Capitolo 3

Panoramica degli standard per i livelli pre-K-12

I principi guida per i programmi di matematica discussi nel Capitolo 2 forniscono indicazioni che devono essere prese in considerazione nelle classi, scuole, distretti e oltre. Sono una base per i suggerimenti curricolari che appaiono in questa bozza dei *Principi e standard per la matematica scolastica*. Al centro di questi principi guida c'è la domanda: quali contenuti e quali procedimenti matematici dovrebbero conoscere ed essere in grado di usare gli studenti mentre progrediscono nei livelli scolastici? I dieci standard presentati in questo capitolo intendono rispondere a questa domanda.

Nella nostra società la necessità di capire la matematica non è mai stata più grande, e continuerà ad aumentare. Questa necessità include i seguenti fatti:

Alfabetizzazione matematica. Le richieste della vita d'ogni giorno sono sempre più matematiche e tecnologiche. I nostri studenti vivranno in un mondo dove le decisioni intelligenti, richiederanno spesso valutazioni quantitative.

Alfabetizzazione culturale. La matematica è un'importante conquista culturale e intellettuale dell'umanità e i cittadini dovrebbero sviluppare un apprezzamento consapevole e una buona comprensione di tale conquista.

La matematica per il lavoro. Proprio come è aumentato enormemente il livello della matematica necessaria per una cittadinanza intelligente, così è aumentato anche il livello del pensiero matematico e della capacità di risolvere problemi necessari nel lavoro.

Matematici, scienziati, ingegneri e altri che usano la matematica. Equità ed eccellenza devono essere entrambi l'oggetto della matematica scolastica. Fornendo occasioni a molti studenti, e mantenendo allo stesso tempo livelli alti, ci sarà un maggiore numero di persone in grado di seguire queste carriere.

Quali sono gli obiettivi matematici appropriati per gli studenti?

Gli standard qui presentati sono ambiziosi ma necessari per formare una società in grado di pensare e ragionare in modo matematico. Per essere membri produttivi della società, tutti i cittadini devono sviluppare una base comune di conoscenze e abilità matematiche. Gli standard descrivono le abilità di base attraverso un corpus articolato di conoscenze e competenze.

Gli standard riguardano sia i contenuti sia i processi matematici. Grossomodo, gli standard di contenuto rappresentano quello che gli studenti dovrebbero conoscere, mentre gli

standard di processo riguardano i modi di acquisire e usare questa conoscenza. In ogni caso, questa è una separazione artificiosa. In pratica, che cosa una persona è in grado di fare dipende molto da cosa conosce e da come sa sfruttare le sue conoscenze.

Cinque standard descrivono i contenuti matematici che gli studenti dovrebbero imparare:

- numeri e operazioni;
- modelli, funzioni e algebra;
- geometria e senso dello spazio;
- misura;
- analisi dei dati, statistica e probabilità.

Cinque standard descrivono i processi matematici attraverso i quali gli studenti dovrebbero acquisire e usare le loro conoscenze matematiche:

- Problem Solving;
- ragionamento e dimostrazione;
- comunicazione;
- collegamenti;
- rappresentazioni.

Bisogna riconoscere che questo insieme di standard non separa chiaramente il contenuto della matematica scolastica in sottoinsiemi disgiunti. La matematica è una disciplina altamente interconnessa, quindi le aree sono sovrapposte e integrate fra loro. Alcuni argomenti nella analisi dei dati, per esempio, potrebbero essere indicati come questioni di misura. Modelli e funzioni compaiono in tutta la geometria. I numeri pervadono tutte le aree della matematica. La suddivisione di questi standard è intesa unicamente come un modo per organizzare i contenuti e i processi. Ogni scelta di divisione dei contenuti matematici finisce per evidenziare alcune aree e oscurarne altre. Consideriamo la matematica discreta come esempio: in questa bozza dei *Principi e standard* gli argomenti principali della matematica discreta sono compresi, ma distribuiti nei vari standard, piuttosto che separati in uno standard a parte.

Gli standard di processo puntano sulle competenze essenziali per la crescita matematica degli studenti. Mentre gli studenti imparano la matematica, essi svilupperanno un repertorio sempre crescente di abilità per la risoluzione dei problemi, una vasta gamma di "abitudini mentali" e una crescente raffinatezza nei ragionamenti. Gli studenti dovrebbero anche abituarsi a esprimersi in modo matematico, sia oralmente sia per iscritto, guadagnando scioltezza nel linguaggio matematico ed essendo in grado di fare collegamenti all'interno della matematica e tra la matematica e le altre materie.

Puntare allo scopo principale e alla coerenza: sviluppo nel curricolo

Un cambiamento significativo tra *Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics* (NCTM 1989) e questa bozza di *Principi e standard* è che ci sono dieci standard, e ognuno si applica lungo tutti gli anni pre-K-12. All'interno di ogni standard, viene identificato un piccolo numero di punti focali. La panoramica degli standard che segue in

questo capitolo tende a descrivere i punti focali all'interno di ogni standard, come essi vengono affrontati all'inizio, sviluppati e completati nei vari livelli scolastici.

In aggiunta, la panoramica dà il senso di come la comprensione e il rendimento degli studenti si sviluppino in ogni area negli anni pre-K-12. Dall'organizzazione attraverso i livelli scolastici secondo gli standard comuni, si può tracciare la crescita di conoscenza e affinamento degli studenti mentre progrediscono nel curricolo. Ogni visione d'insieme contiene un riassunto dei punti principali che sono poi elaborati in descrizioni dettagliate dei contenuti di ogni livello scolastico (livelli pre-K-2, livelli 3-5, livelli 6-8, e livelli 9-12) che sono presentati nei capitoli 4-7.

I lettori possono decidere di leggere questo documento per fili conduttori - cioè seguendo un particolare standard attraverso le panoramiche e le discussioni delle fasce di livello. Questo può essere fatto nel modo più semplice nella versione elettronica dei *Principi e standard*, che si trova al sito http://standards-e.nctm.org.

#3 Reazione del lettore

Mentre leggi le sezioni successive, considera le seguenti domande:

- **Qual è la tua reazione a questo insieme di standard?**
- **Come hai reagito alle definizioni degli standard? Sono espressi chiaramente?**
- **Ogni visione d'insieme porta a un'immagine chiara dello sviluppo dello standard nel percorso pre-K-12? Ci sono punti in cui il testo non è chiaro? Che tipi di esempi sono più utili?**
- **Esistono discrepanze tra le panoramiche degli standard e i materiali in ogni fascia di livello del capitolo? Dove sono le discrepanze, se ce ne sono?**

Standard del curricolo matematico: pre-K-12

Standard 1: Numeri e operazioni

I programmi di matematica devono facilitare lo sviluppo della percezione dei numeri e delle operazioni in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici;
- capiscano il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro;
- usino gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e facciano stime in modo appropriato.

Standard 2: Modelli, funzioni e algebra

I programmi di matematica devono porre attenzione ai modelli, alle funzioni, ai simboli in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali;
- usino forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche;
- usino modelli matematici e analizzino le variazioni in contesti sia reali sia astratti.

Standard 3: Geometria e senso dello spazio

I programmi di matematica devono essere attenti alla geometria e al senso dello spazio in modo che tutti gli studenti:

- analizzino le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali;
- selezionino e usino diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici;
- riconoscano l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche;
- usino la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica.

Standard 4: Misura

I programmi di matematica devono dare spazio ai problemi di misura in modo che tutti gli studenti:

- capiscano le grandezze, le unità, e i sistemi di misura;
- applichino diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure.

Standard 5: Analisi dei dati, statistica e probabilità

I programmi di matematica devono porre attenzione all'analisi dei dati, alla statistica e alla probabilità in modo che tutti gli studenti:

- si pongano domande e vi rispondano raccogliendo, organizzando e rappresentando dati;
- interpretino dati usando metodi analitici;
- sviluppino e valutino deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati;
- capiscano e applichino nozioni di base su caso e probabilità.

Standard 6: Problem Solving

I programmi di matematica devono concentrarsi sul *problem solving* come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- costruiscano nuove conoscenze matematiche attraverso il loro lavoro con i problemi;
- sviluppino l'attitudine a formulare, rappresentare, astrarre e generalizzare in situazioni all'interno e all'esterno della matematica;
- applichino un'ampia varietà di strategie per risolvere problemi e le adattino a nuove situazioni;
- controllino e riflettano sul loro pensiero matematico nella risoluzione dei problemi.

Standard 7: Ragionamento e dimostrazione

I programmi di matematica devono spingere a ragionare e costruire dimostrazioni come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano il ragionamento e la dimostrazione come parti essenziali e fortemente efficaci della matematica;
- formulino e indaghino congetture matematiche;
- sviluppino e valutino ragionamenti e dimostrazioni matematiche;
- scelgano e usino vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriati.

Standard 8: Comunicazione

I programmi di matematica devono usare la comunicazione per favorire la comprensione in modo che tutti gli studenti:

- organizzino e consolidino il loro pensiero matematico per comunicare con gli altri;
- esprimano idee matematiche coerentemente e in maniera chiara ai compagni, agli insegnanti e agli altri;
- estendano le loro conoscenze matematiche considerando i pensieri e le strategie altrui;
- usino il linguaggio matematico come un preciso mezzo di espressione.

Standard 9: Collegamenti

I programmi di matematica devono mettere in evidenza i collegamenti per agevolare la comprensione della matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano e usino connessioni fra diverse idee matematiche;
- capiscano come le idee matematiche si assemblano l'una all'altra per produrre un insieme coerente;
- riconoscano, usino e imparino la matematica in contesti ad essa estranei.

Standard 10: Rappresentazioni

I programmi di matematica devono mettere in evidenza le rappresentazioni per agevolare la comprensione della matematica, in modo che tutti gli studenti:

- creino e usino le rappresentazioni per organizzare, registrare e comunicare idee matematiche;
- sviluppino un repertorio di rappresentazioni che possa essere utilizzato proficuamente, con flessibilità e appropriatezza;
- usino le rappresentazioni per modellare e interpretare fenomeni fisici, sociali e matematici.

Standard 1: Numeri e operazioni

I programmi di matematica devono facilitare lo sviluppo della percezione dei numeri e delle operazioni in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i numeri, i modi di rappresentarli, le relazioni fra di loro e i sistemi numerici;
- capiscano il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro;
- usino gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e facciano stime in modo appropriato.

Elaborazione: pre-K-12

Numeri, operazioni e calcoli hanno una storia lunga e rilevante nel curricolo scolastico di matematica. In aggiunta, quest'area della matematica, forse più di ogni altra, è ampiamente riconosciuta e valutata anche al di fuori degli ambiti scolastici. Lo scopo principale di questo standard è sviluppare il senso dei numeri - capire che cosa significano, come relazionarli tra loro, la loro dimensione relativa, come si possono pensare e rappresentare in vari modi, e qual è l'effetto dell'operare con i numeri. Con una buona guida e con esperienze significative, gli studenti sviluppano nel tempo "una buona intuizione riguardo ai numeri e alle loro relazioni" (Howden 1989). Gli studenti dotati di senso dei numeri scompongono naturalmente i numeri, sviluppano e usano punti di riferimento, usano le relazioni tra le operazioni e la loro conoscenza del sistema numerico a base dieci per risolvere i problemi, fare stime ragionevoli,

e sono portati a capire i numeri, i problemi e i risultati (Sowder 1992). Gli studenti, con abilità legate al senso dei numeri e delle operazioni, sono tranquilli quando operano matematicamente.

La conoscenza dei fatti di base è essenziale per sviluppare il senso dei numeri e per permettere agli studenti di risolvere i problemi. Gli studenti devono essere in grado di richiamare le basi facilmente. Queste conoscenze di base comprendono addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni a una sola cifra. La comprensione e la competenza riguardo alle conoscenze di base possono essere sviluppate attraverso l'esplorazione di strategie di pensiero come "7+8 è lo stesso di 7+7+1". La comprensione e le abilità possono anche svilupparsi attraverso sessioni pratiche varie e sistematiche a casa e a scuola. La maggior parte degli studenti dovrebbero essere in grado di richiamare addizioni e sottrazioni in modo veloce alla fine del secondo livello e di richiamare alla mente moltiplicazioni e divisioni con tranquillità e facilmente alla fine del quarto livello.

Allo stesso modo, *la facilità di calcolo* – possedere e usare efficienti e accurati metodi di calcolo - è essenziale nello sviluppo del senso dei numeri, e per il successo nella maggior parte delle aree della matematica. In alcuni casi, gli studenti useranno strategie mentali, come pensare "6 x 2.5" come "sei per due più sei mezzi". In altri casi, gli studenti usano una combinazione di strategie mentali e appunti sulla carta per produrre risultati veloci e accurati. In altri casi, gli studenti possono usare carta e penna per eseguire algoritmi di calcolo (inventati da loro o convenzionali), particolarmente quando i numeri sono grandi o complicati. La cosa più importante è che gli studenti devono avere metodi da usare efficientemente e che producano risposte corrette. Usare e manipolare i materiali, riflettere sulle strategie e confrontarle aiuta gli studenti a sviluppare una comprensione dei numeri, delle operazioni e delle loro proprietà e conduce alla conoscenza dei fatti base come pure alla facilità di calcolo.

Tutti gli studenti dovrebbero acquisire le strategie per fare delle stime nel corso di calcoli complessi e la propensione a giudicare la ragionevolezza dei dati numerici e dei risultati calcolati. L'abilità e la propensione a calcolare dipendono dalla comprensione dei numeri- la loro dimensione, la posizione nel sistema numerico, le forme equivalenti - e dall'effetto dell'operare con quei numeri (es. " Che cosa succede quando un numero intero viene moltiplicato per un numero minore di 1?"). La stima può essere usata per rispondere direttamente a una domanda, come: " Quanta pizza abbiamo dovremmo ordinare?" o usata per valutare la ragionevolezza di una risposta data con carta e penna o con la calcolatrice. Quando arrivano alle scuole superiori, gli studenti dovrebbero capire gli errori di misurazione e i loro effetti sui calcoli, e dovrebbero sviluppare la capacità di distinguere tra la stima e l'approssimazione.

Le calcolatrici sono strumenti accessibili e attendibili per il calcolo e tutti gli studenti dovrebbero usarle nei momenti opportuni. Dovrebbero essere considerate strumenti legittimi per il calcolo durante le lezioni di matematica, particolarmente quando sono necessari molti calcoli impegnativi per risolvere un problema. Comunque quando lo scopo dell'insegnamento riguarda lo sviluppo di algoritmi di calcolo (convenzionali o prodotti dagli studenti) la calcolatrice dovrebbe essere messa da parte per permettere il raggiungimento di questo scopo. Oggigiorno le calcolatrici sono comunemente usate come strumenti di calcolo all'esterno della classe. L'ambiente all'interno della classe dovrebbe riflettere questa realtà.

- **Capire i numeri, modi di rappresentarli, le relazioni tra di loro e sistemi numerici.**

La conoscenza dei concetti di numero e delle proprietà connesse deve diventare più accurata nel corso dell'esperienza scolastica. Nei livelli pre-K-2, gli scolari imparano a contare, rappresentare e confrontare la grandezza dei numeri in molti modi, aiutati da rappresentazioni fisiche che loro possono manipolare, come pedine e pallottolieri. Gli scolari dei livelli pre-K-2 incontreranno e dovrebbero esplorare numeri più grandi di quanto possano manipolare fisicamente. Infatti sono molto spesso interessati ai numeri grandi, particolarmente se si inseriscono in contesti tratti dalle loro esperienze. Per esempio, gli studenti più giovani possono contare e tenere una registrazione aggiornata del numero di monete raccolte in una tombola scolastica o del numero di lattine collezionate in un progetto di conservazione. Gli studenti dei primi anni esplorano e usano le relazioni parte-parte e parte-intero. In questo modo, il "24" è considerato come "due decine e quattro unità"; oppure come "due insiemi da dodici". Considerare i numeri in modo flessibile fornisce la base per capire il modo in cui i numeri sono rappresentati nel sistema numerico a base dieci.

Dal livello 2, gli studenti possono cambiare il modo di considerare un "10" dalla semplice accumulazione di "dieci unità" al considerarlo sia come "dieci unità" sia come "una decina". Questo riconoscimento è un primo passo verso la comprensione della struttura del sistema numerico a base dei dieci (Cobb e Wheatley 1998). Nei primi anni di scuola elementare, gli studenti possono anche incontrare e imparare le frazioni più comuni (p.e. 1/2, 3/4) suggerite da contesti significativi e lavorando sul linguaggio già posseduto. Per esempio, la maggior parte degli studenti ormai usa la parola *mezzo* anche nel suo vocabolario al di fuori della scuola.

Gli studenti dei livelli 3-5 continuano a sviluppare e a estendere le loro idee e la loro gamma di strategie di pensiero relative ai numeri interi e al loro uso. Sapere che "3408" è "tre migliaia, quattro centinaia, e otto unità" è collegato a "4408", a "3308", e "3500". Tali comprensioni sono parte dello sviluppo continuo del senso dei numeri e contribuiscono a generare e a usare le strategie per contare.

Nei livelli 3-5, gli studenti studieranno e rappresenteranno frazioni e decimali come numeri, ponendo l'attenzione a come essi sono collegati ai numeri interi e l'uno all'altro. Capire come una frazione o una parte decimale di una quantità sia collegata all'unità è un'idea chiave in questi livelli. L'attenzione didattica in questa fascia dovrebbe essere indirizzata a sviluppare il concetto di numero razionale piuttosto che le strategie di calcolo sui numeri razionali. Esperienze utili per gli studenti nei livelli 3-5 includono la creazione di rappresentazioni fisiche di frazioni e decimali, il confronto di frazioni con parametri familiari come 1/2, la rappresentazione di frazioni e decimali su una linea numerica, e la produzione di rappresentazioni equivalenti di frazioni e di decimali. A questo livello di comprensione, gli studenti dovrebbero essere capaci di stimare le somme di frazioni. Per esempio, "1/2+3/8" deve essere minore di uno perché ogni addendo è minore o uguale a 1/2.

Mentre gli studenti nei livelli 3-5 studiano i numeri, imparano anche le classi numeriche e le loro caratteristiche, come ad esempio quali numeri sono pari, dispari, primi, composti o quadrati. Riconoscere tali caratteristiche pone le basi per controllare le regole di divisibilità, trovare i fattori primi, o capire le relazioni funzionali.

Nei livelli 6-8, gli studenti allargano il loro lavoro con le frazioni, ai decimali e alle percentuali, in modo da potersi muovere agevolmente tra le equivalenze e da poter applicare una gamma di strategie per ordinare e confrontare i numeri razionali. Il cambiamento nel modo di pensare le frazioni come "parti di" specifiche unità per comprendere le frazioni come numeri si completa nei livelli intermedi. Anche la conoscenza e la capacità di usare i decimali nel sistema a base dieci, si estendono in questi anni. In aggiunta al calcolo con numeri razionali, gli studenti nei livelli 6-8 sviluppano anche strategie di calcolo per le frazioni e per i decimali.

La comprensione dei numeri molto grandi e di che cosa rappresentano continua a svilupparsi nei livelli intermedi. Gli studenti usano come strumenti le calcolatrici e i fogli elettronici per organizzare e analizzare i numeri nei contesti applicativi, e imparano a rappresentare numeri molto grandi o molto piccoli con notazioni scientifiche. Passando dai numeri naturali agli interi, si arricchiscono le intuizioni degli allievi della scuola media riguardo a ordine e grandezza. Incontrano anche i numeri irrazionali, come $\sqrt{2}$ e π, nel corso degli studi il teorema di Pitagora e la circonferenza.

Altre aree del curricolo sono più importanti dei numeri nei livelli 9-12; tuttavia, gli studenti continuano ad approfondire la comprensione delle proprietà dei numeri con le quali hanno già familiarizzato e vedono il sistema numerico da una prospettiva più completa. Sono possibili le notazioni scientifiche e le rappresentazioni di matrici. Al repertorio degli studenti si aggiungono anche i numeri complessi, e imparano che non tutte le proprietà dei numeri reali si conservano quando il sistema si amplia.

- **Capire il significato delle operazioni e come si relazionano tra di loro**

Mentre acquisiscono scioltezza nei calcoli, gli studenti devono capire il significato delle operazioni aritmetiche. Ciò comporta decidere quali operazioni devono essere usate per un particolare problema, come la stessa operazione può essere applicata a situazioni che sembrano essere piuttosto diverse le une dalle altre, come le operazioni si relazionano le une alle altre, e quale tipo di risultato aspettarsi.

Durante gli anni della scuola primaria, gli studenti trovano una varietà di significati per l'addizione e la sottrazione. La sottrazione può essere vista come un "portare via" oppure come una comparazione di due insiemi. Situazioni di addendi mancanti mettono in evidenza le relazioni tra addizione e sottrazione. Moltiplicazione e divisione possono iniziare ad avere un significato per gli studenti dei livelli pre-K-2, quando risolvono i problemi che nascono all'interno del loro ambiente. Tali problemi possono essere di questo tipo: quante fette di pane sono necessarie per fare quattro sandwich? come si può dividere equamente questo sacchetto di uvetta tra quattro persone? Benché l'attenzione principale nell'istruzione nei livelli pre-K-2 sia posta su addizione e sottrazione, gli studenti sono naturalmente curiosi quando incontrano situazioni che riguardano altre operazioni, quali moltiplicazione e divisione, e dovrebbero essere incoraggiati.

Puntare l'attenzione sul significato di moltiplicazione e divisione, in particolare con i numeri interi, diventa molto importante nei livelli 3-5. Creando rappresentazioni di situazioni di moltiplicazione e divisione, con diagrammi o oggetti concreti, gli studenti acquisiscono un senso delle relazioni tra addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione. Inventando strategie di calcolo come pure usando strategie convenzionali, gli studenti usano e

riconoscono la proprietà associativa, commutativa e distributiva e riconoscono lo zero e l'uno come identità. Lo sviluppo e il confronto delle strategie di calcolo fornisce un'opportunità per mettere a fuoco la natura degli algoritmi. Per esempio, molti algoritmi di moltiplicazione illustrano la proprietà distributiva, e le strategie di divisione talvolta coinvolgono processi iterativi.

Capire le operazioni con i numeri razionali è molto importante nei livelli 6-8. Gli studenti di questo livello rappresentano e sviluppano anche operazioni sui numeri interi. Le intuizioni degli studenti sulle operazioni devono essere riviste muovendosi all'interno di un sistema numerico allargato (Graeber and Campbell 1993). Per esempio la moltiplicazione di un numero positivo per una frazione minore di 1 produce un risultato più piccolo del numero, e ciò contrasta con le esperienze precedenti degli studenti che mostravano come dalle moltiplicazioni risultassero sempre numeri più grandi. E lavorare con gli interi mostra che le sottrazioni non sempre danno risultati più piccoli. Gli studenti dovrebbero anche focalizzare la relazione inversa tra moltiplicazione e divisione e la relazione tra una frazione e il suo reciproco. Il ragionamento proporzionale è fondamentale per operare con frazioni, decimali, tassi e rapporti nei livelli 6-8. Prima di questi livelli molte comparazioni che gli studenti hanno fatto sono additive, quali "di quanto è più alto?" o "quanti in più?". Nei livelli intermedi gli studenti dovrebbero diventare esperti nel creare rapporti per fare confronti che coinvolgono coppie di numeri, come nel problema: "se con tre pacchetti di cioccolato vengono fatte quindici tazze di cioccolata calda, quanti pacchetti sono necessari per fare sessanta tazze?"

Nei livelli 9-12, gli studenti continuano a studiare le operazioni e a stabilire connessioni tra le operazioni e i loro oggetti. L'addizione dei numeri complessi è equivalente all'addizione di vettori, laddove la moltiplicazione con numeri complessi ha l'interpretazione geometrica di una rotazione combinata con un riscalamento. Le operazioni funzionali come trovare la radice ennesima, il valore assoluto e l'elevamento a potenza – si basano sul lavoro precedente e sulla familiarità con i numeri. Le proprietà delle operazioni, quali la chiusura, sono parte della comprensione del sistema algebrico.

- **Usare gli strumenti e le strategie di calcolo con sicurezza e fare stime in modo appropriato**

Esistono una varietà di strumenti di calcolo efficienti che sono usati regolarmente dagli adulti, tra essi vi sono i calcoli mentali, le strategie con carta e penna, le stime, e le calcolatrici. Gli studenti hanno bisogno di esperienze che li aiutino a scegliere tra gli strumenti in modo appropriato. Quando si sceglie un metodo dovrebbero essere considerati il contesto particolare, la domanda, e i numeri coinvolti. I numeri permettono l'uso di strategie mentali? il contesto richiede una stima? Il problema richiede operazioni ripetute e noiose? Gli studenti dovrebbero valutare le situazioni del problema per determinare se sia necessaria una risposta stimata o esatta ed essere capaci di motivare la loro decisione. Strategie di stima e di calcolo esatto dovrebbero essere usate in combinazione nella risoluzione dei problemi.

Dal livello pre-K fino all'ottavo livello, ci si aspetta che gli studenti sviluppino delle strategie di calcolo basate sulla loro conoscenza dei numeri e delle operazioni e che spieghino e giustifichino le loro procedure. Descrivendo all'insegnante e ai loro compagni gli algoritmi che usano, gli studenti vedono che sono possibili molte procedure di soluzione e che alcune sono più efficaci di altre. Gli studenti dovrebbero diventare sciolti nel calcolo - cioè,

possedere efficienti e accurati metodi per risolvere problemi computazionali. Sviluppare scioltezza richiede equilibrio e collegamento tra comprensione concettuale e procedure computazionali, e si fonda su di un rapido accesso ai concetti numerici di base. Da un lato, le strategie di calcolo praticate e applicate senza una base concettuale sono spesso dimenticate o ricordate non correttamente (Kamii 1998), dall'altra, la comprensione senza la scioltezza può ostacolare il processo di risoluzione dei problemi.

Mentre i bambini negli anni del periodo pre-K-2 sviluppano la comprensione dei numeri interi e delle operazioni di addizione e sottrazione, l'attenzione educativa dovrebbe puntare a sviluppare strategie di calcolo con numeri di varia grandezza, come numeri interi a una e a più cifre. Le strategie prodotte dagli studenti dovrebbero essere condivise e discusse. Alla fine del secondo livello, gli studenti dovrebbero essere capaci di richiamare alla mente situazioni di sottrazione e addizione di base, dovrebbero essere sciolti nelle addizioni con numeri a due cifre, e dovrebbero conoscere il metodo per la sottrazione di numeri a due cifre.

Nei livelli 3-5, sia le strategie di calcolo prodotte dagli studenti sia quelle convenzionali per addizionare, sottrarre, moltiplicare e dividere i numeri interi vengono studiate e applicate ai grandi numeri, con molto esercizio per impadronirsene con sicurezza. Basandosi sulla sua idea di ricerca, Gravemeijer (1998) nota:

> l'idea da sottolineare è che gli studenti sviluppano concetti matematici, notazioni e procedure come strumenti di organizzazione quando risolvono problemi. In un simile processo gli algoritmi informali possono evidenziarsi come forme di abitudini ben organizzate per risolvere certi tipi di problemi. Con la guida dell'insegnante, questi algoritmi non ufficiali possono essere sviluppati in algoritmi convenzionali. Comunque uno può anche scegliere di incoraggiare gli algoritmi informali, essendo anch'essi un valido fine.

Gli studenti sviluppano e iniziano ad applicare strategie di calcolo coi decimali. In questi livelli gli studenti richiamano le basi della moltiplicazione e della divisione. I concetti base dei numeri razionali sono uno dei principali obiettivi educativi di questo livello, e questi concetti guidano a metodi formali per fare i calcoli con le frazioni. Per esempio, nel livello 5, un problema di questo tipo "1/4+1/2" dovrebbe essere risolto a mente con facilità, perché gli studenti dovrebbero avere chiare le immagini geometriche di 1/2 e 1/4 o essere capaci di usare le strategie di scomposizione, del tipo "1/4+1/2 = 1/4+(1/4+1/4)".

Il calcolo decimale e frazionario è un punto focale dell'istruzione nei livelli 6-8. Le strategie di calcolo con le frazioni dovrebbero basarsi sulla conoscenza concettuale sviluppata nei primi anni di scuola. Gli studenti dovrebbero arrivare ai livelli 6-8 capaci di calcolare con le frazioni abitualmente incontrate, basandosi su rappresentazioni mentali e concrete. Nei livelli 6-8, gli studenti dovrebbero anche sviluppare strategie di calcolo più generali che possono essere applicate a un'intera gamma di situazioni frazionarie. Dovrebbero poi estendere le strategie di calcolo per i numeri interi ai numeri decimali. Ci si aspetta inoltre che gli studenti svolgano con facilità i calcoli con i numeri razionali. Mentre sviluppano la comprensione del significato e della rappresentazione degli interi, essi dovrebbero anche sviluppare modi di calcolo con gli interi.

Nei livelli 9-12, gli studenti dovrebbero analizzare e confrontare gli algoritmi di calcolo come una parte dello studio del ruolo degli algoritmi in matematica. Confrontando gli algoritmi, individuano quelli che sono facili da spiegare, facili da usare e più efficaci. Dovrebbero essere in grado di leggere un diagramma di flusso e di decidere se descrive un metodo corretto per determinare se un numero è divisibile per 3. Gli studenti analizzano come

e perché sono costruiti gli algoritmi. A questo livello, gli studenti possono studiare i comuni algoritmi di calcolo per numeri interi e razionali come pure algoritmi inusuali che incontrano per la prima volta nella scuola superiore, compresi, per esempio, algoritmi per trovare radici reali o differenze finite di successioni.

Standard 2: Modelli, funzioni e algebra

I programmi di matematica devono porre attenzione ai modelli, alle funzioni, ai simboli in modo che tutti gli studenti:

- capiscano i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali;
- usino forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche;
- usino modelli matematici e analizzino le variazioni in contesti sia reali che astratti.

Elaborazione: pre-K-12

Modelli, funzioni e algebra comprendono l'uso sistematico di simboli, caratteristiche algebriche dei sistemi matematici, modelli di fenomeni, e lo studio matematico del cambiamento. Queste nozioni non sono solo legate le une alle altre ma anche strettamente collegate al numero e alle operazioni nonché alla geometria. Sono essenziali per tutte le aree della matematica e formano il linguaggio base con il quale si esprime la matematica. Le idee comprese in questo standard formano una delle parti più importanti del curricolo scolastico. L'algebra ha le sue radici nello studio della soluzione delle equazioni e si sviluppa in varie direzioni, compresi lo studio di funzioni, il ragionamento sugli oggetti astratti, la generalizzazione, e la centralità delle notazioni simboliche. Tutti questi sviluppi dovrebbero riflettersi nel curricolo scolastico.

Lo studio di modelli, funzioni e algebra, dovrebbe incominciare informalmente nei primi anni e svilupparsi in raffinatezza e ampiezza nei successivi anni scolastici. Le prime esperienze con concetti di modelli, funzioni, e algebra possono fornire una base consistente per preparare gli studenti a una più intensa attenzione su questa area nei livelli intermedi e attraverso tutto il percorso della scuola secondaria.

- **Capire i vari tipi di modelli e le relazioni funzionali**

La costruzione, il riconoscimento e l'ampliamento di modelli è un'attività naturale per i bambini. Un primo lavoro riguarda l'identificazione di regolarità, il riconoscimento dello stesso schema in forme differenti e l'uso di modelli per prevedere valori. Per esempio, "rosso-blu-blu-rosso-blu-blu-rosso-blu-blu…" è lo stesso che "ABBABBABB…" e il dodicesimo elemento sarà blu.

Modelli emersi da semplici situazioni introducono funzioni e successioni. Per esempio, se un giocattolo costa 2$, quanto spendo se compro un giocattolo? due giocattoli? tre giocattoli? *n* giocattoli? Il lavoro successivo con modelli crescenti (quali 1, 3, 6, 10, 15,…) e con schemi ripetuti (quali 1, 1, 3, 1, 1, 3,…) pone ulteriori fondamenti per queste nozioni. Nei livelli medi e nella scuola secondaria, le regolarità che sono alla base di modelli e

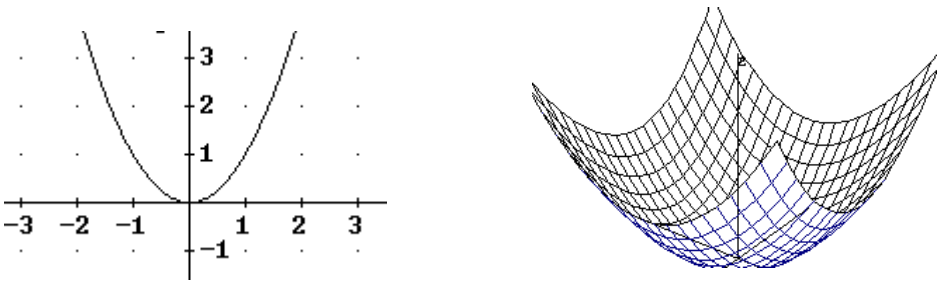
successioni diventano più complesse (per esempio crescita esponenziale). Il lavoro con successioni come esempio di funzioni è prolungato nella scuola secondaria allo scopo di stabilire il fondamento delle nozioni di limite e di serie infinita.

Nei primi livelli, gli studenti sanno descrivere modelli come 2, 4, 6, 8,… focalizzando come ogni termine si ottiene dal precedente (in questo caso, aggiungendo 2). Questo è l'inizio del pensiero ricorsivo. Più tardi gli studenti possono studiare successioni definite e calcolate meglio usando la ricorsione, come la successione di Fibonacci, "1, 1, 2, 3, 5, 8, …" nella quale ogni termine è la somma dei due termini precedenti. Successioni ricorsive compaiono naturalmente in molte discipline e possono essere studiate usando la tecnologia. Gli studenti dei livelli 9-12 potranno studiare funzioni e modelli che sono generati ricorsivamente.

Come altro importante passo nel loro lavoro iniziale con i modelli, gli studenti spesso descrivono le regolarità a parole piuttosto che con simboli matematici (English e Warren 1998). Uno scopo dell'istruzione matematica scolastica è quello di basarsi su questa verbalizzazione e fornire agli studenti un'esperienza sufficiente che li faccia trovare a proprio agio e li abitui a utilizzare con scioltezza i simboli matematici per rappresentare generalizzazioni.

I primi approcci alle funzioni e alla loro rappresentazione grafica includono anche attività come la registrazione della temperatura quotidiana o delle variazioni dell'altezza di una pianta riportate in grafici. La rappresentazione grafica di funzioni può essere usata nelle classi elementari. Nei livelli 6-8, le funzioni lineari e le interpretazioni di grafici sono oggetto di studio particolarmente importanti. L'interpretazione di grafici mantiene la sua importanza mentre gli studenti nei livelli 9-12 studiano sistematicamente altre famiglie di funzioni, comprese le funzioni polinomiali, razionali, esponenziali e trigonometriche. Questo studio sistematico nella scuola secondaria dovrebbe basarsi su precedenti esperienze scolastiche con le idee algebriche.

La buona conoscenza delle rappresentazioni simboliche, numeriche e grafiche è importante, quanto l'abilità a muoversi attentamente e facilmente tra queste rappresentazioni. La geometria analitica rende possibile la rappresentazione grafica delle funzioni e l'indagine delle loro proprietà geometriche, così come le simmetrie di un grafico. Calcolatrici grafiche e computer aiutano gli studenti in queste esperienze con rappresentazioni grafiche e numeriche, e permettono di esaminare e confrontare diverse classi di funzioni. Le relazioni tra funzioni che coinvolgono due o tre variabili possono avere descrizioni geometriche; per esempio, cosa accade quando la parabola $z=y^2$ (nel piano yz) mostrata in Figura 3.1 (a) è ruotata intorno all'asse z? Come si può riformulare per descriverla algebricamente?



(a) (b)

Figura 3.1. Parabola ruotata

Molti studenti arrivano prima alla comprensione della nozione di funzione mediante una serie di istruzioni, come "dato *n*, trova 2^n per $n = 0, 1, 2$ e 3" (Vinner e Dreyfus 1989). Per aiutare gli studenti a sviluppare una comprensione più avanzata delle funzioni, occorre una consistente esperienza con molteplici rappresentazioni di funzioni – comprese numeriche, grafiche e simboliche.

- **Usare forme simboliche per rappresentare e analizzare situazioni e strutture matematiche**

La rappresentazione simbolica di relazioni quantitative è l'essenza dell'algebra. Il suo potere di compressione permette di esprimere sinteticamente idee matematiche complesse, mentre i simboli e le espressioni agevolano la ricerca e la scoperta della soluzione. Comunque, insieme con questa potenza sorge una serie di ostacoli concettuali. Per esempio, la nozione di variabile è assai complessa. Nei livelli elementari gli studenti tipicamente sviluppano la nozione di variabile come sostituzione di uno specifico numero, come in

$$\bigcirc + 2 = 11.$$

Più tardi gli studenti imparano che la variabile x nell'equazione $3x+2=11$ ha un uso molto diverso dalla variabile x nell'equazione $(x + y)/2 = \sqrt{xy}$, ed entrambi gli usi sono assai diversi dall'uso di r nella formula $A = r^2$. La comprensione approfondita della variabile si sviluppa durante un lungo periodo di tempo e deve essere basata su ampie esperienze (Wagner e Parker 1993).

Un altro esempio di difficoltà concettuale nella comprensione della rappresentazione simbolica di relazioni quantitative riguarda la nozione di uguaglianza. Il segno di uguale può essere percepito in modi assai diversi. Per esempio, come conseguenza dell'ampia esperienza con l'uso del segno di uguale nel calcolo aritmetico, gli studenti percepiscono il segno di uguale in modo operativo, cioè come un segnale per calcolare (Kieran 1981). Prima della scuola secondaria, comunque, gli studenti devono imparare a considerare il segno di uguale come un simbolo di equivalenza e di equilibrio. In generale, se gli studenti sono invitati a impegnarsi ampiamente con la manipolazione simbolica prima che abbiano sviluppato una solida base concettuale per il loro lavoro, non potranno fare altro che manipolazioni meccaniche (Wagner e Parker 1993). La base per un significativo lavoro con la notazione simbolica deve essere elaborata in un lungo periodo di tempo, cominciando nelle classi elementari, ben prima dei livelli medi o secondari quando possono incontrare la materia formalmente denominata "algebra".

Quando i bambini lavorano con i numeri, spesso adottano strategie personali che sono di natura algebrica. L'insegnante può basarsi su queste tendenze naturali in modi adatti. Per esempio, un bambino può accorgersi che "4+5=4+4+1" e "5+6=5+5+1" e così via. Spiegando la sua osservazione a un altro bambino lo studente potrebbe disegnare la figura mostrata in Figura 3.2.

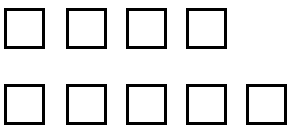


Figura 3.2. Doppio più 1

L'uso di una figura come esempio dimostrativo e non come registrazione di un fatto isolato rende algebrica la rappresentazione figurata. Oppure il bambino può semplicemente dire "doppio più 1". Poichè questa affermazione esprime una generalizzazione, essa è algebrica.

Nei livelli 6-8 la rappresentazione diventa più formale, così da aggiungere una potente prospettiva all'interazione tra rappresentazioni simboliche, figurate, concrete e geometriche. Anche relazioni algebriche complesse possono diventare chiare quando sono esaminate geometricamente. Queste argomentazioni geometriche spesso possono essere comprese molto prima di quanto ci si potrebbe aspettare che gli studenti siano in grado di eseguire elaborate manipolazioni di simboli algebrici. Per esempio, il disegno della Figura 3.3 aiuta a spiegare perché la somma dei primi numeri dispari è n^2.

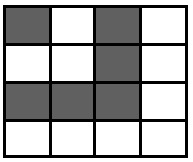


Figura 3.3. La somma di numeri dispari è un quadrato

Gli studenti possono simbolizzare la relazione come $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$ e, successivamente, possono dimostrarla con l'induzione matematica. Così, questa generalizzazione algebrica può essere affrontata e dimostrata in due modi molto diversi, uno accessibile a studenti nei livelli medi e l'altro che richiede più preparazione matematica. I due metodi si completano l'un l'altro e, infatti, ognuno mostra qualcosa di diverso sulla matematica.

La relazione tra algebra e geometria va anche nell'altra direzione, dal momento che gli studenti esprimono algebricamente idee geometriche. Per esempio, se una palla fatta di argilla con raggio r è rimodellata in un cono dello stesso raggio, qual è l'altezza del cono?

La nozione di struttura algebrica proviene dal porre attenzione alle proprietà delle operazioni numeriche. La comprensione delle proprietà di chiusura (per esempio, sapere che la somma di due numeri naturali è un numero naturale e che "3-8" non è un numero naturale) e le proprietà algebriche (per esempio, sapere che l'addizione è commutativa e la sottrazione no) diventa importante per lo studio di una varietà di sistemi, compresi i sistemi di numeri, polinomi, funzioni e matrici. Gli studenti possono ragionare sulle operazioni; scoprono, per esempio, che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione. Riflettere sui sistemi matematici complessi, porsi domande coerenti su ciò e trovare metodi per rispondere a queste domande sono cose importanti nell'apprendimento della matematica.

Un'altra importante componente delle strutture è la nozione di isomorfismo – identica struttura matematica che sta dietro fenomeni che potrebbero sembrare diversi. Per esempio, due situazioni possono avere differenti manifestazioni fisiche ma essere modellizzate con lo stesso grafico. Questo mostrerebbe che le due procedure hanno in comune importanti caratteristiche matematiche.

- **Usare modelli matematici e analizzare le variazioni in contesti sia reali che astratti**

Uno degli usi più potenti della matematica è la modellizzazione dei fenomeni. L'uso della notazione simbolica è centrale per la modellizzazione. Per esempio, reti di distribuzione e comunicazione, leggi della fisica, modelli di popolazione e insiemi di dati statistici, tutti possono essere espressi in linguaggio simbolico. L'algebra è implicita in ogni impiego abbastanza sofisticato di fogli elettronici. Se le relazioni tra un insieme di categorie numeriche sono ben comprese, questa comprensione sarà espressa nel linguaggio delle variabili, delle funzioni e delle relazioni.

Perciò è importante per gli studenti modellizzare un'ampia varietà di fenomeni, iniziando nelle prime classi. Quando gli studenti sono a proprio agio con famiglie standard di funzioni, possono usarle per modellizzare situazioni e identificarle come lineari, esponenziali e così via. Le funzioni trigonometriche sono utili per rappresentare fenomeni periodici. L'uso di laboratori attrezzati con computer permette agli studenti di ottenere velocemente da esperimenti fisici dati numerici affidabili, ampliando così la classe di situazioni che possono essere modellizzate. Le capacità grafiche, numeriche e simboliche di computer e calcolatrici possono allora essere usate per esplorare gli effetti di possibili variazioni nei modelli. Massimi e minimi diventano importanti, quando la variazione rende complesse le situazioni.

Lo studio di variazioni conduce all'analisi, ma gli studenti possono discutere le variazioni molto tempo prima di aver sostenuto un corso di analisi. Nei livelli pre-K-2, gli studenti che lavorano su un problema disegnando il grafico spazio-tempo per un corridore sono capaci di notare che per un momento la distanza aumenta rapidamente e poi l'incremento rallenta. Ogni processo dipendente dal tempo, rappresentato graficamente come $y=f(t)$ ha una pendenza ripida quando varia velocemente e una pendenza bassa quando varia lentamente.

Le successioni aritmetiche e geometriche differiscono nel modo in cui un elemento è definito in termini del suo precedente. Lo studio del cambiamento può essere connesso all'idea di ricorsione. Gli studenti elementari possono osservare in sequenze simili a 5, 8, 11, 14,… che ogni numero è proprio 3 in più del precedente. Avanzando di livello, studieranno variazioni più complesse nelle successioni, come 1, 3, 6, 10,… in cui la variazione da un termine al successivo è incrementata di 1. La crescita proporzionale, così come 2, 4, 8, 16,…, in cui ogni numero è multiplo del numero precedente, ha per risultato una relazione esponenziale, $y=2^n$.

Complessivamente, i concetti e le abilità nell'ambito di modelli, funzioni e algebra si sviluppano in complessità durante gli anni. Allo stesso modo, il pensiero degli studenti in questi ambiti deve evolversi e maturare mentre procedono nella scuola.

Standard 3: Geometria e senso dello spazio

I programmi di matematica devono essere attenti alla geometria e al senso dello spazio in modo che tutti gli studenti:

- analizzino le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali;
- selezionino e usino diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici;
- riconoscano l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche;
- usino la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica.

Elaborazione: pre-K-12

Molto della geometria dovrebbe essere imparata per mezzo di attività, con modelli fisici, disegni e software dinamico come strumenti di apprendimento. Attività ben progettate, disponibilità di strumenti appropriati e un insegnante di sostegno permettono agli studenti di fare congetture sulle strutture geometriche, esaminare le congetture degli altri e ragionare con cura sulla idee geometriche. L'obiettivo finale è per gli studenti studiare sistematicamente figure geometriche e strutture e utilizzare sempre di più ragionamento e dimostrazione formale nel loro studio. Geometria e senso spaziale sono componenti fondamentali per l'educazione matematica. Offrono modi per interpretare e riflettere sul nostro ambiente fisico per mezzo di astrazioni. Possono servire da strumenti di studio per altri argomenti in matematica e nelle scienze. Sostengono il pensiero creativo in tutta la matematica.

L'utilità delle idee geometriche nella rappresentazione e nella soluzione di problemi in altre aree della matematica e in contesti non matematici dovrebbero essere temi costanti nelle esperienze degli studenti con la geometria. Le rappresentazioni geometriche possono aiutare gli studenti a capire il senso di aree e frazioni; istogrammi e diagrammi a dispersione possono condurre a intuizioni sui dati; e grafici con le coordinate possono essere usati per analizzare e comprendere funzioni. Il ragionamento spaziale è di grande aiuto nell'uso di mappe, progettazione di itinerari, disegni di pavimentazioni e creazioni artistiche. Geometria e senso spaziale possono dunque aiutare gli studenti a vedere le strutture e le simmetrie intorno a loro.

- **Analizzare le caratteristiche e le proprietà degli oggetti geometrici bi- e tridimensionali**

Dai primi incontri con questo mondo, i bambini iniziano ad acquisire esperienza con figure e strutture dello spazio. I bambini dovrebbero iniziare a esplorare, identificare e descrivere una varietà di forme e fare osservazioni derivanti dalle loro indagini. Per esempio, studenti nei livelli pre-K-2 potrebbero usare varie figure per ricoprire un'area riconoscendo che i rettangoli funzionano bene in quanto hanno quattro "angoli perfetti". Nei livelli successivi gli studenti descrivono le proprietà delle figure e le loro parti, come lati e angoli. Per esempio, usando oggetti fisici o software geometrico per fare esperienze con una varietà di rettangoli, gli studenti nei livelli 3-5 potrebbero ipotizzare che i rettangoli hanno la

proprietà di avere due coppie di lati uguali, diagonali congruenti, che si bisecano e così via. Nei livelli 6-8 dovrebbero dedurre che un sottoinsieme di queste proprietà può caratterizzare i rettangoli. Nei livelli 9-12 dovrebbero essere capaci di usare il ragionamento deduttivo, gli assiomi e i teoremi della geometria per verificare le loro congetture sulle figure e risolvere problemi sulle figure geometriche usando il ragionamento formale. A tutti i livelli, gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a fornire appropriate spiegazioni per le loro congetture e soluzioni.

Competenze come visualizzare, descrivere, rappresentare, classificare, trasformare e indagare iniziano a svilupparsi con oggetti che possono essere visti, manipolati, e tenuti in mano. La tecnologia offre agli studenti l'opportunità di avere esperienze interattive con una larga varietà di forme a due o tre dimensioni. Queste competenze continuano a svilupparsi più astrattamente con lo studio delle proprietà delle figure e delle relazioni tra le proprietà. Alla fine, gli studenti sono capaci di descrivere, rappresentare, classificare e indagare connessioni tra le relazioni, espresse in catene logiche all'interno del sistema geometrico. Gli studenti dovrebbero dunque diventare sempre più capaci di formulare teoremi all'interno di un sistema assiomatico; riconoscendo le differenze tra termini primitivi, definizioni, assiomi e teoremi; e costruendo dimostrazioni originali.

- **Selezionare e usare diversi sistemi di rappresentazione, comprese le coordinate geometriche e lo studio dei grafici**

Il sistema delle coordinate ortogonali è uno strumento matematico potente che permette la traduzione di un problema da un ambiente, dove la soluzione è difficile, a uno diverso, dove la soluzione potrebbe essere banale. La conoscenza delle coordinate ortogonali è molto utile per risolvere una vasta gamma di problemi. In particolare, il sistema permette la rappresentazione di posizione, direzione e distanza. E' un ponte per collegare i mondi dell'algebra e della geometria.

I bambini imparano per primi i concetti di posizione relativa, come sopra, dietro, vicino e in mezzo. Successivamente possono fare e usare griglie rettangolari per collocare oggetti in una stanza o valori in una tabella. Nelle classi medie e secondarie, il piano delle coordinate diventa un mezzo per identificare i punti. Trovare distanze tra punti nel piano usando scale su mappe o la relazione pitagorica è un importante passaggio nelle classi medie. Le figure geometriche possono essere rappresentate analiticamente con l'uso di coordinate per identificare vertici o per la costruzione di figure designate assegnando vertici appropriati. Software geometrico, mappe, calcolatrici grafiche e carta millimetrata possono sostenere gli studenti mentre sviluppano la comprensione del movimento in un piano.

Gli studenti dovrebbero acquisire esperienza nell'uso di una varietà di rappresentazioni visive e con le coordinate per analizzare problemi e studiare la matematica. Nelle classi elementari, per esempio, la retta numerica fornisce un modo per dimostrare il significato dell'addizione di numeri interi che può allora essere esteso alle operazioni con gli altri tipi di numeri. Nei livelli 5-6, tabelle e griglie possono aiutare gli studenti a capire la moltiplicazione. Problemi più complessi possono essere considerati nella scuola media e secondaria. Nel tentativo di minimizzare la distanza che un'ambulanza avrebbe da percorrere per raggiungere un nuovo ospedale da ogni località della comunità, per esempio, gli studenti delle classi medie potrebbero usare la geometria del tassista. Per trovare la rotta più breve di un aereo tra città distanti, gli studenti nei livelli 9-12 userebbero la geometria sferica. E, se gli

studenti tentassero di minimizzare il costo per effettuare un viaggio fra città diverse, potrebbero usare la teoria dei grafi finiti.

- **Riconoscere l'utilità di trasformazioni e simmetrie nell'analisi di situazioni matematiche**

Le trasformazioni sono importanti aspetti del pensiero geometrico. I bambini arrivano a scuola con intuizioni non solo sulle figure ma anche su come possono muoverle. Attraverso le esperienze scolastiche con movimenti informali, come "far scorrere", "muovere a scatti" e "girare", realizzati usando specchi, piegando carta e disegnando, gli studenti della scuola elementare possono vedere queste idee di natura matematica. Nella scuola secondaria, le conoscenze degli studenti sulle trasformazioni diventano più formali e sistematizzate. Nei livelli 3-5 gli studenti dovrebbero fare ricerche sugli effetti delle trasformazioni e essere capaci di descriverle in termini matematici. Utilizzando software dinamico, gli studenti inizieranno a sviluppare una consapevolezza delle proprietà necessarie per definire una trasformazione. Per esempio, per trasformare una figura usando una rotazione, gli studenti devono definire il centro, il verso e l'angolo di rotazione, come mostra la Figura 3.4.

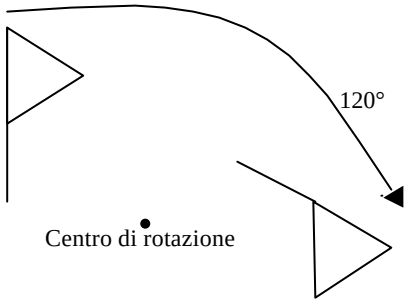


Figura 3.4. Una rotazione in senso orario di 120°

Nelle classi medie, gli studenti dovrebbero iniziare a comprendere le trasformazioni di congruenza, nelle quali figure congruenti coincidono usando una sequenza di isometrie - cioè trasformazioni che conservano la distanza. Dovrebbero poi estendere le loro conoscenze alle contrazioni e alle dilatazioni e saper descrivere le trasformazioni quantitativamente.

Le trasformazioni dovrebbero essere un importante strumento per gli studenti nei livelli 9-12 per risolvere problemi geometrici e non geometrici. Per esempio, possono essere usate nello studio di congruenze e similitudini. Uno studio sistematico delle composizioni di trasformazioni può rivelare agli studenti della scuola secondaria importanti intuizioni geometriche sulle proprietà algebriche di insiemi i cui elementi sono funzioni. Gli studenti saranno capaci di costruire dimostrazioni riguardanti le proprietà di trasformazioni e usare trasformazioni per costruire dimostrazioni in altri ambiti.

- **Usare la visualizzazione e il ragionamento spaziale per risolvere i problemi all'interno e all'esterno della matematica**

La visualizzazione spaziale comprende costruire e manipolare rappresentazioni mentali di oggetti a due o tre dimensioni e percepire il medesimo oggetto da prospettive

differenti. Un aspetto della visualizzazione spaziale comporta muoversi tra figure bi- e tridimensionali e le loro rappresentazioni. Gli studenti della scuola elementare possono avvolgere blocchi in fogli di carta come un passo verso l'apprendimento a predire se certi sviluppi corrispondono a certi solidi. Nelle classi medie, gli studenti dovrebbero essere capaci di fare disegni in prospettiva e creare vedute di fronte o di lato.

Supponiamo, per esempio, che una struttura a blocco abbia la vista di fronte e di lato mostrata nella Figura 3.5. Un bambino potrebbe essere sfidato a costruire una struttura che soddisfi ciascuna condizione. Nei livelli 3-5, gli studenti possono determinare se è possibile costruire più di una struttura soddisfacente entrambe le condizioni. Gli studenti della scuola media e secondaria possono essere invitati a trovare il minimo numero di blocchi necessari a costruire la struttura.

Figura 3.5. Struttura a blocchi

Gli studenti possono sviluppare le capacità di visualizzazione attraverso esperienze manuali con una varietà di oggetti geometrici e attraverso l'uso di tecnologie che permettano loro di girare, ridurre e deformare oggetti bi- o tridimensionali.

Nel corso degli anni, gli studenti dovrebbero sentirsi a proprio agio nell'analisi e nel disegno in prospettiva, stimando le parti componenti e descrivendo gli attributi che non possono essere visti ma che possono essere dedotti. Devono imparare a cambiare fisicamente e mentalmente la posizione, l'orientamento e la collocazione di oggetti in modo sistematico per sviluppare la comprensione sulla congruenza, la similitudine e le trasformazioni.

La visualizzazione può essere usata come strumento per sviluppare una congettura o un'argomentazione. I bambini potrebbero essere convinti che un "rombo" è addirittura un quadrato se lo vedono ruotato con un orientamento familiare. Studenti più grandi potrebbero usare ragionamenti spaziali per decidere la corrispondenza appropriata da usare nella dimostrazione che due triangoli sono congruenti. A livelli più avanzati, il ragionamento spaziale potrebbe essere di grande aiuto per gli studenti nel confrontare volumi di solidi generati dalla rotazione di regioni piane intorno a un asse. Dilatazioni e similitudini possono aiutare gli studenti a visualizzare relazioni di proporzionalità.

La visualizzazione e il ragionamento spaziale sono facilitate per studenti la cui esperienza quotidiana comprende ampie interazioni con animazioni al computer e altri ambienti tecnologici. Dalla connessione di queste esperienze alla geometria scolastica, gli studenti possono acquisire importanti strumenti per risolvere problemi in geometria e in altri ambiti della matematica.

Durante tutto lo sviluppo degli studenti, la comprensione geometrica e spaziale non solo aumenta ma si trasforma. Sebbene le aree messe a fuoco in questo standard dovrebbero riguardare classi di ogni livello, l'insieme degli oggetti geometrici che gli studenti comprendono e con cui possono operare si amplierà durante il loro progredire nella scuola.

Standard 4: Misura

I programmi di matematica devono dare spazio ai problemi di misura in modo che tutti gli studenti:

- capiscano le grandezze, le unità, e i sistemi di misura;
- applichino diverse tecniche, strumenti, e formule per determinare le misure.

Elaborazione: pre-K-12

La misura è importante nel curricolo pre-K-12 a causa della sua applicabilità e diffusione in tanti aspetti della vita di ogni giorno. Lo studio della misura fornisce anche l'opportunità di apprendere e applicare altri settori della matematica, come le operazioni numeriche, i concetti geometrici, la statistica e il concetto di funzione. La misura ha svariate caratteristiche che per la maggior parte degli adulti non sembrano così complesse come lo sono per gli studenti. Tali caratteristiche comprendono il riconoscimento che gli oggetti possiedono degli attributi che sono misurabili, come la lunghezza, il peso e la superficie; la scelta di appropriate unità di misura e la comprensione delle caratteristiche dei sistemi di misura che rendono possibile la loro generalizzazione ed estensione. Inoltre la misura può essere effettuata sia utilizzando tecniche diverse sia attraverso l'uso di strumenti, formule, misure indirette, approssimazioni successive e fattori di scala.

- **Capire le grandezze, le unità e i sistemi di misura**

Una grandezza misurabile è una caratteristica di un oggetto che può essere quantificata. I segmenti possiedono una lunghezza, le regioni del piano possiedono un'area e gli oggetti fisici possiedono una massa. Per i bambini, certi attributi degli oggetti sono più evidenti di altri. Ad esempio, la lunghezza di una matita viene percepita in modo più immediato rispetto all'area della sua sezione o al suo volume. Aiutare i bambini a comprendere le caratteristiche degli oggetti è un passo fondamentale nel favorire la loro comprensione della misura. La misura comincia quando i giovani studenti confrontano e classificano gli oggetti utilizzando espressioni come "più lungo" o "più corto". Esistono molti modi con cui si può richiamare l'attenzione dei bambini sulle caratteristiche da misurare. Un modo potrebbe essere quello di confrontare le lunghezze di due oggetti ponendo la domanda "sai trovare nella tua classe qualcosa che sia più piccolo di te?" Un altro modo è quello di chiedere ai bambini di stabilire se una certa regione, come una copia della loro mano, può essere ricoperta con dei chicchi. Caratteristiche più astratte come il volume, la temperatura o un angolo sono meno facili da percepire e vengono considerate più appropriatamente dagli insegnanti nei livelli 3-5 e in quelle superiori.

Nei livelli intermedi e superiori, grandezze derivate (rapporti di misure) come velocità, densità, rapporti trigonometrici o varianza possono diventare parte delle conoscenze degli studenti. A qualsiasi livello, gli studenti dovrebbero avere molte esperienze informali nella comprensione delle grandezze prima di utilizzare strumenti per misurarle o ricorrere a formule per calcolarne le misure.

Dopo che gli studenti hanno acquisito una comprensione sufficiente delle diverse caratteristiche, dovrebbero fare esperienza con la scelta delle unità utilizzate nella misura di queste caratteristiche. I ragazzi confrontano l'oggetto con l'unità, spesso con un procedimento iterativo o utilizzando l'unità per "ricoprirlo". Per esempio, nei livelli pre-K-2, possono ricoprire la lunghezza di una matita muovendo un fermaglio per la carta o possono ricoprire una regione con copie di un quadrato che hanno scelto come unità; per misurare il volume, possono riempire un recipiente con bicchieri d'acqua; possono utilizzare un'ampia varietà di oggetti, come i fermagli per la carta o i fagioli secchi per misurare la lunghezza, le mattonelle quadrate per misurare l'area e i bicchieri di carta per misurare il volume. Le loro misure possono essere espresse mediante queste unità. La "standardizzazione" dell'unità diventa importante più avanti, quando gli studenti osservano che, se si utilizza il piede di Joey per misurare la lunghezza, si ottiene una lunghezza completamente diversa da quella che si trova utilizzando il piede di Adriana e che, quindi, è importante decidere quale piede verrà utilizzato come unità. Gli studenti, a questo livello possono anche cominciare a cercare un oggetto con una data misura, per esempio un contenitore che si può riempire con dodici bicchieri di sabbia o un pastello che ha lunghezza pari a tre fermagli per la carta. Durante i livelli intermedi, gli studenti possono creare un disegno in scala di una camera e dei suoi mobili. Le unità che fanno parte dei sistemi di misura convenzionali, come i pollici o i piedi (nell'abituale sistema inglese) o i centimetri e i centimetri cubi (nel sistema metrico) possono essere utilizzate dagli studenti dopo che hanno utilizzato come unità dei materiali comuni.

Un concetto fondamentale da capire è che la misura dipende da quanto è grande l'unità. Verso la fine della scuola di base gli studenti dovrebbero aver acquisito una ragionevole conoscenza del ruolo delle unità nella misura. Nella scuola superiore, dove gli studenti misurano caratteristiche che sono spesso abbastanza astratte, le unità diventano più complesse, come ad esempio le miglia all'ora, le libbre per pollice quadrato e i giorni. L'"algebra delle unità" (l'analisi dimensionale) diventa parte delle conoscenze di base dei livelli 9-12, dove gli studenti imparano che le unità impiegate nella misura si comportano come le variabili nelle manipolazioni algebriche.

Imparare come scegliere un'unità appropriata rappresenta un aspetto fondamentale della comprensione del concetto di misura. Ad esempio, è importante rendersi conto che quando si misura l'area occorre utilizzare un'unità di area quale può essere quella di una regione piana. Ci sono anche motivi di opportunità che vanno presi in considerazione. È ragionevole utilizzare un fermaglio per la carta per misurare una matita, ma non lo è per misurare un campo di calcio. L'unità prescelta dovrebbe dare come valore della misura un numero ragionevole, ma anche la precisione è importante e unità più piccole possono portare a una maggiore precisione nella misura. La precisione coinvolge sia la scelta dell'unità sia la scelta dello strumento; queste scelte vengono effettuate nel momento in cui si considerano le caratteristiche dell'oggetto da misurare. Nei livelli 9-12, le nozioni di grandezza e di scelta dell'unità diventano più complesse. L'aspetto fondamentale consiste nel definire lo spazio entro cui collocare la situazione e poi scegliere una struttura per rappresentare ed esaminare quella porzione di spazio.

Negli Stati Uniti, in cui si usa ancora abitualmente il comune sistema di misura inglese, gli studenti di tutti i livelli imparano sia il sistema inglese che il sistema metrico, e dovrebbero imparare a usarli entrambi e a effettuare conversioni da un sistema all'altro e a valutare con rapidità le misure nei due sistemi. Ad esempio, uno studente potrebbe dire,

"Abito a un miglio da scuola. Questo equivale a circa due chilometri". Per gli studenti può essere utile conoscere alcuni fattori di conversione dal sistema inglese al sistema metrico.

La conoscenza dei sistemi di misura può aiutare gli studenti a comprendere meglio gli aspetti del sistema decimale e a imparare il ragionamento proporzionale. Per esempio, dato che il sistema metrico è per sua natura costruito su una struttura in base dieci, è plausibile che uno studente che opera correttamente col sistema metrico e con le sue unità comprenda meglio il senso della notazione posizionale. Il sistema metrico possiede una sua coerenza interna; la dimensione della successiva unità più grande è legata sempre nello stesso modo a quella che la precede. Per esempio, un centimetro è dieci volte più grande di un millimetro, un decimetro è dieci volte più grande di un centimetro e così via.

Ci sono alcune proprietà fondamentali riguardanti la misura che gli studenti di ogni livello devono sperimentare e comprendere. Molti tipi di misura si conservano per congruenza – i ragazzi possono scoprire che una piastrella scelta come unità si può sovrapporre esattamente a un'altra e stabilire che le loro aree coincidono. Gli studenti degli ultimi anni della scuola elementare dovrebbero rendersi conto che triangoli congruenti, anche con differenti orientazioni, hanno perimetri uguali e aree uguali. La misura dell'area si conserva quando una certa forma viene scomposta o fatta a pezzi. I ragazzini della scuola elementare devono capire che un rettangolo si può spezzare in due triangoli e che, anche se le singole parti vengono spostate e si viene a formare una nuova figura, la sua area resterà la stessa. I ragazzini possono anche osservare che lo stesso non vale per il perimetro – la nuova figura può avere un perimetro diverso da quello della figura originale. Tali osservazioni possono fornire interessanti opportunità per dei ragionamenti matematici e dare una prima idea di concetti di livello superiore come l'invarianza sotto certe trasformazioni.

- **Applicare diverse tecniche, strumenti e formule per determinare le misure**

Il processo di misura comporta la scelta di un'unità, il confronto di quest'unità con la grandezza da misurare per arrivare infine a un numero o un intervallo di numeri. Appena gli studenti cominciano a sviluppare un senso del significato delle grandezze misurabili e del modo in cui le unità intervengono nella misura, possono applicare tecniche, strumenti e formule per determinare le misure. Le tecniche di misura sono le strategie utilizzate per determinare una misura e possono consistere in enumerazione, iterazione, stima e utilizzo di strumenti e formule. Gli strumenti di misura comprendono oggetti come righelli graduati, centimetri a nastro, recipienti, orologi o cronometri. Le formule sono le relazioni generali che forniscono la misura noti i valori delle variabili presenti nella formula.

Le tecniche che gli studenti utilizzano nella misura variano a seconda della grandezza e dello scopo della misura. Per esempio, consideriamo i differenti modi per determinare l'area di un pavimento rettangolare. Gli studenti potrebbero utilizzare i segni di riferimento di misure precedenti per fare una stima dell'area, contare le piastrelle sul pavimento per determinare un valore approssimato dell'area basandosi sull'area di una piastrella oppure misurare la lunghezza e la larghezza e utilizzare una formula per determinare l'area. Queste tecniche dovrebbero produrre misure grosso modo uguali, dopo un'eventuale conversione a un'unità di misura comune.

Un'altra tecnica importante che si può utilizzare nella misura è quella delle approssimazioni successive. Poiché tutte le misure fisiche sono approssimate, gli studenti

dovrebbero essere incoraggiati a considerare i limiti tra cui sono compresi i loro risultati. Per esempio, per determinare l'area dell'impronta di un piede, gli studenti potrebbero sovrapporre una griglia trasparente a maglie quadrate alla figura del piede; contando i quadrati che giacciono all'interno del contorno della forma del piede si ottiene un limite inferiore per l'area; mentre contando sia i quadrati interni sia quelli attraversati dal contorno si ottiene un limite superiore. Gli studenti dovrebbero rendersi conto che l'area è compresa tra il limite superiore e il limite inferiore ed essere consapevoli che l'utilizzo di griglie a maglie più fitte provoca un avvicinamento tra il limite superiore e il limite inferiore. In pratica c'è un limite al numero di suddivisioni che si possono realizzare. Questo uso delle approssimazioni successive rappresenta una premessa importante per i concetti del calcolo infinitesimale.

Gli strumenti di misura sono quelli noti che la maggior parte delle persone associa al procedimento di misura. L'utilizzo di strumenti di misura è spesso collegato ad altre conoscenze matematiche come le frazioni (per esempio, nella determinazione del significato delle tacche prive di contrassegno su un righello) o l'ordinamento dei numeri. Sempre di più gli strumenti di misura sfruttano la tecnologia e, quindi, nascondono il legame tra lo strumento e l'attributo da misurare. Ad esempio, teniamo presente che i righelli, già dalla loro comparsa, sono strumenti che risultano "vicini" all'attributo lunghezza. Al contrario, un software dinamico per la geometria utilizzato per misurare un angolo fornisce un'idea meno intuitiva sul significato di misura di un angolo rispetto, per esempio, ad un goniometro. Gli strumenti di misura tecnologicamente avanzati sono ormai familiari ai ragazzi e comprendono i cronometri, i termometri, gli ecometri e i sensori per computer adatti a misurare la velocità e la distanza. È quindi importante saper scegliere lo strumento appropriato per la grandezza che si deve misurare.

Per ottenere le misure si possono utilizzare le formule e, ogniqualvolta ciò sia possibile, l'insegnamento della matematica dovrebbe aiutare gli studenti a comprendere l'utilizzo di queste formule. Molti studenti di scuola elementare e di scuola media hanno difficoltà a comprendere il perimetro, l'area e il volume (Kenney e Silver 1997; Lindquist 1989). Spesso a questi ragazzi vengono presentate formule come $P = 2b+2h$, o $A = b \times h$ o $V = b \times h \times l$ senza che essi comprendano in che modo la formula è collegata all'attributo da misurare o all'unità di misura da utilizzare. Occorre sottolineare gli stretti legami esistenti tra la formula e l'oggetto reale. Ad esempio, quando si comunicano a uno studente le dimensioni di un dato rettangolo – diciamo, 4 centimetri e 8 centimetri – e gli si chiede di determinare l'area usando la formula, allora quello studente deve rendersi conto che tale formula è una scorciatoia rispetto alla determinazione effettiva del numero di centimetri quadrati che occorrerebbero per ricoprire la regione rettangolare.

In un altro esempio, gli studenti dei livelli superiori possono arrivare a intuire il significato della formula per calcolare l'area di un cerchio ($A = \pi r^2$) con il grafico in figura 3.6, utilizzando la loro conoscenza dell'area del parallelogramma:

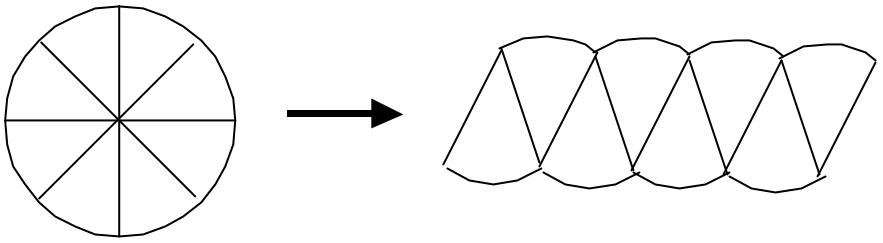


Figura 3.6. Calcolo dell'area del cerchio

Entro i livelli 3-5, gli studenti devono comprendere l'astrazione di una figura su carta che viene contrassegnata con quote del tipo "10 piedi per 35 piedi" e che è una rappresentazione in scala di un rettangolo reale. I fattori di scala, come quelli utilizzati nelle mappe o nel riscalare il grafico prodotto da una calcolatrice, si applicano anche quando nella misura si usano le formule. Una mappa, ad esempio, è una rappresentazione in cui si possono utilizzare sia le tecniche che gli strumenti di misura e dove il fattore di scala mette in relazione le distanze sulla mappa con le distanze effettive.

Nei livelli secondari, gli studenti imparano a utilizzare strumenti di misura tecnologicamente avanzati e a lavorare con misure derivate. È a questi livelli che risulta opportuno trattare i temi della precisione e dell'accumulo dell'errore.

La misura è un settore del curricolo pre-K-12 che si presta particolarmente bene all'uso di materiali concreti. Infatti è poco probabile che i ragazzi possano mai acquisire una profonda comprensione dei concetti relativi alla misura senza maneggiare materiali, effettuare fisicamente dei confronti e misurare con degli strumenti. I concetti relativi alla misura possono crescere in ampiezza e profondità lungo i diversi livelli e i programmi didattici non dovrebbero ripetere ogni anno gli stessi contenuti riguardanti la misura. Infine, la misura è un importante veicolo per evidenziare collegamenti – all'interno della stessa matematica e verso aree esterne come gli studi sociali, la scienza, l'arte, l'educazione fisica, gli interessi e le esperienze propri dello studente.

Standard 5: Analisi dei dati, statistica e probabilità

I programmi di matematica devono porre attenzione all'analisi dei dati, alla statistica e alla probabilità in modo che tutti gli studenti:

- si pongano domande e vi rispondano raccogliendo, organizzando e rappresentando dati;
- interpretino dati usando metodi analitici;
- sviluppino e valutino deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati;
- capiscano e applichino nozioni di base su caso e probabilità.

Elaborazione: pre-K-12

Una tecnologia sempre più potente e accessibile ha cambiato significativamente le nostre possibilità di analizzare i dati: la quantità di dati utilizzabili come supporto nella formulazione di decisioni in economia, in politica e nella ricerca si sta incrementando velocemente; le ricerche di mercato sono utilizzate nello sviluppo e nella commercializzazione dei prodotti; i sondaggi sono utilizzati per determinare le strategie delle campagne politiche; gli esperimenti sono utilizzati per valutare la sicurezza e l'efficacia di nuovi trattamenti medici. Un aspetto altrettanto importante è dato dal fatto che le statistiche sono frequentemente utilizzate in modo distorto, per sviare la pubblica opinione e per rappresentare in modo scorretto la qualità e l'efficacia di prodotti commerciali. Una conoscenza della statistica è evidentemente necessaria perché gli studenti divengano dei cittadini consapevoli e dei consumatori intelligenti e il modo di ragionare statistico deve essere imparato. Il lavoro nell'ambito dell'analisi dei dati, della statistica e della probabilità, offre agli studenti una strada naturale per mettere assieme concetti propri della matematica con altre materie scolastiche e con esperienze che attengono alla loro vita quotidiana.

I dati sono generati in diversi contesti, come la raccolta di osservazioni su tutti i soggetti esistenti o su un loro campione o riprodotti sulla base di simulazioni. Gli studenti dovrebbero imparare a formulare delle domande sulle quali si possa basare una ricerca, a progettare, a eseguire e a interpretare una ricerca, uno studio o un esperimento, a raccogliere dati rilevanti e a utilizzarli per formulare una decisione, a misurare quanto siano affidabili nella loro scelta e a comunicare i risultati. Possono sviluppare conclusioni accurate e valutabili per mezzo della riflessione e dello studio del processo generatore dei dati. Possibili distorsioni nell'interpretazione dei dati possono essere monitorate e, nella comprensione del processo di ragionamento statistico, gli studenti possono essere aiutati nello sviluppare la capacità di trarre conclusioni accurate e verificabili.

Domande del tipo "qual è la probabilità che questo evento si sia verificato per caso?" oppure "con quale frequenza questo esperimento potrebbe fornire lo stesso risultato se lo ripetessi molte volte?" dipendono da concetti che hanno il loro fondamento nella probabilità. I bambini piccoli cominciano a formare la loro capacità di comprendere il caso e i processi casuali lavorando con popolazioni a loro note come gli studenti della loro classe oppure oggetti colorati in una scatola. Quando maturano passano da situazioni definite e ben controllate, per le quali la probabilità può essere determinata con facilità, ad altre circostanze nelle quali il campionamento e la simulazione possono aiutare nella quantificazione della verosimiglianza di eventi aleatori.

La costruzione di approfondite basi nel campo della statistica e della probabilità fornisce oggetti e percorsi che saranno utili in tutta la vita degli studenti. Poiché i bambini imparano a scuola alcune cose che appaiono loro basate su regole predeterminate, è importante che essi apprendano che ci sono anche problemi che implicano soluzioni dipendenti dalle ipotesi e hanno un certo grado di incertezza. Il modo di ragionare usato in probabilità e in statistica non è sempre intuitivo e quindi non può essere sviluppato nei bambini piccoli se non viene introdotto nel curricolo. Gli studenti potranno trarre beneficio dalla capacità di operare in modo consapevole con la variabilità e con l'incertezza.

- **Porsi domande e rispondervi raccogliendo, organizzando e rappresentando dati**

Per comprendere la statistica gli studenti devono lavorare direttamente con i dati. Questo vuol dire operare sulla naturale curiosità che i bambini piccoli provano verso il loro mondo. Domande che chiedano "quante volte?", "quanto?", "che tipo?", "quali di questi?" sorgono abbastanza spontaneamente. Sebbene queste domande non riguardino sempre in modo diretto i dati, offrono la possibilità di introdurre lo studio dei dati. Attraverso attività nelle quali gli studenti raccolgano dati su loro stessi relativamente a domande sulla sfera personale, sull'identificazione di attributi di cose che attengano allo loro vita quotidiana e sulla classificazione degli oggetti in base a questi attributi, gli alunni realizzano che i dati possono essere utilizzati per investigare i fenomeni, rispondere alle domande e formulare previsioni.

Passando ai livelli successivi dell'istruzione gli studenti formuleranno domande più approfondite per ricerche su eventi attuali e d'interesse. Per esempio, gli studenti dei livelli 6-8 potrebbero essere interessati alle problematiche del riciclo e della conservazione e potrebbero porre la domanda "in una mensa è meglio usare piatti di carta o di plastica?". Gli studenti dei livelli intermedi sono più consapevoli dei prodotti commerciali e delle affermazioni dei produttori, come "una marca di batterie dura più di un'altra" e sono interessati a questioni di correttezza. Possono chiedere "va bene il nostro metodo di analisi se escludiamo il punteggio più basso e facciamo la media degli altri?".

Spesso le domande sugli eventi non sono formulate in modo chiaro come domande su gruppi di persone o oggetti. Formulare domande in modo che i dati possano essere utilizzati per fornire la risposta può essere stimolante. Gli organi d'informazione forniscono numerosi esempi di domande ben formulate che danno utili informazioni e chiari esempi di quesiti che non sono posti in modo da permettere di trarre indicazioni chiare. Per esempio chiedendo a un campione di persone quale sia il candidato politico da loro preferito, si possono ottenere informazioni utili; tuttavia è possibile che le persone interrogate pensino che nessuno dei due candidati vada bene, e potrebbero semplicemente indicare il candidato che a loro dispiace di meno. Poste queste difficoltà, gli studenti dei livelli 9-12 hanno bisogno di avere frequenti esperienze nel porre e nell'analizzare i problemi che richiedano l'uso di solidi principi per progettare esperimenti e ricerche.

Dopo aver posto una domanda utile e ben formulata, gli studenti sono impegnati nella individuazione di un metodo per la generazione dei dati che abbia la potenzialità di dare una risposta alla domanda. La ricerca mostra che il tempo speso nella pianificazione dei metodi di raccolta dei dati è prezioso (Cobb 1998, Roth e Bowen 1994). Questo non implica che gli studenti debbano raccogliere tutti i dati di cui hanno bisogno; tuttavia, quando i dati utilizzati sono stati raccolti da altri, gli studenti devono analizzare i modi con cui sono stati ottenuti.

I bambini possono immaginare semplici processi di generazione dei dati. Nei livelli elementari l'insegnante dovrebbe aiutare nel formulare la domanda o nel fornire un foglio di riscontro, un registro di classe o un elenco in cui i dati possono essere registrati nel momento in cui vengono raccolti. I "dati" devono essere oggetti reali come le scarpe dei bambini disposte su un grafico a barre o i bambini stessi suddivisi per aree d'interesse. Gli studenti imparano come formulare domande, strutturare esperimenti, raccogliere e registrare dati. Nei livelli 9-12, gli studenti dovrebbero comprendere i fondamenti del disegno sperimentale, i potenziali tranelli come gli errori sistematici, la confusione tra le variabili, la mancanza di regolarità e gli effetti che essi hanno sull'utilizzabilità di ogni conclusione.

Una volta che i dati sono disponibili essi devono essere organizzati e rappresentati in un modo che ne faciliti la comprensione. Nei livelli pre-K-2, l'idea che i dati possano essere organizzati è fondamentale. Nei primi livelli possono essere inventati dei modi per organizzare i dati dei compleanni, in modo che i bambini sappiano quale sarà il prossimo (Russel 1991). Gli studenti dei livelli 3-5 possono imparare di più sulla rappresentazione dei dati mediante l'analisi e l'interpretazione delle rappresentazioni nei libri, nei quotidiani o su altri mezzi d'informazione. Gli insegnanti possono introdurre una molteplicità di grafici, tavole, liste o tabelle. La varietà e la complessità delle rappresentazioni dovrebbero crescere insieme agli studenti nel corso degli studi. Gli studenti dei livelli 6-8 dovrebbero iniziare a comparare l'efficacia delle rappresentazioni dei dati per analisi successive o per una chiara esposizione a un gruppo di persone (Tufte 1983). Comprendono le questioni di scala riflettendo sull'effetto che essa ha sulla percezione dei dati. Quando gli studenti si trovano a operare con insiemi di dati più ampi e complessi, la tecnologia consente loro di riordinare i dati e di rappresentarli graficamente in modo molto rapido in modo che la loro attenzione si concentri sull'analisi, sulla comprensione e sulle previsioni. E ancora, devono ben considerare scelte importanti, come il tipo di rappresentazione, la scala usata e l'attribuzione della nomenclatura.

- **Interpretare dati usando metodi analitici**

Per usare correttamente i concetti della statistica e della probabilità gli studenti devono considerare un insieme di dati come un oggetto matematico. La ricerca ha mostrato che "è necessario un salto concettuale per passare dal vedere i dati come un amalgama di individui, ognuno con le sua caratteristiche, a vederli come un gruppo con proprietà emergenti, proprietà che spesso non sono evidenti in ogni elemento preso individualmente" (Konold 1998). Proprio come lo studente deve sviluppare l'idea astratta di un numero, come il "5", prescindendo da qualsiasi insieme di cinque oggetti, così devono anche sviluppare l'idea astratta di insieme di dati. Mentre i bambini sono più spesso interessati alla loro parte di dati un grafico (il *mio* compleanno è a novembre, la *mia* famiglia è composta da cinque persone), l'atto di porre le informazioni relative a tutti gli studenti in un solo posto comincia a mettere in luce la natura di un insieme di dati. Per esempio, facendo un grafico per i bambini del primo livello con il numero dei componenti della loro famiglia, un bambino potrebbe dire "guarda, non c'è nessuno con 1" e da qui può nascere la discussione sul perché 1 non sia un valore possibile in questo insieme di dati e quale dovrebbe essere il probabile intervallo di variazione. In seguito, benché siano ancora attenti alla propria posizione individuale nei dati, gli studenti cominciano anche a descrivere l'insieme dei dati come un tutto. Per esempio essi potrebbero osservare che "gli studenti che vengono a scuola con l'autobus sono più di quelli che vengono con tutti gli altri mezzi messi insieme" oppure "dopo dieci giorni la maggior parte delle nostre piante è alta sette pollici, ma il campo di variazione va da tre a otto." Nei livelli 3-5 gli studenti sviluppano idee sull'aggregazione dei dati, tentando di comprendere cosa possono affermare a proposito di questa nuova aggregazione.

Quando gli studenti cominciano a vedere un insieme di dati come un'entità unitaria, allora hanno bisogno di sviluppare competenze relative agli strumenti utilizzabili per descrivere questo insieme. Devono acquisire familiarità con le misure del centro di una distribuzione, con le misure di variabilità o dispersione e con le caratteristiche della forma dei dati come descrittori dell'insieme dei dati stessi. Lavorando con più insiemi di dati gli studenti dei livelli 3-8 consolidano le loro conoscenze sulla moda, la mediana e la media

aritmetica. Le loro acquisizioni concettuali si basano su idee informali, come l'idea di punto medio, di concentrazione, di suddivisione equa e di punto di equilibrio (Mokros e Russel 1995). Nei livelli intermedi, numerose misure di centralità consentono agli studenti di comparare l'efficacia di ognuna nella rappresentazione dell'intero insieme. Come esempio si consideri che sia la mediana sia la media possono essere utilizzate per una rapida informazione sulle precipitazioni annuali medie nello stato o nella provincia; tuttavia, se una piccola parte dei dati con un'alta piovosità alterano i dati, la mediana potrebbe essere più adeguata.

La nozione centrale della statistica è quella di effettuare delle comparazioni corrette e questo potrebbe essere l'obiettivo per il percorso pre-K-12. Nei livelli di base gli studenti devono dire che cosa un insieme abbia in più o in meno di un altro rispetto ad alcuni attributi. Nei livelli intermedi dovrebbero quantificare queste differenze mediante la comparazione di specifiche statistiche. A partire dai livelli 4-5 e proseguendo nella scuola media l'enfasi, può essere spostata dall'analisi e dalla descrizione di un insieme di dati ai confronti che coinvolgono due o più insiemi (Konold 1998).

Allo stesso livello d'istruzione gli studenti cominciano a osservare seriamente le relazioni tra due caratteristiche o variabili correlate. Quando gli studenti passano dai livelli medi a quelli superiori aggiungono al loro repertorio statistico le misure e le rappresentazioni che li aiutano ad analizzare le relazioni. In questa fase gli studenti avranno bisogno di nuovi strumenti per identificare le somiglianze e le differenze su molteplici insiemi di dati, compresi i grafici a scatole parallele, i grafici back-to-back e i grafici a barre comparative nei livelli 6-8 e le tavole di contingenza, la varianza e la deviazione standard nei livelli 9-12. Gli studenti hanno quindi bisogno di strumenti per analizzare le associazione e le tendenze nei dati bivariati, compresi i diagrammi a dispersione e le linee interpolanti nei livelli 6-8 e i residui, la correlazione e la regressione nei livelli 9-12.

Quando i dati sono rappresentati e analizzati, gli studenti devono riflettere sull'interpretazione dei loro risultati. Che cosa consente loro di fare affermazioni sulla questione che stanno analizzando? Come potrebbero rappresentare i dati in modo da evidenziare meglio ciò che contengono? In questa parte della loro analisi gli studenti devono divenire sempre più sofisticati nella valutazione attenta e critica di ciò che emerge. Devono considerare quanto le loro conclusioni siano supportate dai dati, quali risultati alternativi si potrebbero evidenziare e quali fattori potrebbero essere stati trascurati.

- **Sviluppare e valutare deduzioni, predizioni, e ragionamenti basati sui dati**

Nei primi lavori sui dati spesso gli studenti si concentrano solo su quelli che hanno raccolto. Con una ricerca sulla loro classe, per esempio, gli studenti descrivono ed interpretano i dati considerando la classe come l'intera popolazione. Nel mondo reale, tuttavia, la maggior parte dei dati è generata soltanto da un campione dell'intera popolazione considerata. La definizione di un appropriato campione (o campioni), la raccolta dei dati da questo campione, la descrizione del campione e la formulazione di inferenze mettendo in relazione il campione e la popolazione sono gli elementi centrale dell'analisi statistica. Durante gli ultimi anni delle elementari e i primi delle medie gli studenti cominciano a sviluppare alcuni dei concetti che sono alla base dell'inferenza statistica ma non hanno una concezione ben sviluppata del campionamento (Schwartz ed altri 1998). Ricerche condotte

sugli studenti dei livelli 5-8 hanno rilevato che gli studenti non si aspettano che "la raccolta e l'analisi dei dati debbano produrre una conoscenza più sicura che il loro stesso giudizio" (Hancock, Kaput e Goldsmith 1992). Nell'ultima parte dei livelli intermedi e nella scuola superiore, gli studenti possono cogliere i concetti fondamentali della selezione campionaria, dell'inferenza statistica e della quantificazione del grado d'incertezza associato a un campione o a un gruppo di campioni. Il valore di un'inferenza tratta da un campione può essere drammaticamente inficiato da diversi problemi, inclusi la rappresentatività del campione e la sua dimensione. Gli studenti dei livelli 9-12 possono cominciare a comprendere questi concetti.

Inoltre gli studenti dei livelli 9-12 dovrebbero considerare i fattori che possono distorcere un campione. Dovrebbero anche comprendere che è possibile quantificare il grado di certezza associato a decisioni basate sui dati. Definire intervalli di confidenza e ragionare sulle distribuzioni non è facile. Gli statistici e gli insegnanti di statistica, che hanno lavorato a lungo con gli studenti delle scuole superiori, affermano che "i concetti dell'inferenza statistica sono sottili e non possono essere appresi interamente nella scuola superiore" (Scheaffer, Watkins e Landwehr 1996). Gli studenti devono lasciare la scuola secondaria con la capacità di giudicare la validità delle argomentazioni basate sui dati che appaiono sulla stampa.

- **Capire e applicare nozioni di base su caso e probabilità**

La probabilità è strettamente legata con la raccolta, l'organizzazione e la rappresentazione dei dati, con la descrizione, l'analisi e l'interpretazione dei risultati, con l'inferenza e la previsione, ma è anche un soggetto interessante di per sé. Si tratta di un ambito che consente collegamenti con altre parti della matematica, specialmente i numeri e la geometria. Molte delle decisioni che prendiamo nella vita moderna sono per loro natura probabilistiche. Per esempio abbiamo bisogno della probabilità "per comprendere le lotterie, le assicurazioni, la diagnostica medica basata sui test, il controllo di qualità industriale, le previsioni del tempo, l'assegnazione degli handicap nello sport, la genetica e la fisica moderna" (Scheaffer, Watkins e Landwehr 1996).

Nei livelli pre-K-2, gli insegnanti dovrebbero costruire sul vocabolario in corso di sviluppo dei bambini per introdurre e sottolineare alcune nozioni di probabilità, per esempio "questo pomeriggio probabilmente ci sarà ricreazione". "E' improbabile che oggi piova." Nei livelli 3-5 gli studenti possono considerare i concetti della casualità nella predizione di eventi. Apprendono queste nozioni lavorando con esperimenti con risultati teorici noti – usando monete, dadi o palline – e considerando eventi che conoscono nel mondo circostante e suddividendoli in categorie come impossibile, improbabile, probabile o certo sulla base della loro esperienza.

Diversi fenomeni che gli studenti incontrano, specie a scuola, hanno esiti prevedibili. Se una ruota della fortuna è per un terzo rossa, per un terzo bianca e per un terzo blu, allora una previsione ragionevole è che, nel tempo, la ruota della fortuna si fermi sulla parte blu approssimativamente per un terzo delle volte. Attraverso la considerazione di eventi come questi, gli studenti giungono a capire che il singolo risultato può essere incerto anche se sappiamo qualcosa sulla sua verosimiglianza. La stessa cosa se si lancia una moneta: sono ugualmente probabili gli esiti testa o croce, ma quale risultato si otterrà da un solo lancio è incerto. La cosa che sorprende è che nonostante l'evento sia incerto se l'esperimento viene ripetuto molte e molte volte, allora la distribuzione dei risultati diventa regolare. Questa

regolarità emergente viene incontro alla nostra intuizione. L'idea che un evento singolo non sia prevedibile in una situazione come questa, ma che possa essere prevista una regolarità nei risultati, è un importante concetto che è a fondamento dello studio dell'inferenza statistica.

Quando gli studenti divengono più raffinati nella loro comprensione dei processi casuali, possono quantificare le probabilità in situazioni con distribuzioni teoriche, come quelle con la ruota della fortuna. Se la ruota della fortuna è per un quarto rossa e per tre quarti bianca, qual è la probabilità di fermarsi sul bianco? A questo punto può essere introdotto il concetto di probabilità condizionata, sebbene approfondite ricerche indichino che gli studenti incontrano notevoli difficoltà nel ragionare con probabilità che implicano ipotesi di condizionamento (Shaughnessy 1998). Gli studenti possono quindi comprendere quanti dei campioni costruiti con cura, possano ragionevolmente fornire informazioni sull'intera popolazione. Le distribuzioni campionarie, inizialmente formulate per mezzo di esperimenti concreti, potrebbero essere seguite da simulazioni ottenute elettronicamente utilizzando il software disponibile, approdando a una comprensione più approfondita.

Standard 6: Problem Solving

I programmi di matematica devono concentrarsi sul problem solving come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- costruiscano nuove conoscenze matematiche attraverso il loro lavoro con i problemi;
- sviluppino l'attitudine a formulare, rappresentare, astrarre e generalizzare in situazioni all'interno e all'esterno della matematica;
- applichino un'ampia varietà di strategie per risolvere problemi e le adattino a nuove situazioni;
- controllino e riflettano sul loro pensiero matematico nella risoluzione dei problemi.

Elaborazione: pre-K-12

La capacità di risolvere problemi non è solo un obiettivo nell'apprendere la matematica, ma anche uno degli strumenti più importanti per farla. Quando gli studenti utilizzano la tecnica del problem solving per approfondire i contenuti matematici, possono acquisire una nuova comprensione della matematica e rafforzare la loro capacità di utilizzare la matematica che conoscono. Problem solving vuol dire impegnarsi in un compito per il quale non si conosce in anticipo il metodo risolutivo. Per individuare una soluzione, gli studenti devono utilizzare la loro conoscenza in modi diversi e, attraverso questo processo, possono sviluppare una nuova conoscenza. Il problem solving è parte integrante di tutto l'apprendimento della matematica, non una parte isolata del programma. Dovrebbe essere una parte ben integrata del curricolo che è alla base dell'apprendimento della matematica. Gli studenti dovrebbero avere spesso l'opportunità di formulare, affrontare e risolvere problemi complessi che richiedono un notevole impegno.

- **Costruire nuove conoscenze matematiche attraverso il lavoro con i problemi**

Come può il problem solving aiutare gli studenti ad apprendere la matematica? Situazioni problematiche opportunamente predisposte forniscono il contesto all'interno del quale gli studenti possono consolidare ed estendere quello che già conoscono. Problemi ben scelti possono stimolare profonde indagini matematiche.

Per esempio, consideriamo la nozione di proporzione, uno dei concetti fondamentali della matematica dei livelli intermedi. Questo concetto si può introdurre attraverso un'indagine approfondita nella quale agli studenti vengono presentate diverse ricette per succhi di frutta (miscele di acqua e concentrato di frutta) e viene loro chiesto qual è più "ricca di frutta". Poiché non esistono due ricette che producono la stessa quantità di succo di frutta, il problema risulta difficile per studenti che non comprendono il concetto di proporzione. Dopo diversi tentativi, gli studenti alla fine convergono sulla nozione di proporzione. Questo concetto emerge nel momento in cui vengono scartate altre nozioni e gli studenti prendono in esame differenti modi di considerare le proporzioni e si scambiano idee.

Il problem solving può e dovrebbe essere usato per aiutare gli studenti a sviluppare una familiarità con abilità specifiche. Aspettare fino a quando gli studenti "sanno abbastanza" prima di dare loro l'opportunità di risolvere problemi li priva dell'esperienza di raccogliere una sfida e li lascia senza esperienze di problem solving. Ma è anche vero che il problem solving non si realizza nel vuoto: richiede una certa conoscenza di contenuti.

Come esempio consideriamo il problema di un insegnante che dice: "In tasca ho *pennies, dimes, and nickels*[1] . Se tiro fuori di tasca tre monete, quanto denaro posso avere preso?" (adattato da NCTM 1989, pag. 24). Per risolvere questo problema sono necessarie delle conoscenze: quella relativa a quanto valgono *pennies, dimes, and nickels*[1] e alcune conoscenze relative all'operazione di addizione. Gli studenti non hanno bisogno di avere familiarità con l'operazione di addizione prima di affrontare questo problema; in realtà lavorare su di esso rappresenta già un buon contesto per esercitare abilità nell'operazione. L'obiettivo matematico del problema – aiutare gli studenti a riflettere in modo sistematico sui casi possibili e a organizzare e annotare i propri pensieri – non ha bisogno di attendere che gli studenti abbiano acquisito familiarità con l'operazione di addizione.

- **Sviluppare l'attitudine a formulare, rappresentare, astrarre e generalizzare in situazioni all'interno e all'esterno della matematica**

Le persone che hanno sviluppato una visione matematica del mondo sono portate ad agire in modo matematicamente produttivo. Che comportamento ci aspettiamo da chi ha attitudine matematica?

I buoni risolutori di problemi tendono ad analizzare accuratamente le situazioni in termini matematici. Sono inclini a vedere, se possibile, una soluzione semplice prima di cercarne una più complicata; inoltre ne faranno un'analisi più raffinata. Per esempio, un compito per studenti di livello medio presenta i dati relativi a due società di taxi e chiede

[1] NdT: si tratta di monete rispettivamente da 1, 5, 10 centesimi di dollaro

quale è più affidabile (NRC 1988). La risposta immediata, basata sul tempo medio di attesa dei clienti, risulta essere ingannevole.

Ad esempio, una più accurata indagine matematica mostra che la compagnia il cui tempo medio di arrivo è più breve ha anche una varianza molto maggiore. Nell'affrontare questo problema, una predisposizione ad analizzare le cose in modo più approfondito porta a una comprensione più completa della situazione e a una soluzione corretta.

Le persone con una predisposizione verso la matematica tendono a esplorare la struttura del problema per vedere cosa fa funzionare le cose in modo matematico; e sono in grado di astrarre e generalizzare. Queste persone tendono a cercare più di un modo per affrontare un problema, facendo in tal modo nuovi collegamenti, vedendo nuovi componenti e rivelando differenti aspetti della matematica. Ad esempio, gli studenti dei livelli 3-5 esplorano i numeri quadrati geometricamente, ricercando differenti disposizioni. Uno studente osserva che per passare al quadrato successivo deve aggiungere una forma a L e riesce in tal modo a ottenere la formula dell'area del quadrato *n*-esimo espressa mediante il numero precedente (Figura 3.3). Un altro studente osserva che l'area dell'*n*-esimo quadrato è la somma dei primi *n* numeri dispari. Questi ragazzi hanno imparato che esistono molti modi di considerare un problema e che scoprire un metodo per affrontarlo non è necessariamente un segnale che tutto è stato fatto.

I risolutori di problemi sono portati a esplorare situazioni e a fare congetture. Ad esempio, la seguente conversazione potrebbe svolgersi tra un gruppo di ragazzini in una classe d'asilo disposti in cerchio, che a turno pronunciano numeri fino a 100:

> Ieri ho detto "1" e più tardi ho detto anche "100". Se sarò il primo penso che dirò anche oggi gli stessi numeri.
>
> No, non dovresti. Ieri, Sheila era assente. Oggi è diverso.
>
> Sheila era assente ieri, ma John è assente oggi. Quindi sarà lo stesso.

Insieme, i ragazzini potrebbero esplorare la situazione e fare congetture su ciò che potrebbe accadere.

Gli studenti che sono bravi risolutori di problemi cercano di verificare le loro congetture, tentano di sostenerle attraverso il ragionamento e le abbandonano solo sulla base dell'evidenza contraria. Per esempio, un gruppo di studenti di scuola superiore potrebbe tentare di fare uno schema per un paralume – con una circonferenza più piccola alla cima che al fondo. Potrebbero cominciare a ritagliare un rettangolo. Quindi si renderebbero rapidamente conto che questo modo di procedere non funziona e dovrebbero fare ulteriori tentativi con altri schemi fino a trovare una soluzione.

I bravi solutori di problemi tendono a formulare nuovi problemi. Ad esempio una classe di una scuola superiore potrebbe esaminare la domanda di cosa succede al vertice di una parabola, $ax^2 + bx + c$, quando due coefficienti sono fissati e il terzo varia. (Ad esempio, se a e b sono fissati e si fa variare c, il vertice si muove lungo una retta verticale.) Uno studente che ha la predisposizione a formulare nuovi problemi potrebbe chiedersi "che cosa succede se si fa la stessa cosa con una cubica e si osserva come si comporta il minimo relativo?".

L'insegnante gioca un ruolo importante nel favorire l'attitudine al problem solving attraverso la creazione di un ambiente in cui gli studenti sono incoraggiati a esplorare, a correre dei rischi, a condividere successi e insuccessi e a porsi domande uno con l'altro. Come mostrano i precedenti esempi, in una classe con queste caratteristiche lo sviluppo di un'attitudine al problem solving diventa una parte del modo naturale di apprendere e di fare matematica.

- **Applicare un'ampia varietà di strategie per risolvere problemi e adattarle a nuove situazioni**

Le strategie per il problem solving fanno parte del bagaglio di strumenti matematici dello studente. Quando non è facilmente disponibile una soluzione di un problema, gli studenti possono trovare beneficio dall'avere a disposizione un repertorio di strategie che li aiuta a fare progressi. Le strategie per la soluzione di problemi dovrebbero essere trattate come qualsiasi altra parte del bagaglio matematico dello studente. Agli studenti si dovrebbe insegnare una varietà di strategie, con relativa applicazione pratica, in modo tale da permettere loro di utilizzarle. Il loro utilizzo deve essere inserito nel curricolo in modo che gli studenti sviluppino la capacità di riconoscere quando è opportuno l'impiego delle diverse strategie e siano in grado di decidere quando e come utilizzarle.

A partire dall'opera di Pólya ([1945] 1973), sono state presentate molte descrizioni delle strategie di problem solving. Alcune delle strategie citate più di frequente comprendono l'utilizzo di diagrammi e di altre rappresentazioni, la ricerca di schemi comuni, l'elenco di tutte le possibilità, tentare valori o casi particolari, ripercorrere il procedimento a ritroso, fare delle congetture e verificarle, creare un problema equivalente e creare un problema più semplice. Una domanda ovvia è quanto esplicitamente queste strategie debbano essere insegnate. Come si verifica con tutte le altre parti del bagaglio matematico degli studenti, tali strategie devono essere prese in considerazione dal docente se ci si aspetta che gli studenti le apprendano (Schoenfeld 1992). Inoltre gli studenti devono diventare consapevoli di queste strategie nel momento in cui compaiono e vengono modellate durante le attività in classe e l'insegnante dovrebbe incoraggiare gli studenti a prenderne nota. Ad esempio, dopo che uno studente ha condiviso con i compagni una soluzione e il modo in cui è stata ottenuta, l'insegnante può mettere in evidenza la strategia dicendo, "sembra quasi che tu abbia fatto una lista organica dei passi per trovare la soluzione. C'è qualcuno che ha risolto il problema in modo differente?" Questa verbalizzazione favorisce la nascita di un linguaggio e di rappresentazioni comuni e aiuta gli altri studenti a capire quello che stava facendo il primo studente.

Alcune strategie, come cercare sistematicamente delle regolarità, sono molto vicine agli obiettivi contenutistici del curricolo. Cercare regolarità è uno degli aspetti principali della sezione "Modelli, funzioni e algebra" per il livelli pre-K-2 e 3-5.

Altre strategie come fare congetture e verificarle, non sono legate e nessun contenuto in particolare. Strategie diverse divengono accessibili a diversi livelli; questo diventerà più evidente nelle trattazioni per fasce di livelli, nel rispondere alla domanda: "Come si presenta il problem solving nei livelli…?". Ci sono strategie specifiche e potenti, come la dimostrazione per assurdo, che possono essere usate quando gli studenti hanno raggiunto un livello relativamente elevato, e i metodi di ragionamento dei bambini sono i presupposti per queste strategie.

Nessuna strategia si impara una volta per tutte, a differenza degli algoritmi, piuttosto si imparano nel corso del tempo e diventano sempre più complesse al crescere della complessità dei problemi.

- **Controllare e riflettere sul pensiero matematico nella risoluzione dei problemi**

Alcune ricerche (Lester 1985, Schoenfeld 1987) mostrano come gli insuccessi nel problem solving non nascano dalla mancanza di conoscenze, ma da un loro uso insufficiente. I bravi solutori controllano e assestano continuamente il proprio operato: si assicurano di aver capito bene il problema (se è scritto, leggendolo attentamente, altrimenti ponendo domande fino alla completa comprensione), fanno piani verificano periodicamente di essere sulla buona strada, se si accorgono di non fare progressi si fermano per prendere in considerazione delle alternative e non esitano a cambiare completamente percorso.

Per far diventare gli studenti dei bravi risolutori di problemi sono assolutamente essenziali la consapevolezza di sé e l'autovalutazione. Una capacità di riflessione di questo tipo (chiamata "metacognizione") è molto più probabile che si sviluppi in un ambiente scolastico che la sostenga. Gli insegnanti giocano un ruolo importante nell'aiutare a strutturare queste abitudini alla riflessione ponendo domande del tipo, "prima di proseguire, siamo sicuri di aver capito questo concetto?", "quali sono le nostre scelte?", "abbiamo un piano di lavoro?", "stiamo facendo progressi o dobbiamo riesaminare ciò che stiamo facendo?", "perché pensiamo che questo sia vero?" Domande come queste aiutano gli studenti a prendere l'abitudine di verificare ciò che hanno capito man mano che procedono.

Imparare attraverso la risoluzione di problemi è un forte messaggio proveniente da *Curriculum and Evaluation Standards* (NCTM 1989). Le classi in cui gli studenti imparano a risolvere problemi sono quelle che danno agli studenti l'opportunità di approfondire i vari aspetti del problem solving – sistemazione, strategie, controllo e adattamenti – in un contesto di matematica concreta. Gli insegnanti presenti in queste classi favoriscono un'atmosfera di esplorazione mirata. Attraverso domande e discussioni questi insegnanti aiutano i loro studenti a diventare coscienti dei vari aspetti del problem solving. Il problem solving in queste classi è sia un importante strumento curricolare sia un obiettivo a sé stante.

Standard 7: Ragionamento e dimostrazione

I programmi di matematica devono spingere a ragionare e costruire dimostrazioni come parte essenziale del capire la matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano il ragionamento e la dimostrazione come parti essenziali e fortemente efficaci della matematica;
- formulino e indaghino congetture matematiche;
- sviluppino e valutino ragionamenti e dimostrazioni matematiche;
- scelgano e usino vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriati.

Elaborazione: livelli pre-K-12

Ragionamento e dimostrazione matematica offrono potenti metodi per sviluppare e codificare intuizioni riguardo a un'ampia gamma di fenomeni. Le persone che ragionano e riflettono analiticamente esplorano le proprietà e la struttura di oggetti e sistemi. Notano modelli o regolarità sia in oggetti del mondo reale che simbolici; si chiedono se quei modelli sono accidentali o se le cose devono essere così; e fanno congetture e dimostrazioni. In definitiva, una dimostrazione matematica rappresenta la codifica formale di modelli di ragionamento e giustificazione.

Il ragionamento sistematico descritto sopra è una caratteristica che definisce la matematica. Si ritrova in tutte le aree di contenuto e, con diverse esigenze di rigore, a tutti i livelli. Nell'area di numeri e operazioni, per esempio, gli studenti dei primi livelli possono notare che pari e dispari si alternano contando i numeri; quelli del terzo livello possono ipotizzare e giustificare che la somma di due numeri pari sarà pari; gli studenti nel livello 6 possono determinare la probabilità di un prodotto pari o dispari quando due dadi sono lanciati e i numeri prodotti moltiplicati; e ci si può aspettare che gli studenti nel livello 10 provino, in vari modi, che il quadrato di un intero dispari è sempre un multiplo di otto aumentato di uno. In geometria, gli studenti elementari possono usare manipolazioni per determinare aree di nuove figure. Gli studenti medi possono tagliare gli angoli di un triangolo per dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. Gli studenti superiori possono dimostrare queste proprietà rigorosamente. Il ragionamento sulla base di principi è il cuore di tutta la matematica.

Gli studenti di tutti i livelli possono impegnarsi – in modi adeguati al livello di età – in forme di riflessione sistematica, congetture ed elencazioni di prove, che sono i precursori dell'argomentazione formale matematica. Gli insegnanti dei livelli primari possono fare cambiamenti drastici in ciò che insegnano appena si accorgono che i bambini nella loro classe sono capaci di ragionamenti altamente complessi (Thompson 1998). Entro la scuola secondaria gli studenti dovrebbero essere capaci di affrontare un problema o una situazione matematica in modo sistematico e indicare perché ciò che pensano è vero. Poi dovrebbero essere in grado di compiere il prossimo passo fondamentale e fare un ragionamento logico che mostri che deve essere vero. Questa è la sequenza che Mason, Burton e Stacey (1982) descrivono come segue: "Convinci te stesso; convinci un amico; convinci un nemico."

- **Riconoscere il ragionamento e la dimostrazione come parti essenziali e fortemente efficaci della matematica**

Parte della bellezza della matematica è che quando le cose funzionano, esse funzionano per un buon motivo. Gli studenti di matematica dovrebbero capirlo. Dovrebbero aspettarsi che le cose si adattano insieme e dovrebbero prevedere i motivi per cui le cose sono come sono. Si consideri, per esempio, il seguente "trucco magico" che uno potrebbe trovare in un libro di ricreazioni matematiche.

> Annota la tua età.
>
> Aggiungi 5.
>
> Moltiplica il numero che hai appena ottenuto per 2.
>
> Aggiungi 10 a questo numero.

Moltiplica questo numero per 5.

Dimmi il risultato.

Io posso dirti la tua età.

La procedura data per trovare la risposta è: “Togli lo zero finale dal numero che hai ottenuto e sottrai 10. Il risultato è l’età della persona”.

La magica “risposta” pone la domanda: “Perché ha funzionato?” Questa domanda è matematica. Gli studenti a tutti i livelli possono esplorare e spiegare problemi come questo. Per esempio, un bambino può rispondere alla domanda, “Sto pensando a un numero. Se lo raddoppio ottengo 22. Qual è il mio numero?” e gli studenti medi possono giustificare il “trucco magico” sopra descritto usando ragionamenti e tecniche algebriche informali.

Nei livelli pre-K-2, gli studenti possono sviluppare le basi del ragionamento formale e della comprensione, che gli serviranno per motivare ciò che dicono. Domande come “Perché pensi che sia vero?” e “Qualcuno pensa che la risposta è diversa e perché lo pensa?” possono stabilire l’aspettativa che le affermazioni devono essere sostenute o rifiutate con prove. Ricerche di Resnick e Omanson (1984) mettono in evidenza la natura progressiva del ragionare sull’addizione. Quando si chiede ai bambini di trovare “3+5”, tipicamente faranno in modo da disporre di due insiemi di tre e cinque oggetti (per esempio le dita) rispettivamente e contandoli tutti: “1,2,3,4,5,6,7,8”. Bambini più grandi riconosceranno che non è necessario contare la prima serie e spontaneamente cominceranno contando da quattro. Allo stesso momento, gli studenti - spesso senza istruzioni – partono con il numero più grande e contano da cinque. Questa azione è basata sul riconoscimento che 3+5=5+3 e che è più efficiente contare partendo dal numero più grande. L’insegnante dove vede questo sviluppo può sollevare il problema di ciò che lo studente sta facendo e perché. La discussione che segue in classe può consolidare la comprensione degli studenti; può anche dimostrare che quando le cose funzionano, è perché c’è una ragione.

Esperienze di questo tipo accadono a tutti i livelli. Gli studenti nel livello 7, per esempio, possono esplorare le proprietà di un triangolo. Notano varie relazioni come la congruenza di due angoli in tutti i triangoli isosceli e possono convincere altri della verità dello loro scoperta. Oppure, potrebbero usare le proprietà dei triangoli per sviluppare e dimostrare congetture sui quadrilateri, come “Qual è la somma degli angoli di ogni quadrilatero?”, “E’ sempre la stessa?”. Gli studenti nei livelli 9-12 possono vedere che varie manipolazioni aritmetiche e simboliche che eseguono sono ben giustificate, come nel caso del diagramma piano per calcolare $(a+b+c)^2$ dato in figura 3.6 (adattato da Gelfand e Shen 1993, p.38). Lo scopo è che gli studenti diano importanza all’abitudine di rispondere alle domande e cercare giustificazioni.

	a	*b*	*c*
a	a^2	*ab*	*ac*
b	*ba*	b^2	*Bc*
c	*ca*	*cb*	c^2

$(a+b+c)^2=$

$(a+b+c)(a+b+c)=$

$a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2=$

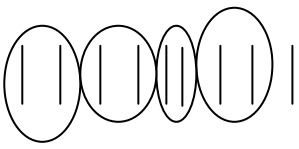
$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Figura 3.6. $(a+b+c)^2$

- **Formulare e indagare congetture matematiche**

Certe congetture matematiche hanno acquistato notorietà per la loro semplicità e per la sfida che hanno posto a molti matematici per molti anni. Un famoso problema aperto è noto come Congettura di Goldbach. Goldbach aveva previsto che ogni numero pari maggiore di 4 può essere scritto come somma di due (non necessariamente diversi) primi dispari. Per esempio, "6=3+3, 8=3+5, 10=3+7=5+5, …". La congettura è stata verificata e trovata vera per numeri fino alle migliaia di miliardi, ma non è stata ancora dimostrata o confutata in generale.

Tali congetture sono così interessanti che spesso è stato dato loro il nome di chi le ha fatte e sono passate nella tradizione matematica. I matematici hanno speso ore innumerevoli per verificarle o refutarle, spesso motivati da niente altro che curiosità. Il punto è che fare matematica implica *scoperta.* La congettura – cioè, supposizione ben costruita - è la strada principale per scoprire. Insegnanti e ricercatori concordano che gli studenti possono imparare a fare, raffinare e verificare congetture nella scuola elementare. Per esempio, una lezione per una classe di terzo livello include conversazioni tra studenti che cercano delle regolarità nelle addizioni di numeri pari e dispari. Gli studenti ipotizzano che la somma di due numeri pari sarà sempre pari, come la somma di due numeri dispari. Sviluppano rappresentazioni di numeri pari e dispari, come la seguente rappresentazione del numero dispari 9:



Rappresentazioni come questa rendono chiaro come l'unità "extra" in 9 può essere combinata con l'unità extra in un altro numero dispari, producendo un numero pari (Ball 1989). Similmente, Lampert (1990) analizza una seduta in classe di quinto livello in cui compito degli studenti era calcolare l'ultima cifra di 5^4, 6^4 e 7^4 senza fare la moltiplicazione. Considerando lo stesso esempio, Yackel (1998) nota,

> L'analisi mostra che gli studenti si muovevano avanti e indietro tra argomenti induttivi e deduttivi nel corso della lezione. Alla fine delle lezione, ogni studente aveva osservato una regolarità, fornendo una prova che si sarebbe ripetuta e/o dato una interpretazione di

> asserzioni di un altro studente. Questo è prova evidente che gli studenti elementari sono in grado di impegnarsi in complessi ragionamenti matematici (p.8).

A tutti i livelli tutti i rami della matematica forniscono opportunità per ragionamenti e congetture. Spesso, un semplice cambiamento nel modo in cui è assegnato un compito può accendere tali opportunità. Per esempio, invece di dire, "Mostra che la media di una serie di dati raddoppia se tutti i valori nella serie di dati raddoppiano", un insegnante può porre la seguente domanda: "Supponi che tutti i valori di un campione siano raddoppiati. Ci sono variazioni nella media del campione? Perché?".

Usata bene, anche la tecnologia apre la possibilità per esplorazioni strutturate. Calcolatrici e computer possono ora eseguire con facilità operazioni che erano una volta molto costose in termini di tempo e sforzi. I programmi dinamici di geometria, per esempio, permettono agli studenti di esplorare le trasformazioni o di esaminare un ampio numero di casi quando prima era possibile esplorarne solo alcuni. I programmi di grafica permettono agli studenti di esplorare variazioni parametriche. Esistono ora una varietà di corsi di analisi realizzati al computer in cui gli studenti esplorano un'ampia gamma di fenomeni, come limiti e convergenza, prima che i risultati siano introdotti in modo formale.

- **Sviluppare e valutare ragionamenti e dimostrazioni matematiche**

Nei capitoli 4-7, ogni sezione di fascia di livello su Ragionamento e Dimostrazione fornisce esempi appropriati per quel livello. Nei livelli pre-K-2 i bambini possono dimostrare i loro ragionamenti usando modelli concreti. Per esempio, contando dei blocchi, un bambino potrebbe mostrare all'insegnante che non importa quale dei due numeri è addizionato per primo. Nei livelli 3-5 gli studenti fanno previsioni matematiche basate su osservazioni e iniziano a fornire giustificazioni matematiche per sostenere le loro affermazioni. Per esempio, al quarto livello potrebbero sostenere che un particolare triangolo e un rettangolo hanno la stessa area, perché ognuno è formato dividendo in due uno dei due rettangoli equivalenti. Nei livelli 6-8 gli studenti dovrebbero essere capaci di percepire e spiegare molti modelli complessi, come nel caso di "numeri figurati" descritti nel capitolo 6. Nei livelli 9-12 ci si aspetta che gli studenti costruiscano catene relativamente complesse di ragionamenti.

Hanna (1998) discute una ricerca sulla dimostrazione e nota che "Moore afferma che la maggior parte degli studenti postsecondari hanno difficoltà con dimostrazioni formali perché 'hanno iniziato i loro corsi di livello superiore di matematica avendo scritto dimostrazioni solo per la geometria di scuola secondaria e senza aver visto la dimostrazione o i metodi di dimostrazione in una prospettiva generale' (Moore 1994 p. 249)". Chiedersi "perché" fornisce l'opportunità di ragionamenti e dimostrazioni in molte aree e dovrebbe essere un tema ricorrente dell'intero curriculum.

Una componente essenziale dell'imparare a ragionare matematicamente è la valutazione delle argomentazioni matematiche. E' importante che gli studenti imparino a mettere in discussione le ipotesi e ad assicurarsi che le catene di ragionamento siano giustificate. Certe volte gli studenti fanno generalizzazioni non appropriate, come "la moltiplicazione rende le cose più grandi". Certe volte il ragionamento sbagliato può essere sottile, come nell'affermazione "Questo numero è divisibile per 6 e per 4, dunque è divisibile per 24". Oppure gli studenti possono confondere affermazioni con le loro contrarie. Non è efficace catalogare l'ampia gamma di errori che gli studenti potrebbero fare per prevenirli, sebbene certi errori, come calcolare $(a+b)^2$ ottenendo a^2+b^2, ricorrano così di frequentee che

è utile mettere in guardia gli studenti. In ogni caso, le argomentazioni presentate dagli studenti, sia plausibili che errate, dovrebbero creare un'opportunità di discussione. Le lezioni in cui gli studenti sono invitati a presentare le loro riflessioni e a contribuire valutando le linee di pensiero di altri forniscono ricche opportunità per sviluppare e valutare argomenti matematici.

- **Scegliere e usare vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriati**

Ci sono vari tipi di argomentazioni logiche. Ci sono tradizioni per presentare dimostrazioni in vari rami della matematica, come per esempio nelle argomentazioni discorsive o dimostrazioni a due colonne in geometria o tavole di verità in logica. La classificazione gioca un ruolo importante in varie argomentazioni (p. es. "Questo è un X, allora esso ha le proprietà di tutti gli X"). Ci sono varie forme di ragionamento algebrico e geometrico, ragionamento proporzionale, ragionamento probabilistico, ragionamento statistico, e così via. Ci sono varie forme di argomentazioni, comprese dimostrazioni mediante analisi di tutti i casi possibili, confutazioni con controesempi e dimostrazioni con applicazione di risultati generali a casi specifici. Gli studenti hanno bisogno di conoscere e acquisire competenze su tutte queste, a livelli di complessità crescente nel corso del curriculum.

Uno dei principali obiettivi del curriculum di matematica è sostenere lo sviluppo di capacità di ragionamento in tutti gli studenti e l'acquisizione di strumenti per la costruzione di dimostrazioni in punti appropriati dei loro percorsi matematici. Gli studenti dovrebbero sempre essere incoraggiati a riflettere sulle cose a fondo e con cura, per comprendere e per essere capaci di spiegare. Man mano che le argomentazioni degli studenti diventano più complesse, le spiegazioni dovrebbero sempre più essere comunicate nel linguaggio formale della matematica.

Durante i loro anni a scuola, gli studenti devono avere molte opportunità di produrre e difendere le proprie catene di ragionamento e di esaminare e criticare quelle prodotte da altri. Nei primi anni, le loro argomentazioni possono essere informali e le catene di ragionamento brevi. Più tardi, ragionamenti e dimostrazioni sono formalizzati e sempre più complessi.

In generale, dovrebbe essere sottolineato che esplorare, congetturare, rappresentare e dimostrare sono tutti aspetti profondamente connessi del pensiero matematico. "Ragionamento" e "dimostrazione" non dovrebbero essere pensati come di qualcosa di separato dal grosso dell'attività matematica. Essi non possono essere semplicemente insegnati in una singola unità di logica, per esempio, oppure "facendo dimostrazioni" in un corso di geometria. Piuttosto, ragionamento e dimostrazione devono essere una parte coerente dell'esperienza matematica nei livelli pre-K-12. Ragionare matematicamente è una "abitudine della mente" e come tutte le abitudini può essere sviluppata attraverso l'uso coerente.

Standard 8: Comunicazione

I programmi di matematica devono usare la comunicazione per favorire la comprensione in modo che tutti gli studenti:

- organizzino e consolidino il loro pensiero matematico per comunicare con gli altri;
- esprimano idee matematiche coerentemente e in maniera chiara ai compagni, agli insegnanti e agli altri;
- estendano le loro conoscenze matematiche considerando i pensieri e le strategie altrui;
- usino il linguaggio matematico come un preciso mezzo di espressione.

Elaborazione: pre-K-12

La comunicazione è una parte essenziale dell'istruzione matematica. E' il mezzo attraverso cui le idee sono condivise e un veicolo per chiarire la comprensione. Quando gli studenti sono sollecitati a pensare e a ragionare sulla matematica e a comunicare i risultati del loro pensiero ad altri verbalmente o per scritto, devono far fronte al compito di spiegarsi in modo chiaro e convincente di fronte agli altri. Attraverso l'esperienza gli studenti possono sviluppare questa abilità. Inoltre, ascoltare spiegazioni fornite da altri può dare agli studenti l'opportunità di sviluppare la propria comprensione. Le conversazioni in cui le idee matematiche sono esplorate da varie prospettive, danno ai partecipanti l'opportunità di stimolare il loro pensiero e fare collegamenti. Tale attività aiuta anche gli studenti a sviluppare un linguaggio con cui esprimere idee matematiche, e un'adeguata percezione del bisogno di precisione in quel linguaggio.

Così, ci sono duplici benefici quando l'istruzione matematica è ricca in comunicazione: gli studenti comunicano per imparare la matematica, e imparano a comunicare matematicamente. Gli studenti che sono coinvolti in discussioni attive, nelle quali giustificano le soluzioni - specialmente di fronte al disaccordo - otterranno una migliore comprensione della matematica (Cobb e Lampert 1998). Gli studenti che hanno opportunità, incoraggiamento e sostegno a parlare, scrivere, leggere e ascoltare durante le lezioni di matematica impareranno a comunicare matematicamente.

- **Organizzare e consolidare il pensiero matematico per comunicare con gli altri**

Attraverso la comunicazione, le idee diventano oggetto di riflessione, affinamento, discussione e correzione. Un primo importante passo nel processo è organizzare e chiarire il proprio pensiero. Dato che i pensieri sono effimeri, le idee e gli argomenti matematici sono più facilmente esaminati e compresi quando sono articolati oralmente o per iscritto, un processo che aiuta anche a costruire il significato e la stabilità delle idee. Gli studenti non assimilano la matematica che vedono e ascoltano in classe a meno che non la facciano propria. La riflessione è intensificata se gli studenti possono produrre le idee apertamente o affidarle alla carta. Una volta che le idee sono espresse apertamente possono essere esaminate, revisionate o ampliate.

La riflessione e la comunicazione sono processi interconnessi nell'apprendimento della matematica. La comunicazione finalizzata alla riflessione può diventare una parte naturale dell'apprendimento della matematica, ma ciò richiede esplicita attenzione e

pianificazione da parte degli insegnanti. I bambini nelle prime classi, per esempio, possono imparare a motivare le loro risposte e a descrivere le loro strategie. Gli insegnanti devono porre attenzione nell'aiutare gli studenti a imparare come parlare di matematica. Quindi, al fine di promuovere la riflessione sul discorso, gli insegnanti possono incoraggiare gli studenti "a discutere su come si discute di matematica" (Cobb, Wood e Yackel 1994). Domande meditate poste da un insegnante oppure da un compagno di classe possono indurre gli studenti a riesaminare il loro ragionamento.

La scrittura è anche un utile catalizzatore per la riflessione. Un'attività che alcuni insegnanti trovano utile è usare gli ultimi minuti della lezione come momento in cui gli studenti scrivono quello che hanno appreso quel giorno e le domande che hanno da porre sui concetti della lezione. Tale attività può essere utile per gli studenti poiché riflettono sul lavoro del giorno e chiariscono il loro pensiero sulle idee sviluppate durante la lezione. Quest'attività può essere anche utile all'insegnante come elemento di valutazione. Un ulteriore beneficio è che essa ricorda anche agli studenti che essi condividono con l'insegnante la responsabilità dell'apprendimento che ha luogo durante la lezione (Silver, Kilpatrick, Schlesinger 1990). Altre forme più elaborate di scrittura che gli insegnanti possono impiegare per favorire riflessioni scritte comprendono diari, registri e annotazioni. Ognuna di queste attività può dare agli studenti un'opportunità di organizzare e consolidare il loro pensiero.

- **Esprimere idee matematiche coerentemente e in maniera chiara ai compagni, agli insegnanti e agli altri**

Le idee matematiche acquistano validità quando sono accettate all'interno di una comunità. All'interno della comunità matematica, periodicamente avvengono dibattiti riguardanti l'accettabilità della dimostrazione di un risultato. Perché una dimostrazione sia considerata corretta, deve essere accettata all'interno della comunità. Sebbene gli studenti non stiano tentando di produrre risultati pubblicabili di ricerche originali di matematica, traggono vantaggio dall'esperienza con un processo analogo. Hanno bisogno dell'opportunità di verificare le loro idee all'interno della comunità matematica della dasse, per vedere se possono essere capiti e se sono sufficientemente convincenti. Agli studenti bisogna insegnare cosa è valido come dimostrazione nella comunità matematica.

L'interazione con gli altri è il veicolo principale attraverso cui le idee ricevono un esame accurato e sono affinate e migliorate. Quelli che ascoltano criticamente e rispondono con chiarimenti e correzioni, si stanno impegnando in profondità. Non c'è solo un affinamento di idee ma c'è anche un senso di possesso. I risultati che emergono in classe quando uno studente convince un coetaneo scettico della validità di un'asserzione matematica hanno una chiarezza e una efficacia che raramente si possono associare alle spiegazioni che si trovano sulle pagine dei libri di testo. Quando gli studenti lavorano in coppia o in piccoli gruppi hanno poche opportunità per verificare le loro teorie e ascoltare le reazioni e le idee degli altri. Interazioni adeguatamente strutturate possono aiutare gli studenti a imparare, ad ascoltare e a esprimere le loro idee matematiche in modo chiaro. Queste esperienze sono spesso una preparazione utile alle presentazioni in forum più larghi, come per esempio l'esposizione della risoluzione di un problema all'intera classe. Inoltre, quando tali idee sono elaborate in pubblico, tutti gli studenti possono trarre profitto dal partecipare alla discussione, e l'insegnante può controllare il loro apprendimento. (Lambert 1990)

Nelle discussioni in classe, idee implicite possono diventare esplicite e poi possono essere analizzate più approfonditamente; tutti possono fare domande e imparare da queste discussioni. Gli studenti approfondiscono il loro stesso pensiero quando presentano i loro metodi per risolvere problemi complessi o quando giustificano il loro ragionamento a un compagno o all'insegnante. Attraverso questo processo, il pensiero degli studenti è reso esplicito e diventa possibile analizzare e migliorare le loro idee. Si possono individuare i concetti sbagliati e possono essere corretti e un nuovo apprendimento può prendere forma.

Gli insegnanti devono essere abili nel sostenere i dialoghi in classe. Per prima cosa, devono costruire il senso di comunità nel quale gli studenti si sentano liberi di esprimere le loro idee. Per alcuni studenti, la partecipazione a discussioni in classe è una sfida. Per esempio gli studenti dei livelli medi notoriamente hanno difficoltà a emergere in qualche modo durante le interazioni di gruppo. Malgrado ciò gli insegnanti possono riuscire a creare ambienti ricchi di comunicazione nelle lezioni. Il sostegno agli studenti è vitale specialmente per quelli la cui prima lingua non è l'inglese. Questi studenti possono avere bisogno di un sostegno supplementare per trarre profitto dalle lezioni di matematica ricche di comunicazione, ma essi possono partecipare pienamente se le attività in classe sono strutturate opportunamente (Borasi, e al. 1998; Fuson e al. 1997; Silver, Smith e Nelson 1995).

In secondo luogo, gli insegnanti devono lavorare attentamente per creare un clima di aspettative appropriate. Nei livelli elementari, l'obiettivo prioritario è fare imparare agli studenti a esprimersi chiaramente e coerentemente in modo che gli altri studenti possano capirli. Nel momento in cui concludono la scuola superiore gli studenti dovrebbero avere interiorizzato standard di dialogo e di ragionamento, in modo da poter presentare abitualmente argomentazioni chiare e complete. Modelli e domande poste in modo accurato possono aiutare a chiarire le aspettative, adeguate all'età degli studenti, sul loro lavoro.

La comunicazione scritta ha bisogno di essere alimentata in un modo simile. A tutti i livelli gli studenti traggono beneficio dall'opportunità di esaminare e discutere argomenti sia problematici che tipici della matematica scritta. Attraverso lo studio dello scritto tipico, gli studenti possono sviluppare una comprensione degli aspetti della comunicazione chiara in matematica. Attraverso l'esame e la revisione degli scritti che hanno bisogno di miglioramento, gli studenti possono incorporare nelle loro stesse prove gli standard e gli stili principali. Poiché le prove scritte stanno diventando sempre più abituali, gli studenti avranno bisogno anche di pratica per adeguarsi ai modelli di verifica.

In genere i bambini cominciano la scuola con scarse abilità nello scrivere. Durante gli anni della scuola primaria possono disegnare figure, scrivere parole e infine creare frasi. Inizialmente sarà l'insegnante o il genitore, piuttosto che il bambino a fare connessioni esplicite tra i vari aspetti del ragionamento dello studente. Nei livelli 3-5 gli studenti lavorano su una successione d'idee e sull'aggiunta di dettagli. Col passare del tempo il loro scritto diventa più elaborato. A questo punto, gli studenti diventano anche più espliciti nel basare i loro scritti su ciò che hanno ascoltato e su un obiettivo da perseguire. Per alcuni scopi sarà opportuno descrivere il loro pensiero senza formalità attraverso un linguaggio comune e attraverso scalette; per altri scopi gli studenti avranno bisogno di comunicare in modo matematico più formale, incluso l'uso di simboli matematici appropriati, di una terminologia precisa e di diagrammi attentamente disegnati.

Lo sviluppo della comunicazione scritta continua mentre gli studenti passano ai livelli medi. Nei livelli 6-8, il modo di scrivere degli studenti può divenire più conciso e può incorporare più termini e simboli matematici, mentre gli studenti sviluppano le loro capacità di ragionamento, di analisi e di generalizzazione. Questo sviluppo continua attraverso i livelli 9-12. Il processo d'apprendimento a scrivere in modo matematico è simile a quello dell'apprendimento a scrivere in generale e la pratica guidata è importante. Così l'attenzione va posta allo specifico argomento di matematica, incluso l'uso e i significati specifici del linguaggio matematico, le rappresentazioni e gli standard di spiegazione e di dimostrazione.

- **Estendere le conoscenze matematiche considerando i pensieri e le strategie altrui**

Lavorando sui problemi con altri, gli studenti ottengono parecchi benefici. Spesso, uno studente che ha un suo modo di vedere un problema può trarre profitto dal punto di vista di un altro, il quale punto di vista può rivelare un aspetto diverso del problema. Uno studente può concettualizzare un problema algebricamente mentre un altro lo visualizza geometricamente. Oppure due studenti possono avere modi diversi di contare lo stesso gruppo di oggetti. Per esempio, gli studenti che tentano di risolvere il seguente problema algebricamente, spesso hanno difficoltà nell'impostare le equazioni e traggono beneficio dal punto di vista fornito dagli studenti che si accostano al problema usando rappresentazioni visive:

> Un agricoltore ha dei conigli e delle gabbie. Se pone due conigli in ogni gabbia allora gli restano fuori quattro conigli dopo che tutte le gabbie sono piene. Se pone quattro conigli in ogni gabbia allora gli restano due gabbie non utilizzate dopo che tutti i conigli sono stati sistemati. Quanti conigli e quante gabbie possiede l'agricoltore? (Kruteteskii,1979)

Nelle discussioni dei vari approcci alla risoluzione di questo problema, gli studenti hanno l'opportunità di vedere le prospettive e i metodi degli altri, di valutarne la correttezza e l'utilità e di appropriarsene per utilizzarli nei problemi futuri.

Il processo di considerare, valutare, e costruire sul pensiero degli altri è abbastanza complesso. Al fine di considerare vari approcci ai problemi, gli studenti devono imparare ad ascoltare i coetanei, che però sono ancora, essi stessi, nel processo di sviluppo della terminologia e dei concetti della matematica. Gli studenti devono anche imparare a fare domande e a indagare il reciproco pensiero per chiarire le idee non ancora sviluppate. Inoltre riconoscendo che non tutti i metodi hanno merito uguale, gli studenti devono imparare a esaminare metodi e idee degli altri al fine di determinare le loro forze e i loro limiti. Ascoltando attentamente e riflettendo sulle affermazioni fatte dagli altri gli studenti imparano a diventare pensatori critici. Un aspetto del divenire un buon comunicatore matematico è interiorizzare tali comportamenti e assumere la capacità di rivedere la propria opinione criticamente. E' più probabile che questo divenga un'abitudine di tutta la vita, se gli studenti hanno frequenti opportunità di assumere tali comportamenti in classe.

Implicita in questa descrizione è l'idea che gli studenti devono impegnarsi seriamente a imparare e ad assumere un certa responsabilità della loro stessa comprensione. Implicito è anche il fatto che gli studenti hanno bisogno di lavorare con compiti di matematica di cui valga la pena discutere. I compiti dai quali ci si aspetta che gli studenti abbiano ben sviluppato un approccio algoritmico sono spesso non idonei per questo tipo di discorso; comunque, gli esercizi non di routine possono spesso essere catalizzatori di conversazioni ricche. La tecnologia è un altro buon catalizzatore. Quando gli studenti producono o esaminano numeri o oggetti con la calcolatrice o sullo schermo del computer, hanno un

comune (e spesso facilmente modificabile) referente per le loro discussioni o idee matematiche.

- **Usare il linguaggio matematico come un preciso mezzo di espressione**

Quando gli studenti esprimono la loro comprensione della matematica, cominciano usando il linguaggio familiare quotidiano. Questo fornisce una base sulla quale costruire la connessione al linguaggio formale matematico. Come si afferma in *Curriculum and Evaluation Standards* (NCTM 1989), il linguaggio matematico si costruisce sulla struttura esistente e sulla logica del linguaggio comune e unisce esperienze e linguaggi degli studenti al mondo della matematica. Comunque, qualche volta c'è discrepanza tra il linguaggio comune e il linguaggio matematico. Il linguaggio comune è spesso impreciso e non corretto quando applicato alla matematica. Per esempio, vocaboli come "area", "fattore", e "simile" hanno un significato particolare quando usati in matematica che differisce dal loro uso nel linguaggio comune. Gli studenti hanno bisogno di un aiuto per costruire un ponte tra i loro usi della lingua dentro e fuori le lezioni di matematica.

È importante far fare agli studenti esperienze che li aiutino ad apprezzare l'efficacia e la precisione del linguaggio matematico. Per esempio, studenti dei livelli 6-8 che hanno difficoltà a descrivere varie forme poligonali possono apprezzare il valore di termini come "concavo" e "convesso" come alternativa alle miriadi di frasi del linguaggio comune che emergono naturalmente in queste discussioni, come le espressioni "contenuto", "a forma di M", o "normale". L'uso di precise definizioni matematiche dovrebbe diventare la norma nei livelli intermedi e superiori. Comunque, è importante evitare ogni fretta nell'imporre il linguaggio matematico formale specialmente nelle elementari, ma anche nelle superiori. Consentire agli studenti di raggruppare le loro idee e di esprimersi con i propri mezzi informali potrebbe rivelarsi un mezzo efficace per favorire l'impegno e la proprietà di linguaggio. Invero la confusione che risulta dalle imprecisioni degli studenti li può aiutare ad apprezzare il bisogno di definizioni precise e apprezzare il potere comunicativo dei termini matematici convenzionali. Gli insegnanti devono essere sensibili ai momenti in cui i benefici dell'uso del linguaggio usato dagli studenti potrebbero non tenere conto del valore della precisione matematica.

La tecnologia fornisce altre possibilità e stimola lo sviluppo del linguaggio e l'analisi. I simboli usati nei fogli di calcolo possono essere in relazione ma non sono necessariamente uguali a quelli generalmente usati dai matematici. Gli studenti trarranno profitto dalle esperienze che richiedono il confronto fra le espressioni matematiche standard e quelle usate in applicazioni comuni come nei calcolatori o nei fogli di calcolo elettronico.

Standard 9: Collegamenti

I programmi di matematica devono mettere in evidenza i collegamenti per agevolare la comprensione della matematica in modo che tutti gli studenti:

- riconoscano e usino connessioni fra idee matematiche diverse;
- capiscano come le idee matematiche si assemblano l'una all'altra per produrre un insieme coerente;
- riconoscano, usino e imparino la matematica in contesti a essa estranei.

Elaborazione: pre-K-12

Le connessioni diventano significative quando gli studenti, dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore, hanno l'opportunità di vedere e sperimentare il ricco intreccio tra gli argomenti matematici, all'interno di contesti che mettono in relazione la matematica con le altre discipline, con le loro esperienze e coi loro interessi. Attraverso programmi che danno rilievo alle connessioni, non solo gli studenti imparano la disciplina, ma comprendono anche l'utilità della matematica e le relazioni tra le diverse idee.

Nonostante sia spesso presentata in parti separate, la matematica non è una lista di argomenti o metodi isolati, ma un campo di studio organico. Vedere la matematica come un complesso unitario suscita il bisogno di riflettere sulle connessioni presenti all'interno della disciplina. Da questo punto di vista, si ravvisa il bisogno di un curricolo pre-K-12 che connetta sia le idee tra i diversi livelli, sia le idee all'interno di un singolo livello. Ciò significa che gli insegnanti dovranno conoscere tanto le necessità attuali dei loro studenti, quanto la matematica che hanno studiato nei livelli precedenti e quella che studieranno nei livelli successivi. Gli insegnanti dovrebbero costruire l'attività didattica sulla precedente esperienza degli studenti e non ripetere ciò che gli studenti hanno già fatto. Dovrebbero aiutare gli studenti a fare dei collegamenti con la matematica che già conoscono, in modo che possano rafforzare la loro comprensione e sviluppare ogni anno nuovi argomenti e nuove idee. Questo richiede che gli studenti siano consapevoli di ciò che hanno imparato e del fatto che la conoscenza già acquisita può essere utile per capire e dare senso alle nuove acquisizioni.

Vedere la matematica come un corpus di conoscenze collegate significa, in concreto, che le idee presenti in una certa unità didattica vengono riprese nelle unità successive, che le varie idee girano all'interno di ogni lezione e dalla lezione di un giorno a quella del giorno successivo. Unità didattiche rispondenti a questi requisiti consistono in un insieme di attività organizzate in modo tale da sviluppare la conoscenza matematica a un livello di sofisticazione via via crescente. È in un contesto di questo tipo che gli studenti cominciano a vedere la matematica come una disciplina coesa e a capire che è l'integrazione delle idee che definisce la disciplina stessa.

- **Riconoscere e usare connessioni fra diverse idee matematiche**

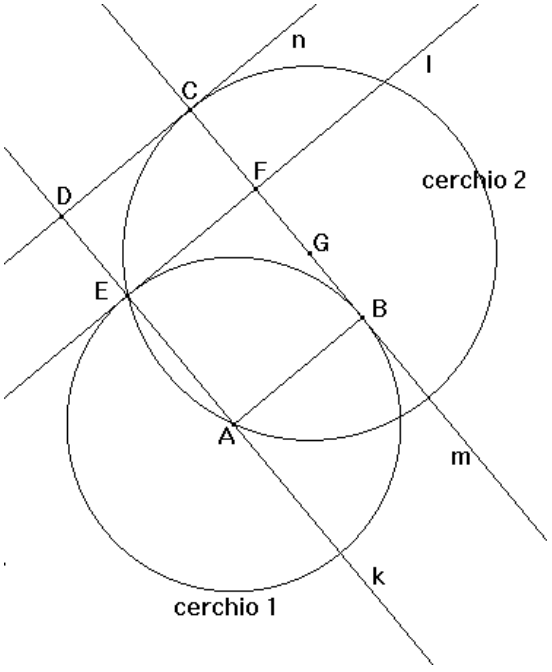
Sottolineare i collegamenti tra le diverse idee matematiche aiuta gli studenti a capire e ad acquisire degli atteggiamenti che sono parte del pensiero matematico. Al fine di sviluppare questi atteggiamenti, gli insegnanti devono offrire delle opportunità di vedere, utilizzare e discutere le connessioni. Ciò può essere fatto attraverso delle domande che l'insegnante pone

durante la discussione in classe, attraverso la discussione con piccoli gruppi di studenti, durante il lavoro con i singoli studenti. Un insegnante può chiedere, per esempio, "in che modo il nostro lavoro di oggi sui triangoli simili è legato alla discussione che abbiamo fatto la scorsa settimana sul disegnare in scala?" In molti casi, se gli studenti non sono fatti partecipi dei collegamenti esistenti, sono privati della possibilità di migliorare il loro sviluppo e la loro comprensione della matematica.

In un curricolo che vede la matematica come un insieme di idee tra loro collegate, l'immagine di queste relazioni pervade l'esperienza degli studenti. In questa prospettiva, le nuove idee sono viste come estensioni della matematica precedentemente appresa. Perciò gli studenti dovrebbero essere in grado di utilizzare ciò che già conoscono per affrontare nuove situazioni. Gli studenti delle elementari dovrebbero essere capaci di collegare la sottrazione tra numeri interi alla sottrazione tra frazioni e tra numeri decimali; quelli dei livelli medi di riconoscere e collegare le diverse rappresentazioni della stessa idea matematica, come il rapporto che rappresenta la velocità di variazione di due variabili e la pendenza di una retta e quelli dei livelli superiori di collegare ed estendere queste rappresentazioni della pendenza alle soluzioni di un sistema lineare. Durante tutto il curricolo, gli studenti dovrebbero continuamente chiedersi: “in che modo questo problema o questo argomento sono simili a cose che ho già studiato prima?”

- **Capire come le idee matematiche si assemblano l’una all’altra per produrre un insieme coerente**

Fare delle connessioni è parte di ciò che significa conoscere la matematica e pensare matematicamente. Consideriamo dal punto di vista matematico quello che gli studenti della scuola superiore potrebbero sperimentare guardando le diverse relazioni che scaturiscono a partire dal rapporto aureo (uguale a $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ o approssimativamente a 1,61803). Primo, essi potrebbero costruire il rettangolo aureo utilizzando le istruzioni della figura 3.7 e verificare che il rettangolo ABCD è effettivamente aureo.



Istruzioni per costruire un rettangolo aureo:

1. Disegnare due punti, *A* e *B*, e costruire il segmento *AB*.
2. Costruire un cerchio (cerchio 1) di centro *A* e passante per *B*.
3. Costruire una retta *k* passante per *A* e perpendicolare al segmento *AB*.
4. Sia *E* il punto d'intersezione tra il cerchio 1 e la retta *k*. Costruire una retta *l* passante per *E* e parallela al segmento *AB*.
5. Costruire una retta *m* passante per *B* e perpendicolare al segmento *AB*.
6. Sia *F* il punto d'intersezione delle rette *l* e *m*. Costruire il punto medio *G* del segmento *BF*.
7. Costruire un cerchio (cerchio 2) di centro *G* e passante per *E*.
8. Sia *C* il punto d'intersezione della retta *m* e del cerchio 2. Costruire la retta n passante per *C* e parallela alla retta *l*.
9. Sia *D* il punto d'intersezione delle rette *k* ed *n*.
10. Il rettangolo *ABCD* è aureo.

Figura 3.7. La costruzione di un rettangolo aureo.

Potrebbero poi osservare che il rapporto tra l'altezza e la base è ancora 1,618, e guardando ai numeri di Fibonacci, scoprire che il rapporto di due numeri consecutivi della successione di Fibonacci inizia con 1 e converge al rapporto aureo 1,61803. Infine, in un'altra esperienza, potrebbero verificare che anche una soluzione del sistema, $x–y = 1$ e $xy = 1$ risulta uguale o al rapporto aureo o al suo reciproco. Quando gli studenti discutono del fatto sorprendente che tutte queste connessioni scaturiscono dallo stesso rapporto, stanno cominciando a riflettere su quanto le idee matematiche siano legate tra loro.

Mentre cominciano a sviluppare un'attitudine a pensare la matematica come a un insieme di connessioni, gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a vedere le connessioni come un mezzo per capire e risolvere i problemi. Gli studenti dovrebbero chiedersi "posso vedere questo in un altro modo?", "questa situazione è simile ad un'altra che ho già visto?". Nel momento in cui viene presentato agli studenti un concetto algebrico, dovrebbero pensare al modo di rappresentarlo geometricamente, e probabilmente la loro comprensione diventerebbe più profonda e li aiuterebbe a sviluppare una strategia per la risoluzione dei problemi. Per esempio, gli studenti dovrebbero associare a un'equazione lineare in due variabili una retta del piano. Ciò aiuta a spiegare perché un sistema di due equazioni in due variabili ha una soluzione, nessuna soluzione o infinite soluzioni. Quando vengono dedotte le formule per l'area della superficie e per il volume di un prisma, gli studenti dovrebbero essere capaci di capire la differenza tra la superficie e il volume e applicare la corretta procedura di calcolo. Se i concetti vengono associati alla procedura, gli studenti non percepiscono la matematica come un insieme arbitrario di regole (NCTM 1989, p. 32). Questa integrazione tra le procedure e i concetti dovrebbe essere posta a fondamento della matematica scolastica.

- **Riconoscere, usare e imparare la matematica in contesti a essa estranei**

Gli insegnanti dovrebbero aiutare a stabilire connessioni matematiche corrette con le altre materie di studio. Tutte le aree curricolari hanno una componente matematica, e gli insegnanti dovrebbero metterla in risalto. Nel fare ciò, gli insegnanti devono riconoscere e rendere esplicite le caratteristiche matematiche dell'attività. Nello sforzo di stabilire delle connessioni, gli insegnanti dovrebbero anche assicurarsi che il contenuto matematico non sia troppo semplicistico. Lo scopo delle connessioni interdisciplinari è quello di approfondire la comprensione e aumentare l'impegno degli studenti in matematica.

L'opportunità che hanno gli studenti di fare esperienze di matematica in un contesto è importante. Il contesto può nascere sia all'interno della matematica, sia in altre discipline. Di tutte, le discipline scientifiche hanno le connessioni più naturali con la matematica. Il collegamento tra la matematica e le scienze non è solo nei contenuti, ma anche nei processi. I processi e il contenuto delle scienze possono far nascere un metodo per la risoluzione dei problemi che richiede l'applicazione della matematica. Nei *National Science Education Standard* è descritta l'attività scientifica che i bambini devono svolgere lungo gli anni delle elementari (NRC 1996, pp. 131-133). In queste attività gli studenti progettano strumenti per misurare quantità relative al clima, fanno misure, organizzano e comunicano dati. Le connessioni con la matematica sono sostanziali.

L'uso della matematica in situazioni concrete porta ad approfondirne la comprensione. In un altro esempio, la relazione tra il diametro e la lunghezza della circonferenza di un cerchio può essere studiata empiricamente raccogliendo vari oggetti circolari e misurando il

diametro e la circonferenza. Gli studenti del sesto livello possono condurre un esperimento per vedere se esiste una relazione tra le due variabili, circonferenza *C* e diametro *d*. Raccogliendo i dati e rappresentandoli in un grafico, gli studenti possono constatare che i punti giacciono tutti vicino a una retta per l'origine. Questo suggerisce che il rapporto *C*/*d* è costante. Gli studenti di solito ottengono un valore medio di *C*/*d* compreso tra 3,1 e 3,2. Gli studenti dovrebbero poi capire che questo non prova che *C*/*d* è una costante o che il suo valore è 3,14…, ma suggerisce solamente che *C*/*d* è una costante.

Infine, possiamo considerare l'uso dell'analisi dei dati e della statistica per consentire agli studenti di chiarire alcuni aspetti della loro vita di tutti i giorni. Gli studenti dei livelli pre-K-2 che imparano l'uso del calendario, possono raccogliere dati sulle condizioni atmosferiche annotando i giorni di pioggia di nebbia o di sole. Possono registrare i dati, contare i giorni, fare delle generalizzazioni sulle condizioni, fare previsioni per il futuro. Gli studenti nei livelli 3–5 possono usare Internet per collaborare con altre classi e ripetere il metodo di Eratostene per determinare la lunghezza della circonferenza della Terra (Stevens 1998).

Gli studenti dei livelli 6–8 sono spesso attratti dagli interessi dei loro compagni di classe e dalle relazioni sociali. Attraverso indagini statistiche gli studenti possono utilizzare l'analisi dei dati e la statistica per imparare qualcosa di più sugli studi sociali. L'esempio della "selezione dei delegati" (Lappan et al. 1996) mostra un collegamento con la matematica. In questo esempio gli studenti determinano il numero dei delegati che devono partecipare a un congresso sui problemi ambientali tra tutti gli stati. I criteri per selezionare i delegati – geografici, sessuali ed etnici – devono assicurare che siano prese decisioni giuste. Questo uso del rapporto, delle proporzioni e delle percentuali aumenta la comprensione di questi concetti da parte degli studenti. Gli studenti determinano il rapporto tra le popolazioni delle regioni geografiche e l'intera popolazione degli Stati Uniti e trovano il rapporto equivalente tra i delegati di una regione e il numero totale di delegati. Una tabella con i dati relativi alla popolazione degli Stati Uniti aiuta a rispondere a domande del tipo "quante persone vivono nel New England?". La matematica permette di rispondere a una domanda importante dal punto di vista sociale, del tipo "quanti delegati dovrebbero venire da ogni regione?"

Gli studenti dei livelli 9–12 possono usare l'analisi dei dati per diventare cittadini informati e responsabili. Possono raccogliere e analizzare i dati sugli eventi correnti, sugli stanziamenti governativi o sulle elezioni, per esempio. Queste attività aiutano a capire come la statistica e l'analisi dei dati giocano un ruolo importante nel prendere decisioni nella politica degli stati e delle regioni e nei servizi sociali.

Standard 10: Rappresentazioni

I programmi di matematica devono mettere in evidenza le rappresentazioni per agevolare la comprensione della matematica, in modo che tutti gli studenti:

- creino e usino le rappresentazioni per organizzare, registrare e comunicare idee matematiche;
- sviluppino un repertorio di rappresentazioni che possa essere utilizzato proficuamente, con flessibilità e appropriatezza;
- usino le rappresentazioni per modellare e interpretare fenomeni fisici, sociali e matematici.

Elaborazione: pre-K-12

Il modo in cui le idee matematiche vengono rappresentate ha un ruolo d'importanza fondamentale nel delineare i modi in cui la gente capisce e usa tali idee. A titolo esemplificativo consideriamo il seguente quesito d'aritmetica:

> Qual è il prodotto dei due numeri rappresentati in cifre romane da MCMXXXVII e MDCCXLIII? Quale quoziente si ottiene dividendo il primo numero per il secondo?

Nella rappresentazione precedente moltiplicare è troppo difficile e dividere sembra praticamente impossibile. Tuttavia, quando le rappresentazioni vengono trasformate in quelle standard in base dieci si ha un semplice procedimento per trovare il prodotto e il quoziente dei numeri 1987 e 1743.

Più generalmente quest'esempio illustra il fatto che il simbolismo e le rappresentazioni matematiche sono uno dei più significativi risultati dell'umanità. Le rappresentazioni matematiche sono state perfezionate e raffinate nei secoli. Gli studenti, nell'accostarsi a una rappresentazione matematica e alle idee che essa rappresenta, acquisiscono un insieme di strumenti che permettono un significativo accrescimento delle loro capacità di ragionamento matematico.

Rappresentazione è un concetto dalle molte sfaccettature, e a esso sono associate sottili e complesse questioni linguistiche. Il termine “rappresentazione” si riferisce sia al processo sia al prodotto - in altre parole, sia all'azione di considerare un concetto matematico ed esprimerlo in una qualche forma sia alla forma stessa. Per di più, il termine si applica sia a processi ed espressioni osservabili esternamente sia a ciò che accade “dentro” la mente di una persona che fa matematica. E' importante prendere in considerazione ciascuno di questi significati di rappresentazione nei programmi scolastici di matematica.

Alcune forme di rappresentazione - come diagrammi, grafici ed espressioni simboliche - sono da tempo presenti nella matematica scolastica. Sfortunatamente, sia queste sia altre rappresentazioni sono spesso state pensate e insegnate come fine a se stesse. Quest'approccio è limitativo della potenza e dell'utilità dell'uso di rappresentazioni come strumento per insegnare e per fare matematica. Si dovrebbero trattare le rappresentazioni come strumenti critici di supporto allo studente per la comprensione dei concetti della matematica e delle loro relazioni; per l'accesso al ragionamento matematico, per la comprensione personale e reciproca; per riconoscere connessioni tra concetti matematici correlati; e per l'applicazione della matematica, con l'uso di modelli, a problemi relativi a situazioni reali. A questa lunga lista di ragioni a favore della rappresentazione, come processo importante nella matematica a scuola, si devono aggiungere nuove forme di rappresentazione associate a tecnologie elettroniche che hanno parimenti creato la necessità di maggior attenzione nei riguardi del problema didattico.

- **Creare e usare le rappresentazioni per organizzare, registrare e comunicare idee matematiche**

Come mostra l'esempio che mette a confronto i numeri romani con la numerazione araba in base dieci, il tipo di rappresentazione usata influirà sulle singole capacità di capire e

fare matematica. Il fatto che ci siano voluti secoli per sviluppare la rappresentazione in base dieci mette in evidenza un altro punto: molte delle rappresentazioni che noi oggi diamo per scontate - numerazione in base dieci, numerazione binaria, frazioni, equazioni, diagrammi e sviluppo di grafici - sono il risultato di un processo di raffinamento culturale che si è sviluppato durante un lungo periodo di tempo. Questi sono strumenti estremamente potenti per la risoluzione di problemi, e inoltre un linguaggio matematico condiviso è di fondamentale importanza per poter comunicare. Rappresentazioni scritte sono centrali per la lettura e la comprensione di testi matematici scritti da altri. Esse possono essere anche molto utili per condividere con gli altri il proprio modo di comprendere e di avvicinarsi alla matematica. Per queste ragioni, è importante che lo studente impari forme convenzionali di rappresentazione che gli rendano più facile l'apprendimento della matematica e la comunicazione con gli altri.

Le rappresentazioni matematiche non sono isolate. Sono abitualmente applicate a diverse classi di situazioni e sono connesse a particolari insiemi di concetti matematici. Comprendere una rappresentazione matematica significa, in parte, avere accesso alla matematica alla quale si riferisce, sapere in quali casi applicarla, e capire come tale rappresentazione può essere usata al servizio di particolari obiettivi. Dato un problema particolare, si può scegliere una rappresentazione che aiuti a chiarire e a risolvere tale problema. Un problema diverso che si occupa dello stesso fenomeno potrebbe essere affrontato, in modo più proficuo, con una rappresentazione diversa. A volte l'uso, a scuola, di forme convenzionali di rappresentazione conduce gli studenti a considerarle arbitrarie e disconnesse sia dalla situazione sia dalle altre loro conoscenze ed esperienze, mentre dovrebbero essere fatte apprezzare come uno strumento potente per organizzare e comunicare ragionamenti matematici. E' utile prendere in considerazione, non soltanto come si possa migliorare l'insegnamento di rappresentazioni convenzionali agli studenti, ma anche il ruolo che altre rappresentazioni, meno convenzionali, potrebbero giocare nelle lezioni di matematica.

Il fatto che le rappresentazioni siano strumenti così efficaci potrebbe far dimenticare quanto sia stato difficile svilupparle e, cosa più importante, quanto lavoro è richiesto per la loro comprensione. I maestri delle scuole elementari sono consapevoli di quanto sia difficile per i bambini la notazione in base dieci, e il curricolo dà un grande spazio alla possibilità di andare avanti e indietro tra l'insegnare agli studenti a contare e il fargli comprendere la struttura della rappresentazione in base dieci. Ma, quando gli studenti vanno avanti nel programma, l'attenzione è sempre più accentuata sulla presentazione della matematica in sé, forse partendo dall'assunto che studenti sufficientemente grandi per pensare in termini formali non hanno bisogno, come i loro compagni più piccoli, di negoziare tra le loro concezioni ingenue e il formalismo matematico. Le ricerche mostrano invece che studenti di ogni livello, hanno bisogno di lavorare allo sviluppo della comprensione di idee complesse ricavate da rappresentazioni convenzionali (Greeno and Hall 1987). Una rappresentazione apparentemente chiara come la variabile "*x*" può essere, per uno studente, difficile da capire.

Le rappresentazioni non convenzionali, costruite dagli studenti per la risoluzione di problemi o per approfondire idee matematiche, possono avere un importante ruolo di supporto allo sviluppo intellettuale degli studenti nell'apprendimento della matematica e nella sua applicazione. Le rappresentazioni costruite personalmente, pur mancando spesso di precisione e generalità, sembrano agli studenti molto valide. In particolare, supportano la comprensione e la soluzione di problemi; procurano vie efficaci per registrare un metodo di risoluzione e per descrivere tale metodo agli altri; forniscono una base d'esperienza dalla quale gli studenti

possono sviluppare un apprezzamento della natura e della potenza delle altre rappresentazioni, incluse quelle convenzionali. Le rappresentazioni costruite dagli studenti danno inoltre la possibilità, all'insegnante, di introdursi in modo valido nei percorsi seguiti dagli studenti per capire e ragionare in matematica. Servendosi di queste informazioni gli insegnanti possono, al momento opportuno, costruire collegamenti tra le rappresentazioni personali degli studenti e quelle più convenzionali. In definitiva, è importante che gli studenti abbiano non solo l'opportunità di apprendere forme di rappresentazione convenzionali, ma anche di costruire, raffinare e usare le proprie come un aiuto per apprendere e per fare matematica.

Computer e calcolatrici cambiano il modo in cui gli studenti si servono delle rappresentazioni convenzionali, ed estendono l'insieme delle rappresentazioni con le quali possono lavorare. Ad esempio, possono spostare, invertire, allungare e zoomare su un grafico usando gli strumenti di disegno o usando un software di geometria dinamica; possono usare un software di computer algebra per manipolare espressioni, e possono indagare su un insieme complesso di dati usando fogli elettronici. Non appena imparano a usare questi strumenti nuovi e versatili, al fine di migliorare i loro metodi per organizzare e registrare le proprie idee, cresce la loro comprensione dei concetti e delle relazioni matematiche e diventa più facile la comunicazione dei loro ragionamenti. Inoltre, gli studenti, possono considerare percorsi in cui qualche rappresentazione, usata in tecnologia elettronica, differisca dalle rappresentazioni convenzionali. Ad esempio, le calcolatrici scientifiche usano un modo di rappresentare un numero che è diverso dalla forma tipicamente usata nei libri di testo. Un manipolatore simbolico, spesso, cambia l'ordine o la forma di un'espressione algebrica. Questi strumenti tecnologici offrono a studenti e professori molti risultati nuovi collegati alla rappresentazione matematica.

- **Sviluppare un repertorio di rappresentazioni che possa essere utilizzato proficuamente, con flessibilità e appropriatezza**

Ci sono relazioni complesse tra gli oggetti matematici e le forme per rappresentarli. Spesso lo stesso oggetto (o relazione) può essere esposto o rappresentato in maniere diverse, e queste differenti rappresentazioni potrebbero essere appropriate per scopi diversi. In tempi diversi, ad esempio, si potrebbe voler pensare a “48” in modi differenti, come ad esempio “4 decine e 8 unità”, “3 decine e 18 unità”, “50 meno 2”, “l'area di un rettangolo 3 per 16”, “il perimetro di un quadrato di lato 12”, “un poco meno della metà di 100”, e “un poco meno di 7^2”. E' probabile che ciascuna di queste rappresentazioni di 48 sia utile per uno scopo e meno utile per un altro. E' importante che lo studente sappia muoversi in maniera flessibile tra queste rappresentazioni, scegliendo o creando le versioni utili per uno scopo particolare.

Rappresentazioni diverse chiariscono aspetti diversi di un concetto o di una relazione complessa. Per esempio, abitualmente gli studenti imparano a rappresentare frazioni come settori di un cerchio o pezzi di un rettangolo, o di qualche altra figura, e talvolta si servono di modellini fisici o di linee di frazione. Questa forma di rappresentazione è utile per chiarire l'interpretazione di frazione come “parte di un tutto”; ciò supporta lo sviluppo della comprensione dell'equivalenza tra frazioni e può aiutare lo studente nella visualizzazione del significato di addizione tra frazioni, soprattutto quando queste hanno lo stesso denominatore e quando la loro somma è minore di uno. Tuttavia, questa forma di rappresentazione, non porta ad altre interpretazioni di frazione, come rapporto, divisione, o numero, e non supporta direttamente la comprensione dell'addizione di frazioni con denominatori diversi o la cui somma sia maggiore di uno. Similmente, altre rappresentazioni di frazione, come punti su una

retta numerica o rapporti di elementi discreti di un insieme, comprendono qualche aspetto, ma non tutti, del concetto complesso di frazione. Così, per rendere più profonda la conoscenza delle frazioni - e di molti altri concetti della matematica a scuola - gli studenti hanno bisogno di una varietà di rappresentazioni che supportino la loro comprensione.

Uno degli aspetti più forti della matematica è l'*astrazione* - vale a dire l'uso di rappresentazioni che eliminano alcuni aspetti di un problema, non necessari per l'analisi, e permettono di operare facilmente sui "nudi simboli". Per di più, riconoscere che un particolare oggetto ha una particolare rappresentazione può procurare una grande quantità d'informazioni sull'oggetto stesso. In tutti i modi, questo fatto sta dietro la potenza delle applicazioni e delle modellizzazioni matematiche. Ad esempio, un problema può essere formulato in termini del reale contesto ambientale in cui è nato:

> Da una nave in mare, di notte, il capitano può vedere tre fari e può misurare gli angoli tra essi. Se il capitano conosce la posizione dei fari, su una mappa, può determinare la posizione della nave?

Quando si realizza una rappresentazione matematica del problema, la nave e i fari diventano punti del piano, e il problema può essere risolto senza sapere che si tratta di una nave. Molti altri problemi in contesti diversi possono avere una rappresentazione simile. Non appena un problema è rappresentato, in qualche forma, i metodi classici di risoluzione per questa forma matematica possono risolvere il problema. Per esempio, se la modellizzazione di un problema conduce, ad esempio a una funzione quadratica, gli studenti devono sapere che c'è un valore critico determinabile analiticamente, che il grafico è simmetrico, e così via.

Rappresentazioni comuni possono anche essere utili nell'aiutare gli studenti a costruire connessioni tra gli argomenti di matematica che vanno imparando. Studenti che sanno rappresentare il prodotto *(a+b)(c+d)* come un rettangolo la cui area è composta di rettangoli più piccoli di area *ac*, *ad*, *bc* e *bd* hanno una via per collegare i loro studi sulla moltiplicazione d'espressioni algebriche (p.e. $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$) con lo studio precedente del prodotto di numeri a due cifre (p.e. 15 × 27 = (10 × 20)+(10 × 7)+(5 × 20)+(5 × 7)). Tali rappresentazioni danno agli studenti la capacità di trovare connessioni tra argomenti del programma di matematica che altrimenti sembrerebbero sconnessi.

Gli strumenti tecnologici offrono oggi agli studenti l'opportunità di avere molte esperienze diverse con l'uso di rappresentazioni multiple. Per esempio, molti pacchetti software permettono allo studente di vedere diverse rappresentazioni di una funzione simultaneamente. Ad esempio, una funzione può essere mostrata con un tabulato, con un grafico o sotto forma di equazione. Questi software danno allo studente la possibilità di esaminare come certe variazioni in una rappresentazione, ad esempio la variazione di un parametro nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, coinvolgano simultaneamente le altre rappresentazioni.

Durante i livelli pre-K-12 gli studenti dovrebbero imbattersi in rappresentazioni multiple di molti concetti e relazioni matematiche. E' molto importante che gli allievi, allargando il proprio repertorio di rappresentazioni, riflettano sul loro uso e percepiscano la loro forza e la loro debolezza a seconda delle situazioni. Per esempio, gli studenti imparano diversi modi di rappresentazione per mostrare dati statistici, ed è importante che il loro apprendimento includa la possibilità di riflettere sul tipo di dati e sull'opportunità di usare un

grafico circolare piuttosto che uno lineare, o un diagramma a blocchi piuttosto che un istogramma.

- **Usare le rappresentazioni per modellare e interpretare fenomeni fisici, sociali e matematici**

Il termine “modello” ha molti significati diversi. Non c'é quindi da meravigliarsi se questa parola è usata in molti modi nel dibattito sull'insegnamento della matematica. Per esempio si usa la parola “modello” per riferirsi ai materiali concreti con cui gli studenti lavorano a scuola, vale a dire a modellini manipolativi. Il termine è usato anche per proporre esemplificazioni o simulazioni, come ad esempio quando il professore crea per i sui allievi un modello del procedimento di risoluzione di un problema. E ancora, questo termine è usato, in modo grossolano, come sinonimo di rappresentazione. In mezzo a questa lista di usi e significati ne esiste uno che si riferisce in particolare alla matematica, e che focalizza maggiormente questa parte del dibattito sul ruolo della rappresentazione nella matematica a scuola. Il termine "modello matematico" in questo contesto significa rappresentazione matematica degli elementi e delle relazioni all'interno di una versione idealizzata di un fenomeno complesso. Modelli matematici possono essere usati per chiarire la comprensione di fenomeni e per risolvere problemi. In questo senso, "creare modelli" significa, non soltanto rappresentare, ma anche agire su tali rappresentazioni ed interpretare i significati delle singole azioni all'interno del modello matematico rispetto ai fenomeni rappresentati.

Molte delle attività di rappresentazione e analisi nelle quali gli studenti s'impegnano sono una forma semplificata di creazione di modelli in cui alcune situazioni sono caratterizzate simbolicamente e, quindi, analizzate. Si consideri, ad esempio, un tipico problema di ottimizzazione nel quale viene chiesto agli studenti di determinare quale prezzo, per una rivista, produrrà il maggior profitto, giacché ogni volta che il prezzo aumenta diminuisce il numero di persone che la compra. Per risolvere questo tipo di problema uno studente potrebbe determinare un'equazione che esprima il profitto, in funzione del prezzo alla vendita, e, dopo, usare tecniche grafiche o analitiche per determinare il prezzo migliore. Sebbene le versioni scolastiche di questi problemi siano veramente semplici, il lavoro ha, in sé, qualche aspetto del processo di costruzione di modelli.

Ci sono attività per le quali un modello dà una visione di un fenomeno reale attraverso la sovrapposizione di una struttura analitica. Ne è un esempio la costruzione di un modello del flusso del traffico automobilistico. La formulazione di un problema generale potrebbe essere: "per quanto tempo la luce di un semaforo dovrebbe rimanere verde affinché un numero ragionevole di macchine possa attraversare l'incrocio?" Gli studenti potrebbero raccogliere i dati sul tempo di attraversamento impiegato (in media) dalla prima automobile, dalla seconda automobile, e così via. Possono rappresentare questi dati statisticamente o possono costruire una funzione analitica per lavorare al problema in astratto, considerando il tempo di attesa prima che un'automobile cominci a muoversi, e quanto tempo passa prima che un'automobile raggiunga la velocità regolare di traffico, e così via. Questo tipo di analisi ci permette una simulazione del flusso di traffico, che può essere usata per stabilire quanto tempo deve stare accesa la luce verde di un semaforo.

Gli strumenti tecnologici permettono agli studenti di esplorare modelli iterativi di situazioni che un tempo venivano studiate in corsi più avanzati. Ad esempio oggi è possibile per studenti dei livelli 9-12, creare modelli di relazione preda-predatore. La situazione di

partenza potrebbe essere che in un particolare habitat ci sono tanti lupi quanti conigli, che sono la fonte principale di cibo per i lupi. Quando i lupi sono ben nutriti si riproducono bene (e più lupi mangiano più conigli); quando i lupi soffrono la fame muoiono. I conigli si riproducono facilmente quando i lupi scarseggiano, ma, diminuiscono rapidamente di numero, quando la popolazione dei lupi è grande. Un software per il modello, che usi le equazioni alle differenze finite, permette agli studenti di immettere i dati iniziali e le regole di variazione, e quindi di osservare cosa accade al sistema in maniera dinamica.

La realizzazione di modelli è un'impresa complessa. Nella Figura 3.8 viene dato un diagramma molto semplificato del processo.

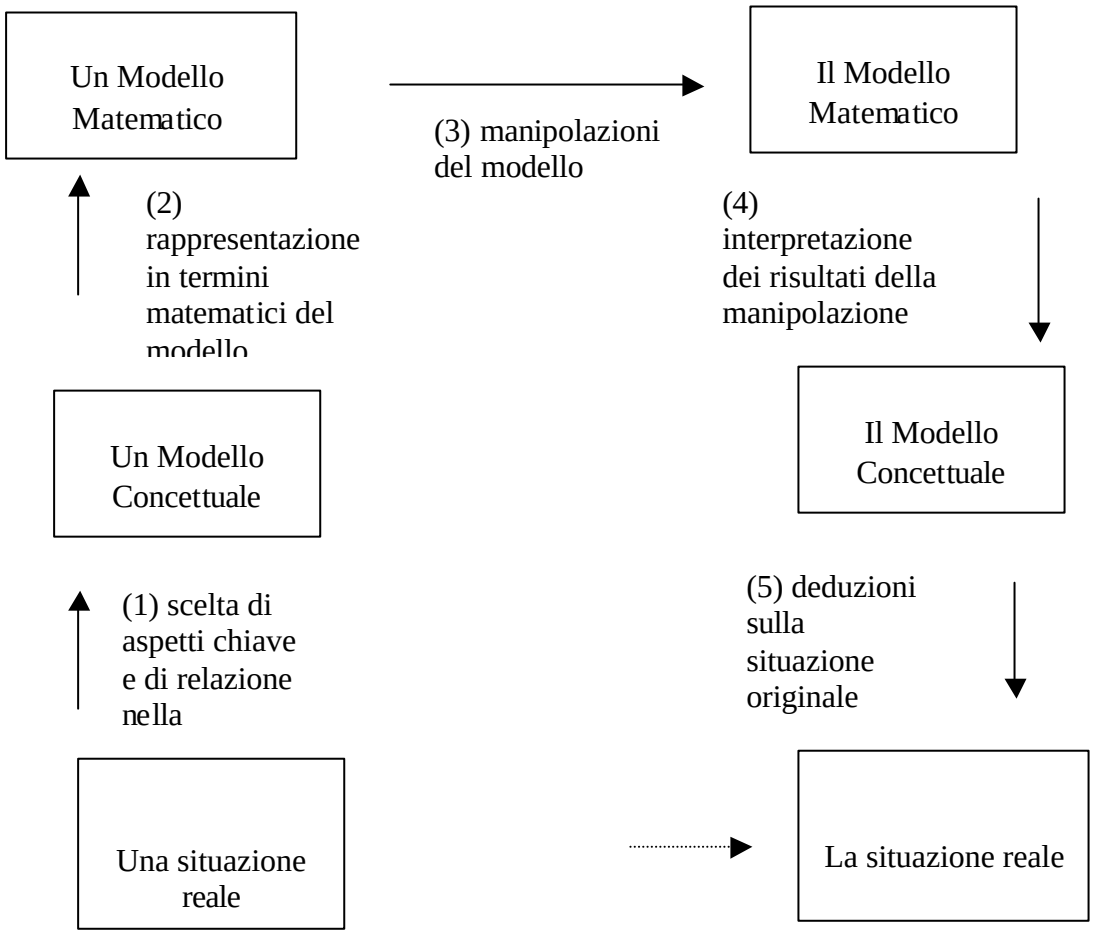


Figura 3.8 Aspetti del processo di modellizzazione.

Un “giro” attorno alla figura 3.8 dal basso verso l'alto a sinistra (dove è rappresentato il processo di creazione di un modello), e dall'alto a destra (che rappresenta l'analisi matematica) in basso a destra (che rappresenta l'interpretazione dei risultati) suggerisce il percorso attraverso il quale sono delineate le conclusioni relative alla situazione rappresentata. Ciascuno degli esempi precedentemente descritti, funziona nel modo qui suggerito. Si noti, tuttavia, che ogni fase del processo è potenzialmente problematica. Gli aspetti scelti per l'analisi sono quelli giusti? il modello matematico esprime la corretta relazione tra essi? le manipolazioni all'interno del modello sono giustificate ed appropriate? l'interpretazione è significativa? ha senso quando si ritorna alla situazione originale? Tutte queste considerazioni devono essere tenute presenti quando gli studenti s'impegnano nel processo di creazione di un modello.

Riassumendo, le rappresentazioni sono un veicolo per il pensiero matematico. Gli individui spesso costruiscono rappresentazioni personali non convenzionali come una via per comprendere i concetti e le relazioni. La società presenta il prodotto della propria scienza collettiva attraverso rappresentazioni matematiche convenzionali, e ciò ha grandi potenzialità per la risoluzione di problemi e per la comunicazione. Uno dei nostri maggiori obiettivi è di portare in classe queste due cose insieme e di procurare agli studenti un accesso efficace a questi potenti strumenti.

Conclusione

I capitoli dal 4 al 7 di questa bozza affrontano in dettaglio le idee introdotte in questo capitolo. Benché i dieci standard siano stati scelti nel tentativo di mostrare come dovrebbero maturare, assieme all'apprendimento, le idee matematiche degli studenti nel corso dei livelli pre-K-12, questo sguardo d'insieme è, al più, una descrizione sommaria degli obiettivi che professori e studenti potrebbero sperare di raggiungere. Nei capitoli che seguono si ha una descrizione più dettagliata per ogni livello.

Poiché gli standard sono stati espressi in maniera generale perché siano validi in tutti i livelli, e poiché i vari livelli sono divisi in quattro fasce, le varie sottosezioni in cui vengono elaborati i contenuti centrali di ogni standard contengono molti dettagli e indicazioni per gli insegnanti. Per gli standard di contenuto l'attenzione è largamente rivolta alla descrizione di ciò che lo studente dovrebbe sapere e di ciò che dovrebbe saper fare. Per gli standard di percorso l'elaborazione viene realizzata per mezzo di domande. Naturalmente non è possibile descrivere completamente cosa dovrebbe accadere per tutti gli studenti e per tutti i livelli, ma lo scopo delle discussioni per fasce di livelli è che, insegnanti e altri, abbiano la possibilità, nei limiti consentiti, di usare queste idee, con cautela e in collaborazione, nei propri programmi scolastici.

#4 Reazione del lettore

In questa bozza sono stati usati esempi, compiti, questioni e problemi tratti dal dialogo con gli studenti.

- **Quali ti sembrano più utili? Vuoi suggerirne altri che potrebbero essere utili in qualche punto?**
- **Vorresti più esempi? Di che tipo?**

#5 Reazione del lettore

I prossimi quattro capitoli trattano gli standard per ogni fascia di grado.

- **I messaggi relativi alle varie fasce sono coerenti? Dove si trovano incoerenze o contraddizioni?**
- **Che cosa pensi del tono e dello stile di questi capitoli?**