulare idee, come sopra, gli studenti in questi livelli dovevano imparare a sviluppare solide argomentazioni matematiche. Devono considerare il loro lavoro come creare argomentazioni adeguate e convincenti.

L'insegnante dovrà anche decidere quali congetture sono matematicamente significative perché gli studenti ne proseguano l'esame. Per fare questo, l'insegnante deve tenere conto di abilità, necessità e capacità di comprensione degli studenti e del programma per la classe. Infine, l'insegnante dovrebbe lavorare per ricordare agli studenti le ipotesi che hanno tirato fuori e le argomentazioni matematiche che hanno creato per il lavoro futuro. Il ragionamento non è qualcosa da farsi in giorni particolari durante la lezione di matematica, ma dovrebbe essere intessuto in tutta la matematica in cui gli studenti sono impegnati.

Standard 8: Comunicazione

I programmi di matematica devono usare la comunicazione per favorire la comprensione in modo che tutti gli studenti:

- organizzino e consolidino il loro pensiero matematico per comunicare con gli altri;
- esprimano idee matematiche coerentemente e in maniera chiara ai compagni, agli insegnanti e agli altri;
- estendano le loro conoscenze matematiche considerando i pensieri e le strategie altrui;
- usino il linguaggio matematico come un preciso mezzo di espressione.

Elaborazione: livelli 3-5

L'abilità a leggere, scrivere, ascoltare, pensare e comunicare sui problemi svilupperà e renderà più intensa la comprensione della matematica degli studenti (NCTM 1989, p. 78). Nei livelli 3-5, gli studenti usano la comunicazione come uno strumento per capire e generare strategie di soluzione. L'elaborazione scritta è più coerente di quanto lo sia nei primi livelli, e la terminologia matematica è spesso usata assieme al linguaggio quotidiano per spiegare concetti. Nelle discussioni in classe, gli studenti diventano gli ascoltatori dei commenti degli altri - cioè parlano l'un l'altro, con lo scopo di convincere o porre domande ai loro coetanei. Il discorso è soprattutto centrato sul dare un senso alle idee matematiche e sull'uso sensato delle idee matematiche nel porre e risolvere problemi (NCTM 1991, p. 45).

Nei livelli 3-5, gli studenti sviluppano le loro abilità imparando dagli altri e lavorando insieme agli altri. La loro comunicazione consiste non solo in conversazioni tra studente e insegnante o tra studente e studente, ma anche in studenti che ascoltano altri coetanei e si uniscono in gruppi di discussione al fine di chiarire, porre domande e manifestare idee. A seconda dello scopo dell'elaborazione scritta, gli studenti diventano più minuziosi e coerenti nel loro ragionamento e nelle loro descrizioni di strategie per risolvere i problemi.

• Com'è la comunicazione nei livelli 3-5?

Nei livelli 3-5, la comunicazione in classe (condividere il pensiero, fare domande, spiegare e giustificare) dovrebbe essere un fatto comune. La condizione ambientale in classe dovrebbe incoraggiare gli studenti a esprimere e scrivere idee matematiche, domande e soluzioni. Per esempio, dopo il lavoro preparatorio sui decimali, Ms. Nolte tenne occupati i suoi studenti sul seguente problema al fine di aiutarli a usare la loro comprensione dei decimali per pensare a metodi per sommarli (Schifter, Bastable, e Russel in press, pp. 82-91):

Fai finta di essere un gioielliere. A volte la gente viene per farsi restringere un anello. Quando tagli un anello per farlo più piccolo prendi la porzione d'oro in cambio del lavoro che hai fatto. Recentemente hai accumulato queste quantità:

1,14g; 0,089g; 0,3g

Ora hai da fare un lavoro di riparazione per il quale hai bisogno di un po' d'oro. Ti chiedi se ne hai abbastanza. Lavora insieme al tuo gruppo per calcolare quanto oro hai accumulato. Sii preparato a mostrare alla classe la tua soluzione.

Durante questa attività, l'insegnante pone gli studenti davanti a una situazione di problem solving. Sebbene avessero lavorato con numeri decimali, non avevano discusso come addizionarli. Come era usuale nella classe, ci si aspettava che gli studenti parlassero con i loro coetanei per risolvere il problema e condividessero i loro risultati e il loro pensiero. Gli studenti usarono la comunicazione come una parte naturale ed essenziale del processo di problem solving. Mentre i gruppi lavoravano, l'insegnante camminava tra gli studenti:

- Nicole: Potremmo segnare i numeri sulla destra come facciamo con gli altri numeri.
- Ned: Forse dovremmo allineare i decimali, ma non so perché dovremmo farlo.
- Insegnante: Penso che voi stiate suggerendo che potreste allineare i numeri di questo problema in modo diverso da come allineate nelle addizioni i numeri interi. Vero?
- Ned: Annuisce
- Insegnante: Perché allineate i numeri interi come fate ? per quale motivo?
- Ned: Non lo so. E' solo il modo in cui lei lo fa. E' così che abbiamo imparato a farlo.
- Mark: Penso che ci sarebbe di aiuto se disegnassimo una figura come quella dei blocchi [base 10]. Forse allora potremmo raffigurarlo.

L'insegnante si sposta in un altro gruppo dove gli studenti hanno rappresentato il loro problema così:

$$\begin{array}{r}
 114 \\
 + 089 \\
 \hline
 206
 \end{array}$$

- Insegnante: Cosa è successo ai numeri decimali?
- Joe: Abbiamo deciso di tralasciare i decimali e sommare i numeri come di consueto. In questo modo abbiamo potuto allinearli sulla destra e fare la somma. Abbiamo lasciato lì lo zero ma si può eliminarlo dal momento che non significa niente.
- Insegnante: Siete tutti d'accordo?
- Studenti: Sì.
- Insegnante: State dicendo quindi che se partite con 1,14 grammi d'oro e altri pezzettini sommandoli si arriva a 206 grammi d'oro?

Ascoltando attentamente i discorsi del gruppo, Ms. Nolte riformulò il suggerimento di Ned per assicurarsi di averne colto esattamente il pensiero, per aiutarlo a focalizzare i concetti matematici importanti e per guidarlo a considerare il fatto che questo problema è correlato a quelli a lui più familiari. La sua risposta le diede l'importante conferma della comprensione da parte di Ned dell'algoritmo dell'addizione. Nonostante fosse capace di seguire i procedimenti dell'addizione, gli mancava una comprensione dei concetti che stanno dietro le procedure. Posto di fronte al problema di mostrare come si sommano i decimali, Ned dovette approfondire anche la sua comprensione dei numeri interi.

Nella discussione con il gruppo di Joe, l'insegnante pose una domanda che portava gli studenti a pensare alla ragionevolezza della loro risposta considerandola in relazione al contesto reale. La comprensione che la loro risposta non aveva nessun senso, portò gli studenti a rivedere il problema.

In questa particolare situazione l'insegnante decise di lasciar lavorare i ragazzi nella loro confusione. Le decisioni dell'insegnante su cosa dire o non dire, chiedere o non chiedere, si basarono sulle sue osservazioni di come gli studenti hanno lavorato su questo problema, su cosa hanno fatto nel precedente lavoro, sulle sue interpretazioni delle loro discussioni e anche sul suo desiderio di indurre gli studenti a fare un ulteriore ragionamento critico.

Dopo che i gruppi finirono il loro lavoro, la classe ebbe una discussione. Rob riferì che i bambini nel suo gruppo avevano rappresentato il problema in questo modo :

$$\begin{array}{r}
 .3 \text{ g} \\
 1.14 \text{ g} \\
 + .089 \text{ g} \\
 \hline
 1.529 \text{ g}
 \end{array}$$

Ned domandò immediatamente come avessero deciso di allineare i numeri in quel modo e Rob rispose che il gruppo pensava di aver bisogno di allineare decimi con decimi, centesimi con centesimi, per farlo venire esatto. Joe, il cui gruppo aveva ottenuto per risultato 206 tralasciando i decimali, pensò che fosse possibile tralasciare lo zero dello 0,089 dal momento che “esso non conta niente”. Teresa entrò nella discussione dicendo: “non puoi tralasciare lo zero. Ci deve essere, altrimenti hai ottantanove centesimi invece di 89 millesimi, e non sono la stessa cosa”. Mark continuò a insistere per il suo modello, ma era perplesso. “Se avessi un insieme di superficie piane, allora le aste sono decimi e i punti sono centesimi, ma non so come disegnare i millesimi eccetto che con i puntini. Dopo non posso dire come si continua”. Allora un altro studente, Ben, suggerì che il blocco delle migliaia potrebbe essere un'unità, così le superfici piane potrebbero essere i decimi, le aste i centesimi e i punti i millesimi.

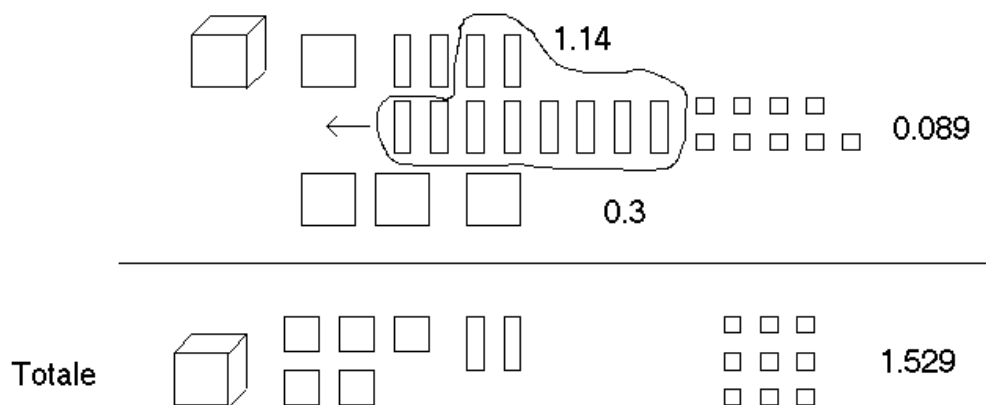


Fig. 5-20 Lavoro di Ben

Mark ascoltò attentamente la spiegazione di Ben, annuendo. Anche Teresa era molto interessata alla spiegazione, soprattutto quando capì che lo zero era molto significativo per decidere quali blocchi usare. Dopo questa presentazione gli studenti scrissero sui loro quaderni. Molti dissero che la dimostrazione aveva reso chiaro che i decimi devono essere addizionati ai decimi e i centesimi ai centesimi, per formulare una risposta giusta. Alcuni proposero nuovi problemi e disegni col modello dei blocchi in base 10. Gli studenti che avevano eliminato il punto dei decimali scrissero “Metodo incasinato” per indicare che il loro metodo era sbagliato.

Poiché gli studenti erano in un ambiente dove era normale parlare delle proprie opinioni, i bambini erano disinvolti nell’esprimere le loro idee, anche se erano differenti da quelle degli altri. Oltre a focalizzare il loro pensiero, gli studenti tentarono anche di capire il pensiero degli altri e, in alcuni casi, tentarono di correlarlo con il loro. Ned, che prima non era stato capace di spiegare perché i numeri interi sono allineati come negli algoritmi dell’addizione tradizionale, chiese a Rob perché il suo gruppo avesse allineato i numeri. Ned stava acquisendo consapevolezza del suo apprendimento facendo domande su un concetto che non gli era abbastanza chiaro. Ben pensava al dilemma di Mark e arrivò a una soluzione che divenne chiara per Mark.

L’uso del modello a blocchi in base 10 fornì un’altra opportunità per capire e conversare. Un concreto punto di riferimento aiuta gli studenti ad avere una comprensione più chiara e più facilmente condivisibile. (Hiebert et al. 1997.) La conversazione che precedette, accompagnò e seguì la spiegazione di Ben, diede significato al modello dei blocchi in base 10. Mark aveva visto il modello sempre in un solo modo finché Ben non gli mostrò un altro modo di vederlo.

Durante la lezione le interazioni dinamiche erano, in questa classe, aspetti molto importanti della capacità dei bambini di dare un senso a quello che stavano facendo. Poiché c’era tempo per parlare, scrivere, fare modelli e disegnare figure, oltre ad avere la possibilità di lavorare in piccoli gruppi, in grandi gruppi e individualmente, gli studenti che avevano lavorato in modi diversi, ebbero tutti l’opportunità di imparare.

- **Qual è il ruolo dell’insegnante nello stimolare e migliorare la comunicazione?**

Gli insegnanti devono creare un ambiente nella classe in cui gli studenti si sentano pronti a rischiare intellettualmente per trovare le soluzioni. Gli insegnanti nella prassi devono fornire agli studenti problemi basati sui concetti matematici più importanti del curriculum, in modo che gli studenti possano lavorare in situazioni che richiedono confronto e riflessione. Nelle lezioni di ogni giorno gli insegnanti devono prendere decisioni estemporanee su quali punti della conversazione matematica devono essere messi in evidenza e quali si possono ignorare, e quando lasciare gli studenti scervellarsi su un problema o piuttosto dare un’istruzione diretta. Ms. Nolte, per esempio, scelse di lasciare un gruppo di studenti a combattere con il fatto che la loro risposta era irragionevole nel contesto del problema. Gli insegnanti devono perfezionare il loro modo di ascoltare, domandare, parafrasare, sia per indicare la direzione dell’apprendimento della matematica, sia per fornire modelli per il dialogo tra gli studenti. Le domande possono nello stesso momento suscitare, estendere e sfidare il modo in cui pensano gli studenti. Periodicamente, gli insegnanti possono aver

bisogno di discutere esplicitamente le strategie di comunicazione degli studenti sia quelle efficaci sia quelle no. Per esempio, gli insegnanti possono mostrare come si pongono domande e come si parafrasa, poi far notare e spiegare queste tecniche agli studenti. Gli insegnanti possono anche mettere in rilievo esempi di buona comunicazione fra studenti. ("Ho notato che Karen e Malia non erano d'accordo su una risposta. Non solo hanno spiegato i loro ragionamenti l'una all'altra molto attentamente, ma anche si sono anche ascoltate vicendevolmente. Entrambe hanno capito il ragionamento dell'altra. È stato difficile, ma alla fine, hanno capito che un percorso aveva più senso dell'altro"). Gli insegnanti devono aiutare gli studenti a imparare a non criticare, ma a formulare domande quando non sono d'accordo o non capiscono il ragionamento di un compagno. Quando spiega un concetto o una strategia a un coetaneo, lo studente è costretto a riesaminare, e quindi ad approfondire, i concetti matematici. In ambienti dove le strategie di comunicazione sono insegnate, modellate e previste, gli studenti alla fine inizieranno ad usare le tecniche dell'ascolto, della parafrasi e del porre domande nelle loro discussioni matematiche.

Inoltre gli insegnanti devono dare agli studenti qualche aiuto nello scrivere su concetti di matematica. Gli insegnanti dovrebbero far sì che la scrittura degli studenti sia corretta, completa, coerente e chiara. Specialmente all'inizio, gli insegnanti dovranno ridare agli studenti quello che hanno scritto per poterlo revisionare. Inoltre gli studenti avranno bisogno di opportunità per controllare con i compagni la chiarezza del loro lavoro. Inizialmente quando gli studenti hanno difficoltà nel capire cosa devono scrivere durante la lezione di matematica, l'insegnante potrebbe chiedere loro di usare parole, disegni e simboli per spiegare un concetto specifico a un compagno assente. Per aiutare gli studenti a scrivere sui loro processi di ragionamento, l'insegnante potrebbe porre un'attività di problem solving in classe e poi chiedere, "cosa avete fatto fino a ora per risolvere questo problema, quali decisioni avete preso e perché le avete prese?"

Mentre gli studenti rispondono, l'insegnante potrebbe spiegare, "questo è esattamente quello che io vorrei che voi mi diceste nel vostro scritto." Condividere il lavoro degli studenti è un altro modo per aiutarli a capire quello che ci si aspetta, inclusa la differenza tra una risposta completa e una incompleta. Per esempio, fu chiesto agli studenti di scrivere una risposta completa alla domanda seguente (Kouba, Zawojewski, e Strutchens 1997):

Jose mangiò mezza pizza. Ella ne mangiò metà da un'altra.

Jose disse che aveva mangiato più pizza di Ella, ma Ella disse che entrambi avevano mangiato la stessa quantità.

Usa parole e figure per dimostrare che Jose potrebbe avere ragione.

Le risposte degli studenti dimostrarono diversi livelli di comprensione, vedi Figura 5.21. Il primo studente affermò che entrambe le pizze avevano la stessa grandezza. Sebbene lo studente usasse parole e disegni nella risposta, la soluzione era corretta solo se l'unità era la stessa, presupposto che non può essere rilevato dall'informazione data. Il secondo studente indica con il suo disegno che la grandezza di una metà dipende dalla grandezza dell'unità. Tuttavia, non descrive il suo ragionamento. La terza soluzione, che include parole e disegni è corretta e completa per il fatto che chiarisce perché Jose potrebbe avere ragione. La discussione delle varie risposte date dagli studenti durante l'anno, specialmente quando i concetti e i problemi di matematica diventano più complessi, è un modo efficace per aiutare gli studenti a continuare a migliorare le loro abilità di comunicazione.

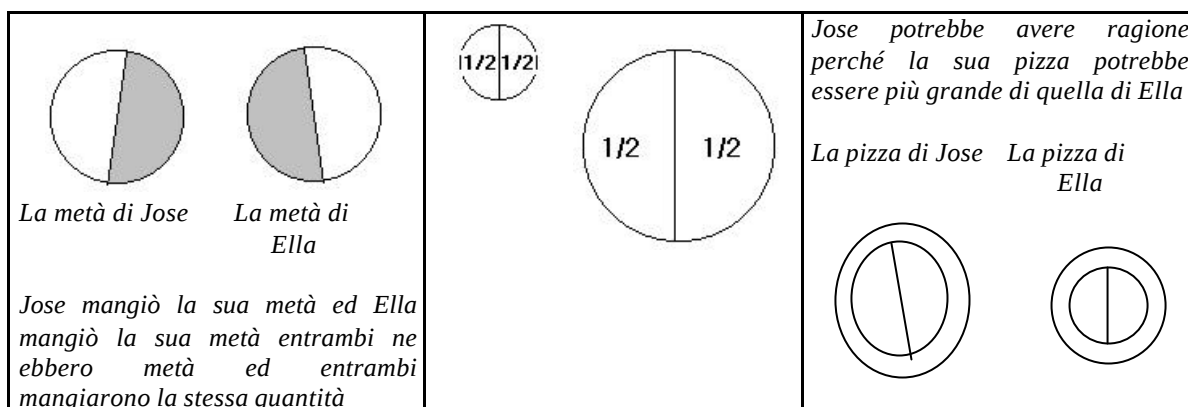


Figura 5. 21. Le soluzioni degli studenti per il problema della pizza.

Standard 9: Collegamenti

I programmi di matematica devono mettere in evidenza i collegamenti per agevolare la comprensione della matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano e usino connessioni fra diverse idee matematiche;
- capiscano come le idee matematiche si assemblano l'una all'altra per produrre un insieme coerente;
- riconoscano, usino e imparino la matematica in contesti a essa estranei.

Elaborazione: livelli 3-5

La matematica consiste in una rete di idee correlate. Sebbene talvolta la matematica sia vista come un insieme di argomenti, procedure e processi isolati, la potenza della matematica risiede nella connessione di ogni idea con le altre. Queste connessioni sono molte e le più diverse all'interno dei livelli 3-5 del curriculum. Per esempio, le operazioni di moltiplicazione e divisione sono correlate, nel senso che una è l'inversa dell'altra. La moltiplicazione può essere pensata come addizione ripetuta. Può essere modellizzata per mezzo di disposizioni rettangolari ed essere così collegata al concetto di area di un rettangolo. La tavola di moltiplicazione suggerisce una moltitudine di modelli e può condurre a una ricerca sui numeri primi e sui numeri composti. La conoscenza del valore di 5×9 permette agli studenti di sviluppare metodi per calcolare 5×90 o 50×900 o anche 500×18 (per esempio, come doppio di 500×9). Nel tempo, con una guida appropriata e con l'esperienza, nei livelli 3-5 dovrebbero essere in grado di osservare, scoprire, discutere e utilizzare con continuità i collegamenti tra idee e processi matematici. Con queste attività, gli studenti dovrebbero cominciare a percepire la struttura e la bellezza della matematica.

- **Perché le connessioni sono importanti nei livelli 3-5?**

Gli studenti nei livelli 3-5 incontrano una considerevole mole di contenuti matematici nuovi e la loro abilità nel comprendere e maneggiare queste idee nuove consiste in parte nel capire

come sono connesse. Le situazioni del mondo reale forniscono ricche e varie opportunità di collegare ciò che stanno imparando al mondo reale, e viceversa. Le esperienze a casa, a scuola e all'interno della loro cerchia di amici possono valorizzare le esperienze matematiche. Questi luoghi e queste opportunità dovrebbero essere perseguiti per lo stimolo che possono fornire agli studenti. Per esempio, un gruppo di quindici ragazzi potrebbe voler investigare su questioni che riguardano il menu scolastico: quanti studenti pranzano a scuola se nel menu è presente la pizza? Come varia questo numero nell'arco dell'anno? Varia rispetto al giorno della settimana in cui si serve la pizza o alla stagione? Come fanno gli addetti al servizio a stimare il numero di pizze necessarie? Incoraggiare gli studenti a porsi domande e facilitare la discussione, li aiuta a valorizzare la matematica e li motiva allo studio di idee nuove.

Anche le ricerche matematiche al di fuori di un contesto reale sono appropriate e importanti. Per esempio, nella sezione di questo capitolo relativa alle rappresentazioni, è presentata una ricerca degli studenti sul seguente problema: "nella tavola della moltiplicazione, ci sono più prodotti pari o più prodotti dispari? Perché?" Questa è una domanda matematica, senza una reale connessione con il mondo, ma è stimolante in quanto presenta un problema intellettuale, un problema che può essere studiato da studenti dei livelli 3–5 usando approcci diversi. Il valore di una questione matematica non dipende tanto dalla possibilità di contestualizzarlo nel mondo reale, quanto dalla possibilità che offre allo studente di affrontarlo usando strumenti che possiede o che può costruire.

Oltre ai collegamenti che si possono stabilire tra le idee matematiche, la matematica può essere connessa e utilizzata anche nell'ambito di altre discipline. La costruzione di queste connessioni fornisce delle opportunità per arricchire l'apprendimento in entrambe le aree. Per esempio, in un'unità didattica di economia nell'ambito degli studi sociali, una classe di quarto livello stava studiando la popolazione e l'estensione di ogni stato. Si posero le seguenti domande: "qual è lo stato in cui l'estensione per persona è maggiore e quello in cui è minore?" Gli studenti utilizzarono mappe, almanacchi e costruirono diagrammi per sintetizzare i risultati. Il progetto fornì loro molte opportunità per leggere e discutere questioni riguardanti la densità della popolazione e la gestione del territorio, e dunque per utilizzare gli strumenti della matematica per analizzare e organizzare informazioni.

Nei livelli 3–5, i collegamenti con l'area linguistica (comunicazioni e interpretazioni scritte e orali) giocano un ruolo importante nell'apprendimento. Quando gli studenti affrontano un problema relativo a una situazione significativa, possono usare il contesto per agevolare la comprensione. Inoltre, molti curricula basati sull'apprendimento per scoperta richiedono di leggere e assimilare informazioni stampate. L'esperienza di alcuni insegnanti conferma che, nonostante crei qualche difficoltà, questo contribuisce a migliorare le abilità di lettura. Nei livelli 3–5, dove l'attenzione allo sviluppo del linguaggio e alle abilità di lettura è preminente, è importante assicurare e valorizzare le connessioni matematiche. Il legame tra il linguaggio e la matematica attraverso l'uso di appropriati libri per bambini è un ottimo modo per favorire la discussione matematica. Dopo la lettura di *How much is a Million* (Schwartz 1985), gli studenti possono discutere la loro personale esperienza sui grandi numeri oppure organizzare attività per l'osservazione di situazioni in cui compaiono questi numeri.

La scienza e la matematica sono intimamente connesse, nel senso che è naturale che i contenuti di un'area emergano durante lo studio dell'altra area. Nei livelli 3–5, gli studenti sviluppano importanti processi necessari all'indagine scientifica e al problem solving: fare inferenze, misurare, comunicare, classificare, prevedere. Le modalità di studio che li rendono in grado di costruire questi processi spesso comprendono contenuti significativi sia per la

matematica sia per le scienze. È importante che gli insegnanti di matematica e di scienze confrontino le idee, sia matematiche sia scientifiche, che emergono dallo studio e promuovano la discussione su entrambe.

- **Qual è il ruolo degli insegnanti nell'aiutare gli studenti a fare dei collegamenti?**

Dovrebbero selezionare gli obiettivi e aiutare gli studenti a esplorare e a sviluppare idee matematiche di difficoltà via via crescente; dovrebbero riconoscere e utilizzare le situazioni in cui è possibile stabilire connessioni tra la matematica e le altre discipline; dovrebbero porre domande per stimolare la curiosità degli studenti, incoraggiarli a costruire il sapere e a sviluppare strategie basate sulla matematica che conoscono. Per esempio, chiedere agli studenti “ti sembra ragionevole questa risposta?” dovrebbe incoraggiarli a riflettere sulla risposta e sul contesto, a costruire altra conoscenza per giustificare o mettere in dubbio la risposta.

Gli insegnanti dovrebbero incoraggiare gli studenti a essere curiosi sul loro mondo e a servirsi della matematica per la sua comprensione. I contesti scientifici possono essere molto produttivi per l'esplorazione e l'uso della matematica. Gli insegnanti dovrebbero programmare ogni giorno esperienze per favorire un apprendimento delle idee matematiche basato su indagini sistematiche e quantitative di fenomeni a cui gli studenti sono interessati. Queste possono includere applicazioni molto differenziate, come uno studio della relazione tra la lunghezza del braccio e l'altezza, una ricerca sulla robustezza di un particolare marchio di carta da cucina, uno studio sulle dimensioni delle scatole di cereali e di come dalle dimensioni dipende la quantità di cereali contenuti nella scatola. Per l'esplorazione delle connessioni, i contesti matematici possono essere ugualmente stimolanti per gli studenti dei livelli 3-5. Potrebbero osservare per esempio le regolarità nei numeri “super-pari” (il doppio dei numeri pari), creare dei grafi e trovare delle rappresentazioni geometriche.

Le connessioni tra idee matematiche aiutano gli studenti a vedere la matematica come un corpo unico di conoscenze, piuttosto che come un insieme di concetti e procedure difficili e slegate. Se vedono le idee matematiche connesse le une alle altre, possono lavorare piacevolmente alla loro comprensione, piuttosto che memorizzare dei fatti senza capirli. Il compito degli insegnanti e degli estensori dei curricula è creare delle attività il cui contenuto matematico sia significativo, che incrementino le abilità e le conoscenze e che contribuiscano a costruire la rete dei collegamenti tra le idee.

Standard 10: Rappresentazioni

I programmi di matematica devono mettere in evidenza le rappresentazioni per agevolare la comprensione della matematica, in modo che tutti gli studenti:

- creino e usino le rappresentazioni per organizzare, registrare e comunicare idee matematiche;
- sviluppino un repertorio di rappresentazioni che possa essere utilizzato proficuamente, con flessibilità e appropriatezza;
- usino le rappresentazioni per modellare e interpretare fenomeni fisici, sociali e matematici.

Elaborazione: livelli 3-5

Idee o situazioni matematiche possono essere rappresentate in diversi modi, attraverso un modello concreto, un'equazione, un grafico o un'immagine mentale. Il solo atto di rappresentare una questione o un'idea, richiede che lo studente la esprima chiaramente e le dia forma in maniera tale che possa analizzarla e svilupparla. I matematici si affidano a mezzi di rappresentazione come linguaggio di comunicazione e di pensiero. Gli studenti dei livelli 3-5 hanno bisogno di aumentare la propria capacità di creare e usare rappresentazioni, quando trattano ed esaminano concetti e strumenti matematici e li usano per risolvere problemi.

- **Che cos'è una rappresentazione matematica e perché è importante?**

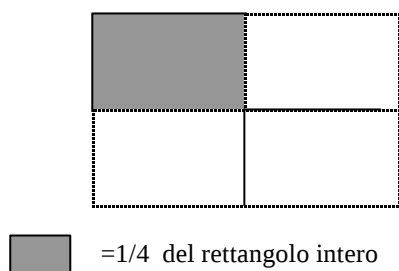
Una rappresentazione è un'immagine. Quest'immagine può essere un modello concreto, una tabella, un diagramma, un grafico, o forse anche la risoluzione scritta di un problema. Una rappresentazione matematica può essere anche l'immagine mentale di un problema, al quale si può rapidamente far riferimento ma che non richiede una forma di rappresentazione esterna. Tali rappresentazioni aiutano a descrivere, chiarire, o estendere idee matematiche concentrandosi su determinate caratteristiche essenziali. Gli studenti rappresentano idee quando costruiscono una tabella di dati sulla loro squadra preferita, quando descrivono, a parole, o con immagini, le caratteristiche essenziali di un oggetto, come nel caso di un cilindro, o quando trascrivono un problema con un'espressione numerica, un'equazione o un diagramma. Buone rappresentazioni sono sia uno strumento di pensiero sia uno strumento di comunicazione. (Esty and Teppo 1944; Kaput 1989).

Si consideri il seguente problema proposto a studenti di una classe di quinto livello:

Di quanto varia l'area di un rettangolo se i lati raddoppiano?

Gli studenti che rappresentano in qualche modo il loro problema, hanno maggiore possibilità di individuare relazioni importanti rispetto a quelli che affrontano il problema senza rappresentazioni. La risposta iniziale di Whitney è stata che l'area del nuovo rettangolo era il doppio di quella del rettangolo iniziale. La rappresentazione mentale di Whitney non era dettata da alcun'esperienza reale conseguita con rappresentazioni concrete. Whitney avrebbe

potuto fermarsi lì, ma un compagno mise in dubbio la sua risposta e la spinse a "difendere" la propria tesi in realtà a riflettere in maniera più approfondita sul problema. La bambina decise di aver bisogno di una figura (Figura 5.22) per giustificare il proprio pensiero.



L'area del nuovo rettangolo è 4
volte più grande del rettangolo

Figura 5.22. Rappresentazione di Whitney

Il disegno aiutò Whitney a comprendere la complessità del problema e la spinse a considerarlo con maggiore attenzione. In particolare il disegno le mostrò che il nuovo rettangolo era, non solo più grande, ma esattamente quattro volte più grande del rettangolo originale. La figura le fornì anche un modo per illustrare la sua risposta e difenderla dinanzi agli altri.

Betsy affrontò lo stesso problema elencando i valori di vari rettangoli e cercando una formula numerica. Dopo molti esempi, come $5 \times 5 = 25$ e $10 \times 10 = 100$, concluse che l'area si era quadruplicata. I suoi esempi erano limitati a casi particolari (quadrati). In effetti, non aveva considerato il caso più generale. Gli studenti devono imparare che le rappresentazioni limitate a casi particolari possono indurre in errore. In questi casi l'insegnante ha il ruolo, particolarmente importante, di promuovere nuove indagini e di puntualizzare l'imprecisione e l'incompletezza delle rappresentazioni usate. Gli esempi prodotti aiutarono Betsy a vedere che la nuova area era quattro volte l'area originale. Tuttavia non le mostrarono chiaramente il perché. Whitney e Betsy hanno rappresentato il problema in modi diversi. Entrambi i modi hanno fornito una rappresentazione che le ha messe in grado di osservare l'effetto prodotto sull'area del rettangolo dal raddoppio della sua lunghezza e della sua larghezza. Senza dubbio, rappresentazioni diverse mettono in luce caratteristiche differenti di una medesima situazione, e gli studenti traggono beneficio da quelle esperienze in cui descrivono una situazione matematica in vari modi.

Rappresentare numeri mediante simboli matematici differenti fornisce un mezzo per pensare ai numeri in modi diversi e per analizzare le proprietà dei numeri. Ad esempio, gli studenti di una classe di terzo livello hanno lavorato insieme per produrre metodi diversi per considerare e rappresentare il numero 36, vedi Figura 5.23.

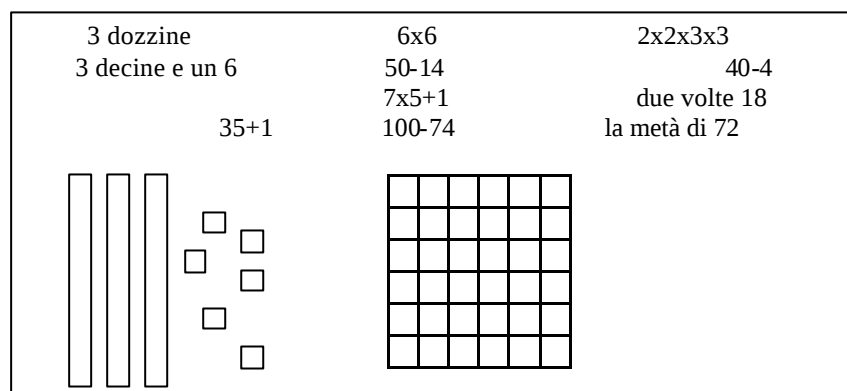


Figura 5.23. Modi di rappresentare 36

Ogni rappresentazione di 36 mette in evidenza proprietà diverse del numero e può essere utile per scopi diversi. Considerare il numero 36 in questi modi diversi migliora nello studente la capacità di vedere e usare i numeri. Rafforza anche la convinzione che espressioni matematiche diverse evocano immagini nuove e diverse. Per esempio, 3 decine e 6 unità è una maniera di pensare al numero 36 che può essere utile quando lo si vuole aggiungere a un altro numero. D'altra parte, pensare a 36 metri quadrati come alla dimensione di una stanza quadrata di 6×6 può servire come base per pensare alla misura di un'altra stanza o di un altro spazio. Gli studenti che percepiscono i numeri in vari modi, hanno maggiori strumenti per studiarli e per usarli.

- **Qual è il ruolo dell'insegnante rispetto allo sviluppo e all'uso di rappresentazioni?**

Gli studenti dei livelli 3-5 acquisiscono e usano strumenti, sempre più sofisticati e disparati, per rappresentare concetti matematici, incluse tecniche per organizzare diagrammi e grafici, e l'utilizzo di modelli concreti come, ad esempio, solidi geometrici. Cominciano a scoprire il pregio di rappresentazioni diverse della stessa idea. Per di più, si servono di strumenti elettronici per rappresentare e organizzare informazioni e idee. Devono essere coinvolti in esperienze che li aiutino a fare le cose seguenti:

- registrare in maniera organizzata concetti matematici;
- creare rappresentazioni accurate e complete di idee matematiche;
- usare schematizzazioni e notazioni convenzionali per analizzare e comunicare nuove idee matematiche;
- cercare di scoprire perché alcune rappresentazioni sono più utili di altre in determinate situazioni.

Imparare a descrivere o rappresentare il pensiero in modo organizzato, sia nella risoluzione di problemi, sia nella condivisione di una soluzione, è, per molti studenti, un'abilità acquisita. Gli insegnanti potrebbero e dovrebbero far capire quanto sia importante rappresentare idee matematiche in modi diversi. Realizzare ciò in classe, quando si lavora a un problema, è un modo facile ed efficace per stimolare alcuni studenti a lasciarsi guidare. Anche ragionare sul perché alcune rappresentazioni siano più convenienti di altre dà rilievo a questo modo di procedere e aiuta gli studenti a mettere in discussione le varie

rappresentazioni. Consideriamo, ad esempio, la questione seguente, proposta ad una classe del quarto livello:

Nella tabellina della moltiplicazione ci sono più prodotti pari o dispari? Motivare la risposta.

Alcuni studenti potrebbero, per formulare una risposta, iniziare con degli esempi (Figura 5.24). Altri possono creare un elenco più sistematico, come ha fatto Jane con una tavola di moltiplicazione. Organizzare il lavoro aiuta a individuare schemi che altrimenti resterebbero nascosti. L'insegnante, per stimolare la generalizzazione, potrebbe rappresentare il problema in un altro modo (figura 5.26).

$$\begin{array}{l} 4 \times 3 = 12 \text{ pari} \\ 2 \times 5 = 10 \text{ pari} \\ 3 \times 7 = 21 \text{ dispari} \end{array}$$

Figura 5.24. Lavoro di Scott

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 5.25. Lavoro di Jane

X	P	D
P	P	P
D	P	D

Figura 5.26. Lavoro dell'insegnante

Ogni rappresentazione rivela un modo diverso di considerare il problema. Prestare attenzione ai diversi metodi e, nello stesso tempo, alle diverse rappresentazioni aiuterà gli studenti a costatare quanto sia importante considerare un problema da diversi punti di vista; e a notare che l'insegnante ha aggiunto un'ulteriore rappresentazione per fornire un altro modo di studiare il problema. La creazione di modelli per organizzare l'informazione e attirare l'attenzione (attraverso il confronto) sul valore di rappresentazioni organizzate, è necessaria a molti studenti.

Il linguaggio matematico contiene tecniche per l'annotazione e l'organizzazione di idee specifiche della disciplina. Gli studenti dei primi livelli imparano molti simboli

(numerici, operazionali, relazionali), convenzioni (per esempio, espressioni numeriche) e schemi organizzativi (per esempio, tabelle etichettate). Nei livelli 3-5 il loro repertorio di simboli, strumenti, e notazioni convenzionali dovrebbe espandersi ed essere manifestamente connesso ai concetti esaminati. Gli studenti di questi livelli dovrebbero acquisire l'abilità di preparare un semplice foglio elettronico (Figura 5.27), scrivere un'equazione, tracciare e classificare accuratamente un diagramma. Le loro rappresentazioni dovrebbero essere più dettagliate e utili di quelle richieste nei primi livelli. Ad esempio, la ricetta prevede la capacità di passare da una dose a una dose e mezza o a due dosi.

	A	B	C	D	
1			RICETTA BISCOTTI		
2					
3			Quantità necessarie		
4	Ingredienti	<u>Per 4 biscotti</u>	<u>Per 36 biscotti</u>	<u>Per 48 biscotti</u>	
5	Farina (tazze)	1			
6	Zucchero cristallizzato (tazze)	0.5			
7	Zucchero integrale (tazze)	0.5			
8	Bicarbonato di sodio (cucchiaini da the)	0.4			
9	Cannella (cucchiaini da the)	0.5			
10	Avena (tazze)	1.5			
11	Burro (tazze)	0.5			
12	Uova	1			
13					

Figura 5.27. Foglio elettronico sui biscotti

Imparare a interpretare, usare e costruire rappresentazioni utili richiede diligente e ponderata attenzione in classe (Greeno and Hall 1997). Insegnare forme di rappresentazione (per esempio, grafici, diagrammi, espressioni numeriche) fine a sé stesse non è produttivo. Piuttosto queste sono strumenti utili per costruire il sapere e per comunicare sia l'informazione sia la conoscenza. Bisogna riconoscere che le rappresentazioni, standard o non-standard, concrete o mentali, hanno uno scopo, e gli insegnanti dovrebbero incoraggiarne la creazione e la scelta per raggiungere tale scopo. Infine, le rappresentazioni spingono gli insegnanti a promuovere tra gli studenti un dibattito sui vantaggi e sui limiti di ogni particolare rappresentazione.

