

Capitolo 2

Principi guida per i programmi di matematica

L'apprendimento della matematica è un argomento di centrale importanza per la nostra società. Le esperienze matematiche nella scuola mettono in grado gli studenti di diventare cittadini con una cultura matematica. Quanta ne imparano, e come la imparano, dipende in gran parte dalle dimensioni e dalla qualità dei programmi di matematica. Le opportunità offerte agli studenti delimitano quanta matematica e di che tipo può essere imparata. I materiali didattici usati dagli insegnanti, la misura in cui insegnanti, genitori, amministratori riescono ad accogliere e indirizzare le aspettative dei loro studenti, e anche i requisiti stabiliti da stati, province, o distretti per il conseguimento del diploma hanno un grande impatto sul modo in cui gli studenti imparano. Quando gli studenti sono sollecitati in modo appropriato, rispondono.

Le decisioni prese dagli insegnanti, dagli amministratori e dalle autorità scolastiche sui contenuti e sul carattere dell'istruzione matematica hanno importanti conseguenze per gli studenti. Quegli studenti che hanno diverse opportunità di studiare, con buoni insegnanti, matematica significativa raggiungono probabilmente una maggiore competenza matematica – e conseguenti vantaggi nella scuola e nel lavoro – rispetto a studenti che hanno poche di queste occasioni. Molto può essere fatto per aumentare la probabilità che le opportunità d'apprendimento diventino risultati dell'apprendimento. L'apprendimento degli studenti può essere rafforzato se l'insegnamento enfatizza regolarmente l'impegno assegnando compiti cognitivamente esigenti (Stein e Lane 1996); se gli insegnanti utilizzano abitualmente le possibilità computazionali, grafiche, o simboliche degli strumenti tecnologici per sviluppare idee matematiche (Carpenter 1998; Heid 1988; Hiebert e Wearne 1996) e se gli insegnanti sono supportati dallo sviluppo di programmi professionali che aggiornano e migliorano la loro conoscenza dei contenuti matematici, della pedagogia e dell'apprendimento negli studenti (Campbell 1995; Cohen e Hill 1997; Fennema, et al. 1996).

Principi dei programmi di matematica

I seguenti principi descrivono le regole base dei programmi di matematica di alta qualità. Offrono a chi si occupa professionalmente di istruzione una guida per prendere decisioni che influenzeranno le opportunità di apprendimento degli studenti. I principi sono validi a più livelli del sistema di istruzione e così incoraggiano e sostengono un suo cambiamento. I principi esprimono anche le prospettive e le assunzioni che sono alla base dei dieci standard discussi nel capitolo 3.

Principio di uguaglianza: i programmi di matematica devono promuovere l'apprendimento della matematica di *tutti* gli studenti.

Principio del curriculum di matematica: i programmi di matematica devono mettere in risalto una matematica importante e significativa attraverso curricula che siano coerenti e completi.

Principio dell'insegnamento: i programmi di matematica dipendono dalla competenza e dalla sollecitudine dei docenti che insegnano a tutti gli studenti a capire e usare la matematica.

Principio dell'apprendimento: i programmi di matematica devono mettere in grado tutti gli studenti di capire e usare la matematica.

Principio della valutazione: i programmi di matematica devono includere l'accertamento per monitorare, migliorare e valutare l'apprendimento matematico di tutti gli studenti e fornire informazioni sul processo di insegnamento.

Principio della tecnologia: i programmi di matematica devono usare la tecnologia per aiutare tutti gli studenti a capire la matematica e devono prepararli ad usare la matematica in un mondo sempre più tecnologico.

Assieme, i principi e gli standard presentati in questa bozza di documento possono essere utili per identificare le direzioni da seguire e suggerire correzioni ai corsi per educatori in modo che essi progrediscano nel cammino del costante, graduale miglioramento dell'istruzione matematica.

#2

Reazione del lettore

Nella lettura delle prossime sezioni, si prega di considerare le seguenti domande:

- **Qual è la tua reazione a questi principi nel loro insieme? Ne avresti cancellato qualcuno? Ne avresti scelti altri?**
- **Ogni principio descrive chiaramente i principi base e le assunzioni per i programmi all'interno di quest'area? Dove occorre che siano più dettagliati o più chiari?**
- **Hai domande o motivi di disaccordo con le idee qui discusse?**

Il principio di uguaglianza

I programmi di matematica devono promuovere l'apprendimento della matematica di tutti gli studenti.

L'impegno per l'uguaglianza è stato una delle caratteristiche dei precedenti *Standards* NCTM, e la sua importanza è riaffermata qui. Uno dei più notevoli aspetti del documento del 1989, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, del NCTM, era l'insistenza sul fatto che i programmi di matematica rivolgano l'apprendimento della matematica a *tutti* gli studenti.

L'enfasi su la *matematica per tutti* è importante a causa del ruolo che, nella scuola, la matematica ha storicamente giocato nella disuguaglianza scolastica. La competenza matematica degli studenti è spesso usata come base per decisioni riguardanti l'istruzione successiva e per le opportunità di lavoro. Inoltre, la matematica è stata una delle discipline scolastiche frequentemente associata con il "tracking", una pratica in cui gli studenti sono suddivisi in differenti fasce di istruzione che spesso si risolvono in opportunità di istruzione inique e in esiti ingiusti per gli studenti.

L'enfasi sulla *matematica per tutti* è anche importante perché essa sfida una credenza diffusa nella società secondo cui un gran numero di studenti non sono in grado di acquisire una competenza matematica. Questa credenza è abbastanza differente dall'uguale opinione che tutti gli studenti possono imparare a leggere e scrivere in inglese. Il saper leggere e scrivere viene richiesto a tutti gli studenti, e i programmi che non producono questo vengono visti come fallimentari. E' sorprendente che un insieme di credenze opposto sia stato tradizionalmente mantenuto riguardo alla conoscenza e alla competenza matematica. Dal sistema di istruzione ci si aspetta che questo avvenga solo per chi è "matematicamente capace".

Sottolineare la necessità di programmi matematici di alta qualità, è affermato esplicitamente dal documento *Professional Teaching Standards for School Mathematics* come una delle assunzioni portanti perché tutti gli studenti possono imparare a pensare matematicamente (NCTM 1991, p. 21). Per *tutti* gli studenti, gli autori intendono:

- gli studenti che siano stati privati in qualche modo delle opportunità educative allo stesso modo di quelli che non lo sono stati;
- gli studenti afro-americani, ispanici, indiani americani, e altre minoranze allo stesso modo di quelli che fanno parte della maggioranza;
- le studentesse allo stesso modo degli studenti maschi;
- gli studenti che non hanno avuto successo a scuola nello stesso modo di quelli che hanno avuto successo a scuola e in particolare in matematica. (ibid., pp. 21-22).

L'importanza dell'uguaglianza è stata anche sottolineata negli *Assessment Standards for School Mathematics* (NCTM 1995). Uno dei sei standard di valutazione era quello di uguaglianza: "la valutazione deve promuovere l'uguaglianza" (p.15).

Impegnarsi per l'uguaglianza e per l'eccellenza

In una società democratica, l'impegno per l'uguaglianza deve essere di importanza centrale nell'educazione matematica. Tradizionalmente, la matematica a scuola è stata vista come una macchina selezionatrice, in cui molti studenti sono stati considerati inadatti a studiare la matematica più avanzata e in cui pochi studenti sono stati identificati come capaci di riuscire nella disciplina matematica o in campi di studio collegati con la matematica. Per una società in cui le necessità matematiche della maggior parte dei cittadini sono abbastanza basse, questa forma di educazione matematica può essere adeguata, anche se non giusta. Negli ultimi decenni, sempre più cittadini - la maggior parte dei quali non sono considerati "portati per la matematica" - hanno bisogno di comprendere e rispondere con competenza ad un'informazione quantitativa. Si consideri la nostra cultura attuale, in cui le banche sono diventate sempre più "self-service" con bancomat e servizi di banca on-line. Informazioni commerciali e pubblicità disponibili ovunque offrono informazioni sulla sicurezza dei prodotti e sulla loro efficacia. Opportunità di lavoro in campi come la sanità, l'industria dell'auto, il giornalismo e la moda richiedono una conoscenza sofisticata della matematica. Di conseguenza una educazione matematica basata su "selezione e abbandono" è inadeguata.

Una concezione alternativa sui programmi assume che l'obiettivo primario è assicurare che tutti i cittadini siano capaci di fare calcoli. Ovvero, tutti gli studenti devono diventare disinvolti e flessibili nel trattare l'informazione di tipo quantitativo. Questa visione va ben oltre il calcolo aritmetico e la risoluzione di equazioni algebriche, che sono spesso pensati come la caratteristica della educazione matematica per tutti gli studenti. Inoltre, un impegno per l'uguaglianza dovrebbe supportare un altro obiettivo centrale dell'educazione matematica: l'eccellenza. Raggiungere questi due obiettivi interdipendenti è un compito complesso. L'uguaglianza sarà raggiunta quando esisteranno eccellenti programmi di matematica per ogni studente in ogni scuola.

I programmi devono far crescere le abilità matematiche e le conoscenze quantitative sia negli studenti eccezionalmente dotati che in quelli che saranno cittadini produttivi, e impegnati nell'uso pratico della matematica. Se i programmi perseguono bene i loro obiettivi, non ci sarà scarsità di studenti ben preparati per conseguire un'ulteriore educazione in matematica, scienza, e ingegneria, e tutti i cittadini avranno un'adeguata abilità matematica.

Aver fiducia e fare

È fondamentale adottare la convinzione che tutti gli studenti possono apprendere la matematica. Ma non basteranno le buone intenzioni per realizzare programmi equi di istruzione matematica. Come detto sopra, un impedimento è rappresentato dall'opinione largamente diffusa che solo alcuni studenti possono avere successo in matematica. Le basse aspettative sono particolarmente problematiche perché esse non sono distribuite casualmente sull'intera popolazione. Le donne, gli studenti che vivono in povertà, quelli che non hanno l'inglese come madrelingua, e molti studenti non-bianchi sono stati tradizionalmente, e con molto maggiore probabilità rispetto al loro complemento demografico, vittime delle basse aspettative.

Le basse aspettative possono manifestarsi contemporaneamente in modi ovvii e sottili nelle scuole elementari - nelle modalità di istruzione e di interazione in classe, nel modo di

raggruppare gli studenti, e nei differenti compiti assegnati. Nelle scuole secondarie, le basse aspettative sono trasmesse sia in questi modi sia nell'iscrizione degli studenti a corsi di basso livello con obiettivi e riconoscimenti minimi sia nel consigliare questi studenti di star fuori dai corsi facoltativi più richiesti e di non avere obiettivi di carriera. E' essenziale che le aspettative siano elevate per tutti gli studenti, specialmente per studenti di gruppi demografici che nel passato sono stati svantaggiati nell'educazione matematica.

La disuguaglianza è pervasiva, ma può essere corretta dai programmi. Si consideri il caso della uguaglianza tra i sessi, che è stata un problema nella educazione matematica almeno per alcune decine di anni. Negli anni Sessanta e Settanta, numerosi studi e rapporti hanno evidenziato un sostanziale dislivello tra maschi e femmine riguardo alla partecipazione e ai risultati in matematica. Nell'ultimo ventennio, sono stati fatti grandi progressi per sanare questa situazione (Fennema e Leder 1990; Leder 1992). Sebbene tale ineguaglianza possa esistere ancora in qualche scuola e in qualche classe di matematica, è chiaro che il "dislivello tra i sessi" è stato sostanzialmente ridotto. Per esempio, maschi e femmine ora si iscrivono ai corsi preparatori di matematica e a quelli opzionali e avanzati della scuola secondaria, pressappoco in numero uguale, e i loro risultati in matematica sono per molti versi quasi simili. Risultati simili sono stati rilevati anche nelle scuole elementari e medie, per la maggior parte delle acquisizioni matematiche.

Il miglioramento nella matematica scolastica rispetto al problema dell'uguaglianza tra i sessi è il risultato di una combinazione di alte aspettative da parte di molte persone - insegnanti, educatori, persone che si occupano dello sviluppo del curriculum e di sussidi per l'istruzione, organizzatori di programmi speciali, amministratori della scuola, ricercatori, genitori, e membri delle comunità - e il consistente e sostenuto sforzo per un lungo periodo di tempo per eliminare le origini e i sintomi dell'ineguaglianza. Saranno ancora necessari sforzi continuativi, ma è già stato fatto un sostanziale progresso. Ora è necessario un aumento delle aspettative, accompagnato da uno sforzo robusto e concentrato, per eliminare le disuguaglianze associate a fattori quali l'origine etnica e la povertà.

Le scuole situate nelle zone di medio e alto reddito sono tipicamente in grado di attrarre di più gli insegnanti qualificati rispetto alle scuole situate in comunità a basso reddito, e gli insegnanti di comunità più ricche hanno maggior accesso a una varietà di materiali educativi e di opportunità di sviluppo professionale. Insegnanti e studenti di comunità a medio o alto reddito spesso hanno accesso immediato a modelli sociali che possono dimostrare il valore della scuola in generale e della formazione matematica in particolare. Gli studenti di queste comunità spesso hanno facile accesso anche a casa a materiale di supporto, come calcolatrici, computer e libri. Alcune ricerche suggeriscono che i modelli culturali delle famiglie a medio e alto reddito tendono a essere più allineati con le aspettative della scuola di quanto siano tipicamente quelli di studenti e genitori di comunità a basso reddito (Oakes 1990; Secada 1992; Singham 1998). Tutti gli studenti, inclusi quelli provenienti da comunità povere, portano, dall'esterno della scuola, situazioni che dovrebbero essere rilevate ed espresse. Per esempio, molti studenti che risiedono in comunità povere e la cui lingua madre non è l'inglese forniscono le prove di verifica a scuola solo in inglese. Questa pratica comporta che le valutazioni scolastiche spesso sottostimano l'abilità matematica per allievi che non hanno come lingua madre l'inglese. Come era vero per l'ineguaglianza dovuta al sesso, molte di queste fonti di ineguaglianza sono fuori dal controllo della scuola. Ma c'è molto che può essere fatto dagli insegnanti e dagli altri educatori.

Esistono esempi basati su ricerche che dimostrano la validità della convinzione che tutti i ragazzi (inclusi quelli che tradizionalmente ne sono stati privati) possono apprendere la matematica quando hanno accesso a programmi di istruzione matematica di qualità (Campbell 1995; Griffin, Case, e Siegler 1994; Knapp et al. 1995; Silver e Stein 1996; Silver 1998). Sono necessarie azioni per rendere questi esempi la norma piuttosto che l'eccezione nell'educazione matematica scolastica. I dati disaggregati per provenienza etnica, lingua, sesso, o classi sociali possono essere veramente utili per analizzare gli effetti delle politiche del distretto e della scuola e la pratica in classe degli insegnanti e per sviluppare piani atti a risolvere il problema. A livello di scuola secondaria, per esempio, tali analisi potrebbero aiutare a individuare situazioni di corsi differenziati da offrire alle scuole; iscrizioni differenziate a corsi opzionali all'interno di una scuola, o risultati differenziati all'interno di classi, distretti, stati o province. Stati, province, distretti scolastici, scuole, e insegnanti dovrebbero tutti esaminare le disuguaglianze potenziali associate ai programmi di matematica e agire su di essi.

Mantenere alte le aspettative e fornire un forte sostegno

Da sole le alte aspettative non sono sufficienti a raggiungere l'obiettivo di una educazione matematica equa per tutti gli studenti. Assieme alle alte aspettative, molti studenti hanno bisogno di un maggiore supporto nella loro istruzione matematica. Tutti gli studenti hanno bisogno di accedere a un curriculum di matematica coerente e stimolante che sia pensato ogni anno da un insegnante competente e ben supportato. Inoltre, l'apprendimento e i risultati degli studenti devono essere valutati e descritti in modo da presentare un buon numero di aspetti e di prestazioni matematiche. I suggerimenti che sono dati nei seguenti principi riguardo al curriculum matematico, all'insegnamento, all'apprendimento, alla valutazione, e alla tecnologia sono applicabili a tutti gli studenti.

In relazione al raggiungimento dell'eguaglianza educativa, è fondamentale che gli studenti bisognosi di assistenza nell'apprendimento abbiano accesso a un programma d'istruzione eccellente, che fornisca un solido sostegno per il loro apprendimento, adatto alle loro conoscenze precedenti, alle loro possibilità e ai loro interessi personali. Gli studenti che sono stati trascurati dai tradizionali programmi necessitano di questo e altro. I programmi che s'indirizzano contemporaneamente alle sfide e alle situazioni che gli studenti portano con sé in classe sono destinati più probabilmente ad avere successo. In aggiunta a un eccellente insegnamento, alcuni studenti hanno anche bisogno di assistenza aggiuntiva per il loro lavoro matematico, come il tutoring tra allievi della stessa età o di età diverse e programmi di doposcuola. Altri potrebbero avere bisogno di un supporto sociale, come per esempio modelli che dimostrino le possibilità di successo. Studenti che arrivano a scuola parlando una lingua diversa dall'inglese, potrebbero necessitare di attenzione speciale per assicurare che possano partecipare pienamente alle lezioni nelle quali il discorso matematico è centrale. Tutti gli studenti dovrebbero essere capaci di usare la loro lingua per sviluppare idee matematiche così come sviluppano la loro competenza in inglese.

La tecnologia può essere di aiuto nel raggiungere l'uguaglianza. Per esempio, la tecnologia fornisce accesso a strumenti hardware e software e ad ambienti che danno l'opportunità di esplorare problemi complessi e nuove idee matematiche, fornire materiali strutturati di aiuto agli studenti che necessitano di ulteriore rinforzo ed esercizio pratico, o collegare studenti di comunità rurali a opportunità d'istruzione e risorse intellettuali non immediatamente disponibili nei loro luoghi. Le più interessanti idee nuove che sono suggerite

dallo sviluppo della tecnologia devono essere parte dei programmi. Inoltre, è cruciale che tutti gli studenti abbiano l'opportunità di usare la tecnologia in modo appropriato nelle classi di matematica. L'accesso alla tecnologia non deve trasformarsi in un altro aspetto dell'ineguaglianza associata alla matematica.

Il principio del curriculum matematico

I programmi di matematica dovrebbero enfatizzare argomenti importanti e significativi attraverso curricula coerenti e completi.

Le opportunità fornite agli studenti per imparare la matematica determinano i limiti di quello che possono effettivamente imparare. Il curriculum matematico come realizzato a molti livelli - nei piani delle lezioni degli insegnanti, nei programmi di istruzione annuale, nelle linee guida dei curricula delle scuole e dei distretti, negli standard e negli schemi degli stati e delle province – fornisce le basi sulle quali gli insegnanti prendono decisioni sugli argomenti da trasmettere, su quale enfasi dare, quali strategie impiegare, e quale pratica di accertamento è più appropriata. I curricula hanno una profonda influenza su quello che gli studenti conosceranno e saranno in grado di fare in matematica.

Studi come “*Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*” (Schmidt et al. 1996) sottolineano il fatto che i curricula negli USA tendono a includere per un dato anno molti più argomenti che non i curricula di altri paesi. Inoltre, anche se ogni anno in altri paesi vengono svolti pochi argomenti, lo studio rivela che alla conclusione della scuola secondaria sono stati svolti almeno gli stessi argomenti e con maggiore profondità che negli Stati Uniti. Questi risultati dimostrano che le decisioni circa quali argomenti includere, quando introdurli, e con quale approfondimento, hanno un forte impatto sul successo dei programmi di istruzione.

Quelli che prendono decisioni sul curriculum matematico a tutti i livelli devono cimentarsi con una quantità di aspetti complessi e di sfide. La matematica inclusa nei programmi dovrebbe essere, per usare le parole del documento originale degli *Standards*, valida, significativa e importante. Le aree, dei contenuti matematici e dei processi selezionati, devono essere organizzate in curricula coerenti ed esaurienti che incoraggino lo sviluppo matematico nel corso del tempo. Gli insegnanti e i responsabili delle decisioni devono migliorare la comprensione e l'orientamento per esaminare e giudicare i curricula, specialmente quegli aspetti come l'importanza della matematica, la coerenza e la completezza del progetto, e la potenzialità di attivare la comprensione delle idee matematiche per tutti gli studenti.

Come nei precedenti *Standards* il termine “curriculum” comprende più dimensioni: ciò che gli studenti devono conoscere, come gli studenti raggiungono gli obiettivi, cosa devono fare gli insegnanti per dare aiuto agli studenti a sviluppare la loro conoscenza, e in quale contesto si svolgono l'insegnamento e l'apprendimento (NCTM 1989). Il Principio del curriculum matematico si concentra solo sugli elementi *matematici* del curriculum. Le questioni di insegnamento e valutazione sono riprese nei principi discussi più avanti in questo capitolo.

Scegliere la matematica più importante

Nel considerare gli obiettivi di una lezione, gli argomenti di un libro di testo, o gli obiettivi di un progetto, sono rilevanti alcuni criteri. I criteri coinvolgono più dimensioni: il posto dell'argomento all'interno della matematica stessa; il ruolo dell'argomento fuori della matematica; e il rilievo dell'argomento per chi sta apprendendo.

I contenuti e i processi matematici sono importanti nei programmi di matematica se sono fondamentali per uno studio più approfondito. Concetti come valore di posizione, funzione, scala, similitudine, struttura nel sistema numerico, e tasso di variazione si qualificano come fondamentali, in quanto sono essenziali per comprendere una varietà di aree della matematica. Procedure come risolvere equazioni o fare il grafico di funzioni sono fondamentali per la stessa ragione. Processi matematici come produrre validi ragionamenti e sapere come e quando usare la tecnologia sono fondamentali. I fatti basilari frequentemente usati e le definizioni sono fondamentali nell'aiuto che danno alla risoluzione di problemi e alla comunicazione matematica. Queste rappresentano le aree che sono la base di partenza per contenuti più profondi ed estesi.

I processi e i contenuti matematici sono importanti per i programmi se sono utili anche per sviluppare idee matematiche nuove, collegare aree della matematica, o formulare e risolvere problemi all'interno o all'esterno della matematica. Nella società di oggi, ai cittadini viene richiesto un livello di abilità matematiche più alto di quanto non sia avvenuto in passato, compresa la capacità di formulare ipotesi, individuare errori, valutare rischi e soppesare prove. Argomenti matematici rilevanti come la ricorsione, l'iterazione, e il confronto tra algoritmi diventano possibili e rilevanti nel curriculum scolastico per la loro utilità in un mondo tecnologico. Le abilità di ragionamento e di pensiero matematico che possono essere applicate in una serie di situazioni fuori della scuola sono utili, nello stesso modo in cui lo sono i fatti elementari e le abilità di calcolo necessarie per fare calcoli mentali e stime che tutti i cittadini incontrano.

I contenuti e i processi matematici sono importanti se costruiscono produttivamente sulla conoscenza e sull'esperienza precedente degli studenti, se impegnano il loro interesse, e se sono significativi. Un compito pedagogico stimolante per gli insegnanti è trovare modi per connettere le nuove idee matematiche con le intelligenze e le esperienze che gli studenti portano in classe. Scegliere contesti di problemi che possono essere tipici di ciò che gli studenti trovano nei loro mondi, comunque, è solo un modo di impegnare effettivamente gli studenti. L'impegno può anche avere origine da contesti che sono puramente matematici, sia proposti dall'insegnante sia generati da domande e curiosità degli studenti.

Valutazioni sulla qualità del curriculum sono necessarie non solo quando le scuole o i distretti selezionano i materiali, ma anche quando i docenti nelle classi programmano per un anno, una unità didattica, o una lezione. Per questo processo di programmazione sono centrali le scelte sui contenuti matematici. Il documento *Professional Teaching Standards* del NCTM (1991) fornisce una guida agli insegnanti per la selezione, l'adattamento, e la produzione di compiti matematici, proponendo che i docenti considerino gli argomenti, gli studenti, e i modi in cui questi imparano.

Un programma di matematica è *coerente* quando la matematica contenuta in esso è ben scelta, organizzata e integrata efficacemente. La coerenza sarà visibile nei passaggi fatti

muovendosi verso nuovi argomenti, nei modi in cui i precedenti argomenti sono usati per i nuovi argomenti, e nella consistenza dello stile e dell'approccio.

Molti adulti che ricordano le loro esperienze scolastiche di matematica come poco soddisfacenti vedono la matematica come un insieme di fatti e di procedure sconnesse. Questi adulti spesso osservano che una volta che il peso di ricordare questi fatti e procedure è diventato troppo grande, il loro rendimento è diminuito, senza più possibilità di recupero. Al contrario, i matematici vedono la loro materia contemporaneamente come interconnessa e cumulativa. Purtroppo, la loro immagine della matematica come una disciplina che si costruisce e cresce attraverso l'interconnessione delle idee non è sempre immediatamente visibile nei libri di testo o nelle lezioni in classe. E' importante che gli studenti vedano le interconnessioni delle idee nella materia matematica attraverso le loro esperienze di matematica nella scuola.

La coerenza è importante ad ogni livello del curriculum, compresa la lezione individuale in classe. Un'importante caratteristica studiata dai ricercatori analizzando le lezioni nello studio TIMSS tramite videoregistrazioni delle lezioni di matematica (Stigler e Hiebert 1997) ha a che fare con la coerenza interna della matematica contenuta nella lezione. I ricercatori hanno trovato che le lezioni in Giappone sono progettate tipicamente attorno a una sola idea centrale, che viene accuratamente sviluppata ed estesa. Al contrario, le tipiche lezioni negli USA includono più idee o argomenti che non sono strettamente in relazione tra loro e non sono ben sviluppati. Con un curriculum coerente gli studenti acquisiranno e utilizzeranno meglio la conoscenza matematica.

Il curriculum matematico dovrebbe includere argomenti e processi che si integrino in un insieme *completo* di obiettivi e attività di istruzione. L'insieme di standard matematici proposti in questo documento è costruito per essere completo, nel senso che questi standard dovrebbero costituire il curriculum base per tutti gli studenti.

Un curriculum completo dovrebbe conseguire un appropriato equilibrio tra conoscenze concettuali e competenze procedurali in aree importanti. La ricerca fornisce qualche indicazione sul modo di raggiungere questo equilibrio. Per esempio, il "problem solving" può essere usato efficacemente come un contesto in cui gli studenti imparano nuovi concetti e abilità (Hiebert 1998), e la comprensione concettuale può precedere lo sviluppo delle abilità in un ambiente tecnologico (Heid 1988; Palminter 1991). Un eccessivo esercizio sulle procedure prima della comprensione può aumentare la difficoltà di dare significato alle procedure successive (Hiebert 1998).

Un altro aspetto di un curriculum completo riguarda quanto questo offre agli studenti le opportunità di apprendere la natura e la pratica della matematica. Gli studenti hanno bisogno di vedere che la matematica è una impresa umana che, sebbene spesso astratta, è molto potente nello spiegare e predire fenomeni del mondo reale; e che è basata su un rigoroso sistema di definizioni, assiomi e teoremi. Gli studenti inoltre arrivano a comprendere attraverso l'esperienza che il ragionare richiede parecchio tempo e parecchi tentativi con argomentazioni che falliscono prima di trovarne una che funzioni.

Il curriculum dovrebbe essere progettato per procurare sistematicamente agli studenti esperienze che diventino progressivamente più approfondite e vaste. Quando i contenuti matematici e i processi ritornano attraverso le varie classi, di essi si dovrebbe fare un'esperienza a livelli sempre più approfonditi. Per esempio, a studenti del secondo livello

possono essere introdotti gli istogrammi contando caramelle per colore e rappresentando il risultato. In una classe più avanti, se la stessa attività di contare per colore è ancora usata, gli insegnanti devono avere una chiara idea su quanto più approfondita sperano che sia la comprensione che sarà raggiunta dagli studenti, piuttosto che ripetere la costruzione dell'istogramma.

I problemi posti e i concetti esaminati all'interno di ogni area matematica dovrebbero diventare più sofisticati col passare degli anni del curriculum finché sia raggiunto un opportuno livello di comprensione e competenza. A questo punto, sebbene l'istruzione formale nella specifica area dell'argomento finisca, gli studenti dovrebbero continuare a usare i concetti e le abilità che hanno acquisito, mantenendo ed esercitando entrambi. Per esempio, gli studenti dovrebbero comprendere e usare con facilità il calcolo con i numeri interi alla fine del quinto livello. Questa competenza costituisce il fondamento con il quale gli studenti lavoreranno con altri insiemi numerici e faranno calcoli in algebra, così che il calcolo aritmetico recede dalla sua posizione preminente nel programma.

Il principio dell'insegnamento

I programmi di matematica dipendono dalla competenza e dalla sollecitudine degli insegnanti che insegnano a tutti gli studenti a comprendere e usare la matematica

Più d'ogni altro fattore, gli insegnanti influenzano quale matematica gli studenti imparano e come la imparano. La conoscenza matematica degli studenti, le loro abilità di ragionare e di risolvere problemi, e la loro sicurezza nei confronti della matematica sono tutte modellate dalle decisioni matematiche e pedagogiche degli insegnanti. Il principio dell'insegnamento mette in evidenza le molte responsabilità di un insegnante nel trasformare la lezione di matematica in un luogo per pensare e imparare. Tale insegnamento può essere svolto solo da docenti che hanno avuto una forte preparazione e che sviluppano continuamente la propria professionalità.

Il documento *Professional Teaching Standards* (NCTM 1991) descrive i maggiori aspetti del lavoro degli insegnanti: analisi e riflessione su insegnamento e apprendimento, obiettivi matematici fondamentali, ambiente di apprendimento, lezione frontale in classe. Questi aspetti dell'insegnamento sono cruciali per lo sviluppo della conoscenza matematica per tutti gli studenti e sono qui ampliati attraverso la discussione di:

- come l'analisi e la riflessione sull'apprendimento degli studenti, gli obiettivi matematici, e l'ambiente classe dovrebbero essere la base del processo decisionale e della programmazione dei docenti;
- che cosa rende fondamentali gli obiettivi matematici, e come si adattano in un curriculum coerente;
- modi in cui gli ambienti di apprendimento stimolano le disposizioni matematiche e il lavoro in comune;
- come la lezione frontale sostiene l'apprendimento degli argomenti principali

Analisi e riflessione

Un'analisi e una riflessione attente sono essenziali per un insegnamento di successo. Dalle decisioni sugli obiettivi di lungo termine alla programmazione di un'unità o di una lezione alla reazione alle domande degli studenti, gli insegnanti prendono continuamente delle decisioni sugli argomenti e sulla pedagogia. Nel prendere decisioni, gli insegnanti fanno affidamento sulla loro conoscenza della matematica, sulla loro comprensione degli studenti, sulla loro esperienza nel sapere quali tipi di domande e di difficoltà di apprendimento probabilmente hanno, e sugli obiettivi di apprendimento matematico che hanno individuato per i loro studenti. Programmare, insegnare, e valutare dovrebbero essere collegati attraverso una continua analisi degli insegnanti su cosa funziona bene, cosa conoscono riguardo agli studenti, e cosa permette l'apprendimento degli argomenti più importanti. In particolare, gli insegnanti applicano tutto il loro sapere nel contesto della pratica in classe per decidere che cosa fare nel breve e cosa nel lungo periodo (Ball, 1993).

Obiettivi di apprendimento matematico come parte di un curriculum coerente

Per essere sicuri che gli obiettivi matematici si adattino a una lezione, a un'unità didattica, o a un programma annuale coerente e ricco di idee matematiche, occorre che gli insegnanti considerino la relazione tra un obiettivo immediato e gli scopi più ampi. Ci sono molti obiettivi che gli studenti trovano interessanti, ma non ogni obiettivo interessante e motivante si adatterà bene allo scopo di promuovere l'apprendimento di una matematica importante nelle aree identificate in questo documento. Per fare delle valutazioni sugli obiettivi, occorre che gli insegnanti conoscano la matematica ben oltre quella che insegnano.

Determinare ciò che gli studenti comprendono, identificare le loro capacità di intuito, le loro concezioni errate e le loro conoscenze è parte della pratica dell'insegnamento. Le lezioni dovrebbero essere progettate dall'inizio alla fine prevedendo le domande e le reazioni degli studenti. Dato che gli studenti costruiscono nuove conoscenze quando stabiliscono connessioni con le esperienze precedenti, spesso perfezionano e chiarificano le loro conoscenze sulle vecchie idee nel momento in cui ne incontrano di nuove.

Gli obiettivi da scegliere sono quelli che gli studenti possono affrontare a diversi livelli e che stimolano ogni studente in maniera differente. Dei buoni obiettivi alimentano la curiosità degli studenti e li incoraggiano a parlare di matematica, quindi devono essere selezionati all'interno del contesto di un apprendimento matematico educativo. Decidere quali aspetti di un obiettivo sottolineare e quali domande fare in modo da stimolare piuttosto che confondere il pensiero degli studenti, richiede un'accurata preparazione delle lezioni e un'attenzione al loro svolgimento all'interno della classe.

Nel selezionare gli obiettivi, occorre anche che gli insegnanti considerino quali materiali curriculari saranno il miglior supporto agli obiettivi definiti, quali tecnologie miglioreranno l'apprendimento matematico degli studenti, e come organizzare l'istruzione per concentrare gli studenti sulle idee matematiche. Gli insegnanti efficaci usano strategie e approcci che variano dall'ampia utilizzazione dei piccoli gruppi alla lezione frontale. Cambiano strategia a seconda delle necessità degli studenti, e mescolano strategie per permettere a tutti gli studenti di avere esperienze efficaci. Le decisioni su quali strategie di insegnamento usare devono essere basate su ciò che viene insegnato, sulla natura degli obiettivi e sulla preparazione degli studenti.

Ambienti di apprendimento per stimolare le disposizioni matematiche

Un buon clima in classe fornisce un aiuto agli studenti a pensare matematicamente. L'ambiente della classe comunica sottili messaggi su cosa conta nell'apprendere e nel fare matematica. Gli insegnanti hanno la responsabilità primaria di stabilire un'atmosfera in classe che mandi un messaggio chiaro: gli insegnanti credono ogni studente capace di apprendere una matematica importante e sono decisi ad aiutare gli studenti a realizzare questo obiettivo.

Le inclinazioni degli insegnanti aiutano a dare forma alle inclinazioni degli studenti tramite messaggi palesi e impliciti. Insegnanti che mostrano entusiasmo per una matematica stimolante e pongono l'attenzione sul dare senso e competenza matematica incoraggiano probabilmente attitudini e disposizioni simili nei loro studenti. Quando gli studenti vedono gli insegnanti esplorare modi alternativi per affrontare problemi e porre questioni stimolanti alla classe, essi probabilmente sperimenteranno strategie alternative e pongono domande a se stessi e ai loro compagni. Quando gli studenti vedono gli insegnanti riassumere o riflettere sulla matematica che è stata insegnata o fanno notare ciò che è comune a diverse soluzioni degli studenti, inizieranno anche loro a vedere connessioni ed elementi importanti.

Applicando concetti familiari in situazioni diverse o nell'apprendere nuova matematica, all'inizio gli studenti non possono sapere come procedere. Se gli insegnanti scelgono compiti che metteranno in difficoltà gli studenti, allora devono anche rendere loro più agevole l'inizio del cammino di risoluzione del problema sapendo che i loro primi passi potrebbero non essere corretti. Quando le prime congetture si dimostrano sbagliate, gli studenti devono sapere che gli insegnanti si aspettano da loro che investano tempo ed energia nel continuare a lavorare sul problema e che li aiuteranno in questi sforzi. Determinare quale aiuto dare agli studenti è tra le più importanti decisioni prese dagli insegnanti, perché c'è un delicato equilibrio nel promuovere l'autonomia, permettendo agli studenti di mettersi alla prova quando potrebbero essere impegnati in direzioni non produttive, e dare una specifica guida.

Gli insegnanti devono considerare gli obiettivi sia per la classe nel suo insieme che per i singoli studenti. Tutte le classi hanno probabilmente studenti con esperienze, interessi e disposizioni di base differenti, e bisogna farli convivere. Aiutare tutti gli studenti a impegnarsi produttivamente in un compito matematico spesso richiede un'individualizzazione del compito, sia in termini del compito stesso sia dei livelli di comprensione e abilità coinvolti. Usando una varietà di strategie di verifica – inclusi questionari, conversazioni, e lavori scritti – gli insegnanti possono acquisire informazioni sul pensiero e il ragionamento degli studenti e possono fare conto su ciò che gli studenti già conoscono nel costruire un ambiente di apprendimento produttivo per tutti.

La conversazione per sostenere l'apprendimento

Negli ultimi dieci anni, gli insegnanti hanno fatto sforzi per mettere momenti di conversazione nella loro pratica, e hanno scoperto le sfide matematiche e pedagogiche in questo tipo d'insegnamento. Gli studenti possono essere impegnati attivamente in vivaci conversazioni in classe, che diventano superficiali e povere, se gli insegnanti non sono in grado di prendere decisioni sicure su come progettare e organizzare l'attività degli studenti.

Esattamente come le attività manipolative, calcolatrici e computer possono aiutare gli studenti ad aumentare il loro apprendimento, ma da soli possono anche non condurre all'apprendimento, così come studenti che parlano e scrivono di matematica non arrivano automaticamente a un apprendimento migliore. Capire come indirizzare la discussione e come trovare il giusto equilibrio tra parlare, guidare, chiedere e fare delle sintesi è un'abilità importante di un insegnante che sta costruendo un lavoro collettivo in classe. Saper riconoscere la capacità dell'intera classe di muovere dall'idea di un singolo e giudicare i vantaggi di una digressione imprevista, è utile per poter organizzare una buona conversazione.

In conclusione, insegnare matematica bene e creare classi dove è centrale pensare matematicamente è un lavoro difficile ma gratificante. Schemi di curricoli, guide, materiali per l'insegnante, piani di lezione sono solo i primi elementi necessari per aiutare gli studenti a imparare bene una matematica importante. Gli insegnanti devono equilibrare un insegnamento preparato e organizzato con decisioni prese sul momento che possono guidare l'insegnante e la classe in un territorio inesplorato a partire da una conoscenza base matematica e pedagogica. Gli insegnanti possono fare lezioni che incoraggiano a pensare, ma ciò comporta molto più che obiettivi importanti e l'impegno a favorire la discussione. Comporta notevole capacità di approfondimento della matematica, dell'insegnamento, da parte di chi sta apprendendo, associata con un valido e robusto curriculum matematico, una riflessione e una programmazione attente.

Il principio dell'apprendimento

I programmi di matematica dovrebbero mettere in grado gli studenti di capire e usare la matematica

Questa bozza di *Principi e standard per la matematica scolastica* si basa sulla visione dell'apprendimento come costruzione di senso che era stata presentata nel precedente documento degli *Standards*. Qui, come nel documento originale, l'apprendimento matematico è inestricabilmente legato alla comprensione e all'uso. La nozione della matematica come qualcosa che deve essere profondamente capito, per essere effettivamente usato, non è sempre stato lo scopo riconosciuto dell'insegnamento della matematica. Molti adulti ammettono facilmente di non essere in grado di ricordare molto della matematica che hanno imparato a scuola. Nella loro istruzione scolastica, la matematica è stata presentata soprattutto come una collezione di fatti e di abilità da memorizzare. Il fatto che uno studente fosse in grado di fornire risposte corrette rapidamente dopo aver studiato un argomento, è stato generalmente preso come prova di una buona comprensione. L'abilità degli studenti di fornire risposte corrette non è sempre un indicatore di un alto livello di comprensione concettuale. La comprensione non è qualcosa che uno ha o non ha. Piuttosto, la comprensione individuale di un'idea varia in profondità ed è costantemente in mutamento. La comprensione di idee matematiche dovrebbe svilupparsi e approfondirsi nel corso degli studi.

Costruire sull'esperienza precedente e creare connessioni

La matematica è sviluppata attraverso attività di “problem solving”, ragionamento, rappresentazione, comunicazione, e produzione di connessioni. Da un'età molto bassa, i bambini sono interessati alle idee matematiche e sviluppano un complesso insieme di idee

informali su numeri, forme, dati e grandezze attraverso esperienze della vita di ogni giorno. Così, i bambini imparano molte idee matematiche abbastanza naturalmente perfino prima di entrare nella scuola, e quando da studenti interagiscono con idee e soluzioni di problemi, dovrebbero sviluppare apprendimenti più complessi. La cosa migliore è costruire il nuovo apprendimento sull'apprendimento precedente, che può includere idee sviluppate attraverso lezioni scolastiche, come pure intuizioni informali sviluppate con l'esperienza. Studenti di tutte le età portano in classe una considerevole conoscenza di base sopra la quale costruire.

La letteratura sul pensiero e sull'apprendimento indica che le "reti" di idee e le connessioni tra queste riflettono la struttura dell'organizzazione concettuale; la vecchia conoscenza dà forma al modo in cui quella nuova viene compresa (vedi, ad esempio, Schoenfeld, Smith e Arcavi 1993, Siegler e Klahr 1982). La matematica acquista maggior senso, ed è facile da ricordare e da applicare, quando gli studenti possono trovare delle connessioni con la conoscenza esistente. Può essere utile un'immagine dell'apprendimento secondo la quale ogni discente aggiunge conoscenza sui nodi delle proprie reti in punti diversi, a velocità diverse, e in modi diversi. E, perché diversi studenti portino diverse esperienze e la conoscenza precedente in ogni classe di matematica, gli insegnanti devono diventare esperti a valutare le conoscenze dello studente e costruire su di esse in modo fruttuoso.

Un altro punto di vista sull'apprendimento matematico è vederlo come un processo mediante il quale le persone gradualmente diventano membri di una comunità matematica (Lave 1991; Sfard 1998). La classe è una comunità di indagine matematica e gli studenti sono i componenti di questa comunità. Questa visione dell'apprendimento presume che una parte dei processi coinvolga interazioni con altri come mezzo di controllo delle idee matematiche, di valutazione del pensiero degli altri, e di sviluppo del ragionamento matematico.

Forse la cosa migliore è una mescolanza ponderata di queste due prospettive. Quando si valuta la conoscenza di un particolare studente, gli insegnanti mettono l'attenzione sulla rete di conoscenze portata da questo particolare studente, costruendo su di essa e cercando i collegamenti mancanti e i punti di partenza per nuove conoscenze. Nel valutare il progresso complessivo di una classe, all'insegnante può essere necessario considerare più strettamente l'efficacia di tale comunità di apprendimento nel progredire con idee importanti. Queste due prospettive sono chiaramente collegate, dato che la comunità è costituita da individui, e la conoscenza individuale è sostanzialmente modellata dalle interazioni che hanno luogo all'interno della classe.

Apprendere concetti e procedure

Alcune linee di ricerca suggeriscono che le persone generalmente non imparano dei concetti mettendo insieme pezzi di conoscenza (es. Resnik 1987). Più probabilmente si immergono a capofitto in una situazione problematica, portando con sé fatti, procedure, e apprendimenti che hanno a disposizione. Così, aspettare che gli studenti padroneggino un insieme di cosiddetti prerequisiti in un ordine prescritto prima che tentino di affrontare problemi stimolanti non è necessariamente produttivo. Sebbene gli studenti che seguono un insegnamento condotto in questa maniera possano imparare bene fatti e procedure, spesso non sono sicuri su quando e come applicarli. E quel che è più importante, questi studenti hanno poche occasioni di provare la soddisfazione che proviene dallo scontrarsi con compiti interessanti e complessi.

Questo insistere sulla comprensione non dovrebbe far pensare che non c'è posto per l'apprendimento di procedure di routine. Gli studenti dei primi livelli, che comprendono pienamente il significato dell'addizione, ma non sanno usarla agevolmente, saranno in serio svantaggio quando si scontreranno con le idee della moltiplicazione e della divisione. Gli studenti secondari devono possedere più di una comprensione elementare delle equazioni e di come si risolvono; senza la facilità di manipolare simbolicamente equazioni, è difficile procedere nell'esplorazione di situazioni più complicate. La familiarità con le procedure di base a vari livelli è un elemento chiave per la costruzione progressiva della conoscenza matematica.

Non può esserci dubbio che la comprensione concettuale e l'abilità procedurale sono entrambe importanti. Non è il primato di una di queste che dovremmo considerare. Piuttosto, sono le connessioni tra loro ad essere importanti. Per esempio, gli insegnanti possono incoraggiare inizialmente i loro studenti a sviluppare le proprie strategie per risolvere problemi. Ma, dopo un periodo iniziale, occorre che proponano problemi che promuovano lo sviluppo di strategie risolutive di efficacia crescente, in modo che gli studenti siano alla fine in grado di risolvere facilmente tali problemi. D'altra parte, occorre che i docenti si assicurino che i loro studenti capiscano il significato delle manipolazioni che imparano. L'assenza di tali apprendimenti conduce velocemente ad alcuni errori familiari a tutti come $100 \times 3.45 = 3.4500$ perché per "moltiplicare per 100 tu devi soltanto aggiungere due zeri" o $(x + y)/x = y$ perché "puoi semplicemente cancellare le x ". È essenziale che gli apprendimenti concettuali e le abilità operative degli studenti siano completamente connesse.

L'importanza dell'attitudine e dell'impegno

Apprendere la matematica comprende anche sviluppare un'attitudine a guardare la realtà con occhio matematico. Le attitudini matematiche degli studenti si manifestano nel modo in cui affrontano l'apprendimento matematico. Gli studenti devono avere fiducia nella loro abilità per affrontare problemi difficili, desiderosi di risolverli per proprio conto, flessibili nell'esplorare le idee matematiche e nel tentare strade risolutive alternative, e disposti a insistere quando i compiti sono impegnativi. Dovrebbero essere portati a controllare e riflettere su ciò che imparano e ad apprendere dagli errori. Uno degli obiettivi principali dovrebbe essere quello di favorire l'apprendimento autonomo. Le lezioni devono promuovere la capacità degli studenti di iniziare a sostenere lo studio formando comunità matematiche, nelle quali gli studenti scambiano idee e approfondiscono l'apprendimento dei concetti. Come descritto in *Everybody Counts*, "Per comprendere ciò che apprendono, [gli studenti] devono mettere in scena verbi che permeano il curriculum matematico: esaminare, rappresentare, risolvere, applicare, provare, comunicare" (NRC 1989, 59-59).

Impegno attivo con la matematica

Un impegno attivo è incoraggiato nel modo migliore attraverso problemi motivanti e stimolanti. La consapevolezza degli studenti che la loro attuale conoscenza è insufficiente può fornire un incentivo ulteriore, in aggiunta alla motivazione che nascono da problemi che hanno aspetti interessanti di tipo matematico o che provengono dal mondo reale. L'uso di sussidi di manipolazione, tecnologie, o altri strumenti è certamente un modo per gli studenti per essere attivamente coinvolti nell'apprendimento matematico, ma lo sono anche una

varietà di altre attività da fare in classe, come il coinvolgimento personale in discussioni vivaci, l'ascolto attivo di una lezione, oppure l'immersione in attività di "problem solving" individuali o di gruppo.

Insegnanti e studenti condividono la responsabilità dell'apprendimento matematico. Ogni studente è responsabile nel dare il senso della matematica. Lo sviluppo di comprensione e di significato più profondi si affermano affrontando faticosamente nuovi concetti e incorporando queste informazioni nella conoscenza esistente. Con tali aspettative in mente, gli studenti vedranno la sfida matematica come una parte normale dell'apprendimento, piuttosto che come un motivo di rinuncia o di fallimento. Apprendere la matematica non è sempre divertente, ma può rivelarsi attraente e gratificante. Quando gli studenti risolvono con successo un problema o comprendono un'idea complessa, provano un particolare senso di realizzazione.

In definitiva, la comprensione delle idee matematiche negli studenti si costruisce attraverso gli anni pre-K-12, come risultato di esperienze accuratamente programmate e di un attivo impegno con i contenuti matematici. Nel corso degli anni, la comprensione dei concetti e l'abilità operativa crescono e si approfondiscono. Il tipo di insegnamento fornito agli studenti determina il tipo di apprendimento che si realizza.

Il principio dell'accertamento

I programmi di matematica dovrebbero includere l'accertamento per monitorare, migliorare e valutare l'apprendimento matematico di tutti gli studenti e fornire informazioni sul processo di insegnamento.

A ogni livello, un buon sistema di accertamento coinvolge pratiche che migliorano l'apprendimento dello studente. Nel 1989, *Curriculum and Evaluation Standards* offriva specificamente proposte di accertamento, inclusi gli accertamenti programmati per scopi di diagnosi, verifica, classificazione, confronto dei risultati, e valutazione dei programmi (NCTM 1989, 200-201). Il documento originale degli *Standards* richiedeva un accertamento che promuovesse l'apprendimento degli studenti enfatizzando il pensiero e il ragionamento degli studenti e offrendo loro una varietà di opportunità per mostrare le loro conoscenze.

Qualunque sia il suo scopo, l'accertamento inizia col riconoscere che cosa è da accertare e perché l'accertamento si sta svolgendo. Per gli utilizzatori di questo documento, "che cosa è da accertare" sono le conoscenze degli studenti, l'apprendimento, l'uso di contenuti e processi matematici descritti nei dieci standard presentati nel capitolo 3. Il "perché" varia con gli scopi e l'attenzione per i risultati dell'accertamento. Più vicini sono alla classe i controllori, più specifica deve essere la loro informazione ricavata dalla valutazione. Gli insegnanti usano la valutazione per informare coloro che programmano e prendono decisioni, monitorare i progressi individuali degli studenti, fornire informazioni di ritorno che migliorino l'apprendimento dello studente, e valutare il raggiungimento degli obiettivi degli studenti relativi al loro livello. Anche i genitori fanno affidamento sulla valutazione per avere informazioni sui risultati dei loro ragazzi a scuola. Inoltre, le scuole, i sistemi scolastici, i comitati scolastici, e il pubblico generale sono interessati al progresso degli studenti nel raggiungimento degli obiettivi, per sapere se in ogni livello scolastico stanno facendo progressi. Questi controllori sono interessati all'efficacia globale dei programmi.

La sfida è impiegare metodi appropriati ed efficienti per raccogliere informazioni sufficienti a orientare le decisioni senza un'intrusione non necessaria nel tempo dedicato all'istruzione. In altre parole, la programmazione delle valutazioni deve basarsi su ciò che deve essere valutato, e su chi e come userà questa informazione.

La valutazione come processo

La valutazione dovrebbe essere vista come un processo che coinvolge le azioni di programmare, raccogliere informazioni, interpretare risultati, e prendere decisioni. Gli insegnanti ripetono il processo di valutazione centinaia di volte nei piani di lavoro a lungo termine, nelle unità didattiche e nelle lezioni quotidiane. Quotidianamente, questo processo è realizzato molte volte in modo molto informale. Gli insegnanti determinano gli obiettivi per la lezione di matematica del giorno, fanno domande e osservano gli studenti in classe; interpretano le informazioni raccolte attraverso queste valutazioni informali e decidono se continuare, rivedere dei punti o riprendere degli argomenti più avanti. Questo ciclo è rappresentato nella figura 2.1.

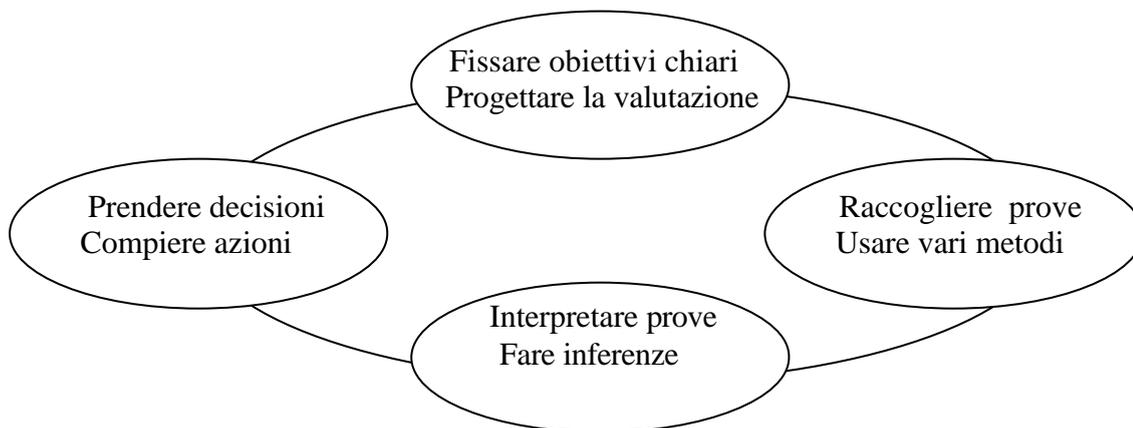


Figura 2.1. Ciclo di valutazione della classe

Stabilire e proporre chiari obiettivi di apprendimento

Studenti e insegnanti devono poter ricavare dalle valutazioni una grande quantità di informazioni dettagliate. Specificamente, gli insegnanti hanno bisogno di comprendere che cosa gli studenti stanno pensando, come affrontano i problemi, e quali contenuti hanno appreso. In un ambiente educativo che richiede una profonda comprensione della matematica, gli accertamenti dovrebbero essere basati su chiari, completi obiettivi di apprendimento. Gli standard in questo documento descrivono gli obiettivi di matematica per tutti gli studenti in termini generali. Comunque, non è intenzione di questo documento fornire risultati dettagliati sull'apprendimento o capisaldi per specifici livelli scolastici. Toccherà poi alle linee guida provinciali, regionali e locali fornire maggiori informazioni e indicazioni. I materiali curriculari scelti per migliorare l'istruzione in classe in ogni livello o corso dovrebbe articolare gli obiettivi di apprendimento a un maggiore grado di specificità.

Nella loro pianificazione giornaliera, agli insegnanti occorre fissare l'attenzione su specifici obiettivi di apprendimento all'interno del contesto degli obiettivi a lungo termine.

Per esempio, gli standard per la geometria per i livelli 6-8 fissano l'attenzione sulle forme delle figure, la struttura e visualizzazione e quindi richiedono agli studenti di "comprendere le proprietà delle figure bi- e tridimensionali e le relazioni tra le figure". Materiali curriculari differenti possono condurre a questo obiettivo in modi diversi, e nel procedere dell'istruzione probabilmente ne identificheranno di più specifici. Questi potrebbero comprendere aspetti di informazione concreta (per esempio, dare il nome ai vari quadrilateri); apprendimenti concettuali (per esempio, sapere che un quadrato è uno speciale tipo di rettangolo); e "problem solving" o applicazione (per esempio, se una rete di strade tra due città può essere attraversata esattamente in tre modi distinti).

Raccogliere le prove

Ci sono molte questioni importanti sui progressi e sui risultati degli studenti cui si deve dare risposta. Specificamente, a quale grado di comprensione della matematica appena introdotta arrivano gli studenti? Che cosa pensano di questo concetto? Quanto sono flessibili nell'affrontare nuovi problemi? Si sono esercitati a sufficienza su questa tecnica? Sono in grado di applicare questi contenuti a situazioni differenti? Sanno richiamare rapidamente questi fatti? L'apprendimento degli studenti dovrebbe essere accertato in modi che forniscano la più chiara e completa immagine di quello che gli studenti conoscono e sono in grado di fare.

Ci sono molti modi di fare le verifiche: risposte a scelta multipla, risposte strutturate e domande di completamento, compiti finalizzati, osservazioni, discussioni, ricerche. Sebbene tutti questi metodi siano appropriati per l'accertamento in classe, alcuni si prestano più prontamente di altri per certi obiettivi dell'apprendimento. Osservazioni e discussioni permettono di avere un "feedback" informale, permettendo agli insegnanti di comprendere il modo di pensare degli studenti e guidare le centinaia di decisioni che devono prendere ogni giorno. Quesiti a risposta breve possono evidenziare se gli studenti sono in grado di applicare procedure, laddove compiti di più complessa esecuzione possono porre l'attenzione sulle abilità degli studenti di applicare la matematica in nuove situazioni. Domande di completamento che chiedono agli studenti di spiegare come arrivano alle risposte possono rivelare informazioni sulle abilità come pure sugli apprendimenti concettuali. Gli appunti personali possono aiutare gli insegnanti a comprendere il modo di pensare e di riflettere degli studenti.

L'età e l'esperienza degli studenti dovrebbe influenzare il modo di raccogliere le informazioni in modo che la valutazione incoraggi l'apprendimento dello studente piuttosto che creare barriere. I bambini, per esempio, sono spesso più vicini alla comprensione di quanto possano comunicare con parole o simboli. Studenti che hanno difficoltà con la lingua inglese possono anche conoscere più matematica di quanta sappiano comunicarne in una prova scritta.

La valutazione è complessa perché gli insegnanti devono considerare sia gli studenti individualmente che la classe nel suo complesso. La valutazione della classe è importante perché influenza la direzione dell'istruzione. Fornisce anche un modo per dare un giudizio sul risultato collettivo della classe. Per esempio, se gli obiettivi matematici includono nuovi argomenti o processi, le valutazioni iniziali devono probabilmente essere diagnostiche, fornendo un "feedback" che aiuta gli insegnanti a decidere i piani educativi. Le valutazioni possono inoltre fissare l'attenzione sui significati che i singoli studenti stanno dando alla

matematica e su ciò che mostrano di saper fare. Questo tipo di valutazione potrebbe avvenire frequentemente e fornire informazioni di ritorno agli studenti.

Le valutazioni gestite da regioni, province o distretti scolastici per render conto o per valutare i programmi non sono necessariamente basate su strategie differenti da quelle impiegate dagli insegnanti. Comunque, è ugualmente importante a questo livello dotare l'obiettivo della valutazione di metodi appropriati in modo che una prova progettata per un obiettivo non sia usata per altri. In generale più lontani dalla classe sono i controllori, meno specifiche sono le informazioni necessarie e più appropriata diventa l'analisi dei campioni. I dati su gruppi di studenti, specialmente quelli raccolti nel corso del tempo, rivelano tendenze nelle prestazioni degli studenti e sono di solito sufficienti per le decisioni che devono essere prese.

Interpretare le prove e ricavarne informazioni

Ricavando informazioni appropriate dalle prove di valutazione, gli insegnanti decidono cosa fare per incoraggiare l'apprendimento degli studenti. L'insegnante deve poi decidere se possono essere ricavate informazioni valide su tutti gli aspetti dell'apprendimento. Per esempio, uno studente del quarto livello dovrebbe essere in grado di costruire frazioni equivalenti a una frazione assegnata moltiplicando il numeratore e il denominatore per lo stesso numero e raggiungere il punteggio massimo in quesiti che richiedano di fornire esempi di frazioni equivalenti. Già l'insegnante, domandandosi se lo studente comprende il concetto di frazioni equivalenti, potrebbe proporre il seguente quesito:

Supponiamo che tu abbia due cerchi della stessa grandezza. In uno i $\frac{6}{8}$ del cerchio sono colorati. Nell'altro, i $\frac{3}{4}$ del cerchio sono colorati. E' colorata la stessa parte di cerchio ?

Se lo studente risponderà, "No, quello di $\frac{6}{8}$ sarà più colorato", allora l'insegnante scoprirà che lo studente applica un algoritmo pedissequamente, senza comprendere il concetto sottostante.

Dato che le informazioni si ricavano dalle conclusioni sull'apprendimento degli studenti basate sulle loro prestazioni, la validità delle informazioni dipende dalla qualità delle prove di accertamento e dall'abilità dell'insegnante. Gli insegnanti, per prendere decisioni, dovrebbero raccogliere prove da fonti differenti (Stiggins 1997). Questa parte del processo di valutazione richiede che gli insegnanti siano abili nell'interpretare le informazioni sulla valutazione e nel ricavarne conseguenze.

Gli accertamenti sono più utili quando hanno conseguenze positive per l'apprendimento dello studente. Gli insegnanti dovrebbero decidere sulla base degli obiettivi di apprendimento, quale livello è stato raggiunto e quali problemi devono ancora essere risolti. Prima di prendere queste decisioni, l'insegnante può aiutare gli studenti stabilendo connessioni tra la nuova matematica e quello che essi già conoscono. Far sapere agli studenti i risultati degli accertamenti, può aiutarli a fissare gli obiettivi del loro apprendimento personale e assumersene la responsabilità. Manuali che aiutano gli insegnanti ad analizzare i compiti di apprendimento e descrivere i livelli di abilità possono essere usati per aiutare gli studenti a comprendere quale prestazione è attesa da loro e come tale prestazione sarà valutata. Forniscono indicazioni per l'autovalutazione degli studenti e aumentano l'autonomia degli studenti mentre proseguono attraverso i livelli pre-K-12.

Prendere decisioni e compiere azioni

Lo scopo della valutazione in classe è quello di aiutare gli studenti ad imparare e raggiungere standard elevati, e non quello di classificarli e confrontarli. La qualità e la profondità dell'apprendimento è determinata dalle decisioni che l'insegnante prende. Quindi, la valutazione dovrebbe servire a informare l'insegnante sui progressi degli studenti e aiutarlo nella scelta degli interventi sui singoli e nelle successive tappe per l'intera classe.

Un secondo uso dell'accertamento in classe è assegnare voti e valutare l'apprendimento alla luce sia della conoscenza sia delle prestazioni attese. E' importante per insegnanti, studenti e famiglie, conoscere sia i progressi che gli studenti stanno facendo a breve termine sia quelli relativi agli obiettivi a lungo termine. La valutazione consiste nel dare un giudizio e nell'assegnare voti. È un elemento importante dell'istruzione esattamente come un accertamento continuo. Valutazioni periodiche offrono l'opportunità di informare i genitori sugli obiettivi dell'educazione matematica. Questi giudizi devono essere basati su vari tipi di prove. Devono tener conto dell'età, dell'esperienza, e dell'abilità di linguaggio dello studente per evitare decisioni inopportune basate sui risultati degli accertamenti. Sia che misurino il progresso a lungo termine sia che misurino prestazioni su prove specifiche, le valutazioni dovrebbero comunicare informazioni chiare agli studenti e alle famiglie attraverso colloqui, raccolte di materiali o pagelle.

Alcune valutazioni di fine anno o di fine corso sono destinate a giudicare il successo degli studenti nella comprensione di uno specifico campo di conoscenza e le loro prestazioni al desiderato livello di competenza. Queste, unite alle informazioni degli accertamenti sommativi necessari agli insegnanti e agli studenti all'interno della classe e ai dati complessivi sulle prestazioni necessarie agli amministratori della scuola e ai supervisori di distretto, forniscono una parte dell'informazione che può essere usata con altri dati per prendere delle decisioni.

Il principio della tecnologia

I programmi di matematica devono usare la tecnologia per aiutare tutti gli studenti a comprendere la matematica e devono prepararli a usare la matematica in un mondo sempre più tecnologico.

Questa discussione si concentra sulle tecnologie elettroniche, incluse le calcolatrici, i computer, i laboratori basati sulle tecnologie portatili, e i browser Web, perché l'avvento di tali strumenti è uno dei più importanti fattori che toccano l'educazione oggi. Tali tecnologie offrono la possibilità agli studenti di entrare in contatto con le idee matematiche e le loro applicazioni in modi significativi e prima d'ora impossibili. Possono imparare più matematica e più approfonditamente con un uso appropriato degli strumenti tecnologici (Dunham e Dick 1994; Sheets 1993; Oosterum 1990; Rojano 1996). Come tutti gli strumenti, gli strumenti tecnologici possono essere usati bene oppure male. Non dovrebbero essere usati in sostituzione dell'apprendimento e delle intuizioni di base, ma piuttosto possono e dovrebbero essere usati per sviluppare quegli apprendimenti e quelle intuizioni. All'interno dei programmi di istruzione matematica, la tecnologia dovrebbe essere usata responsabilmente, con l'obiettivo di arricchire l'apprendimento degli studenti.

Nei corsi di biologia, gli studenti affrontano scoperte come la clonazione o il DNA; nei corsi di fisica sentono parlare di quarks e di particelle. Sebbene la matematica si sviluppi sempre più come disciplina - ci sono tante nuove scoperte, e nuovi campi emergenti grazie all'accesso alla tecnologia - gli studenti ne fanno esperienza come una disciplina morta, una reliquia del passato. Attraverso la tecnologia, questo problema può essere rivisto. La visualizzazione geometrica è un campo in espansione, e le immagini generate dal computer avvicinano a essa in modi analoghi a quelli in cui film sulle particelle subatomiche introducono questo argomento nelle lezioni di fisica. L'esplorazione e l'analisi statistica di larghi insiemi di dati è un'altra area in evoluzione, e con la tecnologia gli studenti possono imparare i processi che vi sono coinvolti. Analogamente, ora esistono unità didattiche che introducono gli studenti alle idee fondamentali sottostanti ai frattali e al caos. Oppure gli studenti possono lavorare a decifrare un codice e imparare a mettere in codice un messaggio. La porta è ora aperta agli studenti per fare esperienza delle meraviglie della matematica moderna.

Comprendere importanti idee matematiche e studiare l'argomento più approfonditamente

A ogni livello scolare ci sono modi in cui gli studenti possono incontrare la matematica grazie alla tecnologia che fornisce una più profonda e sostanziale comprensione rispetto a quanto si avrebbe senza. Gli studenti possono esplorare nuovi territori matematici con semplici strumenti tecnologici. Un allievo può scoprire che è possibile “contare” in una calcolatrice tascabile scrivendo “+1” e premendo ripetutamente il tasto “uguale”. Dopo aver contato da 1 a 100 in questo modo, potrebbe essere naturale proseguire contando per 2 fino a 100. Provando per 3 sarà guidato a scoprire che è impossibile arrivare esattamente a 100. Questo solleva il problema di trovare qual è il conteggio dei numeri che permette di arrivare a 100 esattamente - e farà sorgere un insieme veramente interessante di esplorazioni matematiche. Nella scuola elementare il LOGO e altri ambienti informatici forniscono un modo concreto di introdurre gli studenti alle idee, apparentemente astratte, di algoritmo, programma e sottoprogramma, e variabili, così come a più sottili conseguenze metacognitive, quali per esempio la necessità di progettare. Il fatto che i ragazzi debbano chiedere al computer quello che vogliono che faccia, e che questo faccia *esattamente* ciò che loro gli hanno detto di fare, rende la descrizione di algoritmo concreta in un modo che sarebbe altrimenti inaccessibile. Creare un quadrato di lato 10 unità scrivendo un comando come

ripeti 4: avanti 10, destra 90

piuttosto che

avanti 10; destra 90; avanti 10; destra 90; avanti 10; destra 90; avanti 10

introduce il concetto di iterazione e l'idea di procedura. Che il quadrato possa essere chiamato “Quadrato10” e usato come parte di un'altra figura semplicemente scrivendo “Quadrato10” porta all'idea di sottoprogramma. Inoltre, sostituendo “10” con “ n ” nella definizione crea una funzione matematica, che produce una figura diversa per ogni valore di n . Dati questi output di tipo visuale, queste idee sono pregnanti per i ragazzi che le hanno create. Altre parti della matematica diventano accessibili prima nel tempo. I ragazzi possono studiare grafici e tabelle a un'età inferiore quando hanno l'aiuto della tecnologia per generarli. Prima dell'esistenza della tecnologia, queste idee non erano per loro facili da affrontare, e neppure così importanti.

A livello di scuola media, il laboratorio basato sul computer permette la raccolta e l'analisi in tempo reale dei dati con modalità tali da rendere le applicazioni della matematica significative e rilevanti. I nuovi ambienti di calcolo forniscono strumenti tramite i quali gli studenti possono esplorare l'idea di variazione, un argomento precedentemente riservato ai corsi di analisi. Similmente nelle scuole secondarie, gli strumenti tecnologici possono essere usati per affrontare idee importanti. Per esempio, prima che fosse a disposizione l'accesso alla tecnologia grafica, era difficile studiare problemi di massimo e di minimo a causa della loro complessità algebrica. Gli studenti potevano sistematizzare i problemi – un esercizio di modellizzazione importante – ma, senza le tecniche dell'analisi matematica per trovare con precisione i punti critici, il meglio che si poteva fare a mano era disegnare approssimativamente le funzioni e fornire una rozza stima dei valori critici. Con gli strumenti grafici disponibili, gli studenti possono almeno vedere la forma del grafico risultante e ottenere empiricamente una stima della risposta. Similmente l'abilità degli studenti di trattare le applicazioni della matematica spesso dipendeva dalla loro possibilità di risolvere le equazioni che ne risultavano - così, per esempio, confronti dettagliati tra la crescita esponenziale e polinomiale non erano possibili. Con gli strumenti di manipolazione simbolica disponibili, non è più così.

I programmi di geometria dinamica possono aumentare l'esperienza degli studenti nella geometria del piano e dello spazio (Healey 1993; Lehrer e Chazan, in stampa). Tali programmi rendono facile generare un vasto insieme di situazioni, e fare delle congetture (p.e. “le mediane di un triangolo si intersecano tutte. Che cosa succede se provo con i segmenti che trisecano i lati opposti?”). In uno scenario di istruzione tecnologicamente ricco, l'esplorazione e la formulazione di congetture può essere una parte centrale della geometria. Gli studenti possono lavorare sulla dimostrazione di congetture che hanno generato loro stessi in aggiunta all'attività di dimostrazione di risultati noti assegnati come esercizio. I “computer algebra systems”, che includono utilità di manipolazione grafica e simbolica, rendono espliciti i legami tra le rappresentazioni algebrica e grafica delle funzioni. Gli studenti possono esplorare come, cambiando i coefficienti di una funzione quadratica, cambi la forma del grafico, o come si presentano i grafici di $f(x+a)$, $f(ax)$, $f(x) + a$ confrontati con il grafico di $f(x)$. Gli argomenti dei limiti e della convergenza possono essere affrontati empiricamente, in modo che gli studenti possono costruire un fondamento intuitivo per ogni idea complessa ed essere aiutati a visualizzarle. Negli argomenti di matematica discreta, gli studenti possono scrivere programmi di tipo ricorsivo, o specificare argomenti sotto forma di istruzioni per computer come un modo di comprendere meglio concetti collegati con gli algoritmi (Asiala et al., 1996). Gli strumenti tecnologici possono rendere più accessibili le generalizzazioni e le astrazioni.

Perfino con le potenzialità descritte sopra, deve essere dato un grande ammonimento. La migliorata comprensione degli studenti, descritta negli esempi sopra indicati, è non solo possibile, ma anche verosimile – SE la tecnologia è usata appropriatamente. Dimostrazioni vistose, e non interattive, possono lasciare gli studenti non molto più informati di prima. Calcoli condotti con una “scatola nera” possono lasciare gli studenti al buio, quando dovrebbero sviluppare intuizioni sugli oggetti su cui si sta lavorando. Programmi di geometria dinamica che possono “verificare” congetture con facilità possono lasciare gli studenti con l'impressione che la dimostrazione non sia più necessaria, e che la verifica empirica garantisca la correttezza della congettura. La tecnologia dovrebbe essere usata per sostenere la congettura, ma bisogna che gli insegnanti sottolineino l'importanza della dimostrazione.

Le calcolatrici

Le calcolatrici di oggi forniscono un supporto computazionale per la risoluzione di problemi che era inimmaginabile allorquando gli *Standards 1989* furono pubblicati. Con le calcolatrici gli studenti possono avere accesso a un vasto ambito di problemi complessi, e possono inserirli presto nella loro esperienza. Studenti di tutti i livelli possono avere accesso alle calcolatrici e ad altre tecnologie per usarle nella risoluzione di problemi. La ricerca conferma il positivo impatto dell'uso delle calcolatrici nello sviluppo di strategie di risoluzione dei problemi e nei risultati (Heid 1998; Hembree e Dessart 1985). Comunque, l'accesso alle calcolatrici non sostituisce la necessità di apprendere e diventare sicuri con i fatti aritmetici elementari, di sviluppare modi efficienti e accurati di risolvere problemi aritmetici con più cifre e di saper eseguire manipolazioni algebriche come nella risoluzione di equazioni lineari e della semplificazione di espressioni. Gli studenti dovrebbero imparare a fare scelte consapevoli, usando la tecnologia in situazioni dove il calcolo è complesso e laborioso, ma non fare assegnamento sulla tecnologia quando le risposte sono facilmente ottenibili o in situazioni dove dovrebbero avere facilità a operare. Gli insegnanti hanno la responsabilità di fare scelte appropriate sull'uso delle calcolatrici in contesti particolari, sulla base di come lo strumento aiuterà od ostacolerà lo sviluppo matematico voluto. La tecnologia è una parte importante del nostro mondo, e le scuole devono affermare l'uso appropriato delle calcolatrici a tutti i livelli come un valido e importante strumento per imparare e per fare matematica.

Preparare per le crescenti richieste della società

Oggi, allievi del secondo e terzo livello vanno in cerca nel World Wide Web di giochi, conversazioni, e informazioni. Molti degli studenti medi di oggi sono più sofisticati tecnologicamente di quanto lo erano studenti universitari di dieci anni fa. I lavori di oggi richiedono l'uso di strumenti tecnologici basati sulla matematica. Se le scuole non hanno un livello di tecnologia equivalente al livello che si trova fuori dalle scuole, e se non preparano a questo appropriatamente, allora stanno mettendo i loro studenti in una situazione di serio svantaggio.

Ci sono progetti in cui studenti, in tutto il paese, raccolgono e scambiano dati sulle piogge acide e condividono e analizzano questi dati usando il Web. Studenti che vivono in città diverse si impegnano in progetti di collaborazione. Altri possono comunicare con tutor matematici a distanza. Possono pubblicare i loro lavori elettronicamente, rendendoli accessibili ad altri. Tutto questo, oltre ad essere motivante, fornisce opportunità di scambio di informazioni e di un incontro sempre più ricco con la matematica. Tali esperienze preparano gli studenti a entrare in un mondo in cui la familiarità con gli strumenti matematici sarà richiesta. E, se gli studenti imparano a usare questi strumenti appropriatamente, con la consapevolezza delle loro finalità, potenzialità e limitazioni, saranno in grado di usare le tecnologie molto più saggiamente in futuro.

Come il principio dell'uguaglianza rende chiaro, accertarsi che tutti gli studenti abbiano normale accesso ai tipi di strumenti tecnologici qui discussi è essenziale. Questo comporta averli nelle aule, in modo che siano disponibili quando è necessario. Significa assicurare che gli insegnanti abbiano un'adeguata conoscenza tecnologica e matematica per fornire un appropriato supporto ai loro studenti. Privare gli studenti di tali opportunità significa penalizzarli, e questo è fondamentalmente ingiusto.

