



Presentazione a cura di  
Franca Noè  
e  
Aurelia Orlandoni

# FLATlandia

anno VIII

geometria on-line  
nella scuola secondaria

$n^{\circ}$

29

Franca Noè, insegnante di matematica, collaboratore di IRRE-ER, fa parte della redazione di **FLATlandia** e coordina le attività.

Aurelia Orlandoni, insegnante di matematica, ricercatore IRRE-ER, è responsabile del sito FARDICONTO e delle attività collegate.

Il gruppo che gestisce FLATlandia e' composto da:

- *Giuliana BETTINI - Insegnante di matematica*
- *Giuliano MAZZANTI - Docente di geometria, Univ. di Ferrara*
- *Franca NOE' - Insegnante di matematica*
- *Valter ROSELLI - Ricercatore, Univ. di Ferrara*
- *Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica*

## Indice

Presentazione	Pag. 5
Attività 2004 2005	Pag. 7
Ottobre 2004	Pag. 10
Novembre 2004	Pag. 16
Dicembre 2004	Pag. 22
Gennaio 2005	Pag. 28
Febbraio 2005	Pag. 34
Marzo 2005	Pag. 39
Aprile 2005	Pag. 46
Maggio 2005	Pag. 51



## **FLATlandia**

E' un'attività dell'IRRE Emilia-Romagna rivolta principalmente agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.

La partecipazione all'attività è stata allargata agli studenti del terzo anno di scuola superiore per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio

Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.

Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

## **Un po' di storia**

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano l'ottavo anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.

Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, alle attuali ventiquattro con un picco di trentotto nell'anno 2000/2001.

## **Il progetto**

E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.

L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.

In questo momento di forte auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.

I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche.

La partecipazione a FLATlandia può essere inoltre anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

## **Come partecipare**

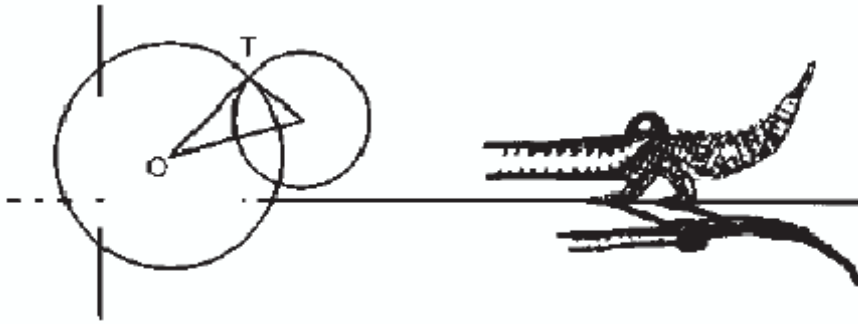
I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@www.scuolan.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo: <http://www.fardicono.it/flatlandia>.

Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe. Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica: flatlandia@fardicono.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

## **Ulteriori informazioni**

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.





# FLATlandia

Attività 2004-2005

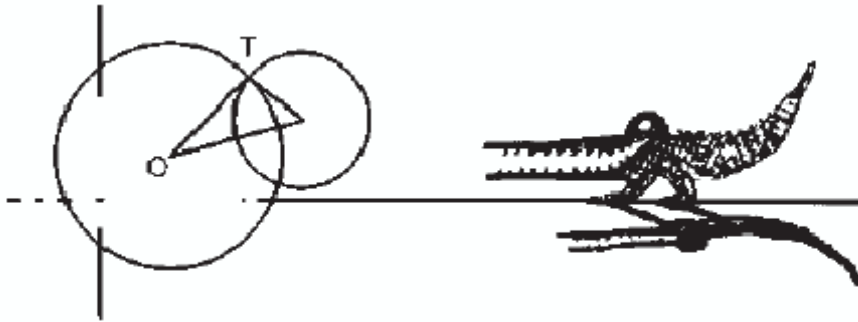
**Tabella riassuntiva delle scuole che hanno inviato soluzioni nel 2004-2005**





Scuola		Frequenza							
		O	N	D	G	F	M	A	M
SM	1 SM“C.A.DallaChiesa”,S.GenesioedUniti(PV)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	
	2 SM“G.B.Tiepolo”,Milano(MI)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	
	3 SM“F.Besta”,Bologna(BO)	◆	◆						
	4 SM“E.DeAmicis”,BustoArsizio(VA)	◆					◆	◆	
	5 SM“Zanella”,RoveredoinPiano(PN)	◆	◆	◆		◆	◆	◆	
	6 SM Gaiarine(TV)	◆	◆						
	7 SM“MarcoPolo”,Rolo(RE)			◆	◆	◆			
	8 SM diVicoforte,I.C.“S.Michele”Mondovi(CN)			◆	◆				
	9 SM“ViaRibolle”,Forli(FC)						◆		
	10 SM“AngeloBrofferio”Asti(AT)								◆
ITA	11 ITA“G.Pastori”,Brescia(BS)	◆							
	12 ITI, LST“Cesaris”,Casalpuusterlengo(LO)		◆						
	13 ITI, LST“F.Berenini”,Fidenza(PR)		◆			◆		◆	◆
	14 ITG“Ruffini”,Imperia(IM)		◆						
	15 ITI,LST“F.Alberghetti”,Imola(BO)		◆						
	16 IIS“M.Curie”,Pergine,(TN)		◆						
LS	17 LS“Agnoletti”,	◆							
	18 LS“G.Aselli”,Cremona(CR)	◆	◆						
	19 LS“Alessi”,Perugia(PG)	◆						◆	
	20 LS“G.B.Scorza”,Cosenza(CS)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
	21 LS“Copernico”,Bologna(BO)	◆	◆						
	22 LS“L.daVinci”,Bisceglie(BA)		◆						
	23 LC“Aristosseno”,Taranto(TA)		◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
	24 LS Istituto“B.Russell”,Roma(RM)							◆	



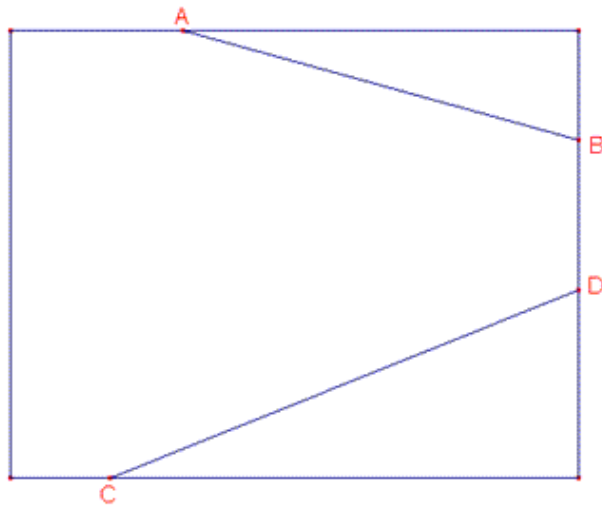


# FLATlandia

Problemi e soluzioni

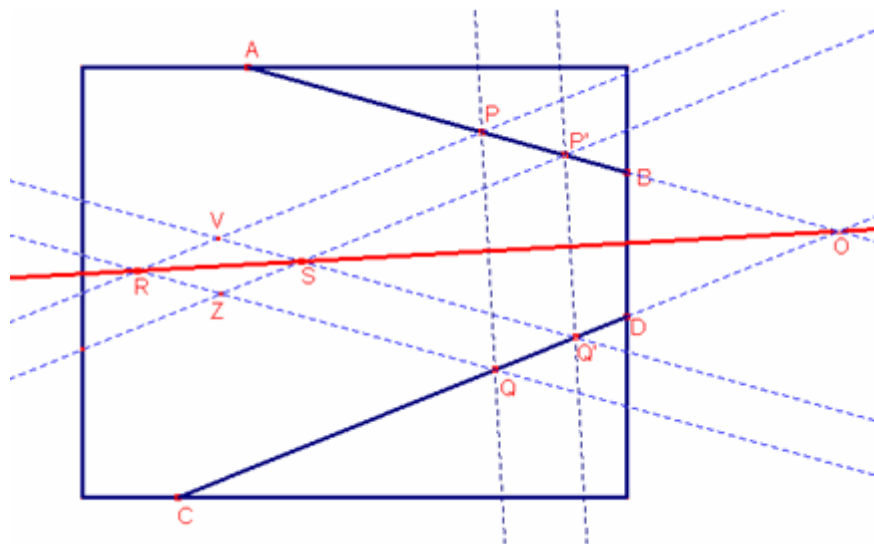


Ottobre 2004



AB e CD sono porzioni di rette che si incontrano fuori dal foglio qui rappresentato dal rettangolo.

Costruire la bisettrice degli angoli acuti formati dalle due rette mediante costruzioni eseguite esclusivamente sul foglio assegnato.



Punto P,  
parallela a CD,  
bisettrice angolo P,  
punto Q,  
parallela a AB,  
punto R,  
verificare che R sia  
interno.

Punto P',  
ripetere ...

## Commento

Abbiamo ricevuto numerosi messaggi, ma non tutti leggibili e qualcuno senza testo né allegato. Siamo riusciti a leggere tredici risposte provenienti dalle scuole:

- LS "Agnoletti",
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
- LS "G. Aselli", Cremona

- SM “G. B. Tiepolo”, Milano
- SM “F. Besta”, Bologna
- LS “Alessi”, Perugia
- LS “G. B. Scorza”, Cosenza
- ITA “G. Pastori”, Brescia
- LS “Copernico”, Bologna
- SM “E. De Amicis”, ??? - due risposte
- SM “Zanella”, Roveredo in Piano (PN)
- Scuola media di Gaiarine (TV)

Non abbiamo invece potuto esaminare quelle delle scuole

- IC di Villanova (AV), contiene una figura, manca il testo
- LS “Calini”, Brescia (BS), manca l'allegato
- SM “I. Calvino” Rolo (RE), non si apre il file della figura
- IIS “M. Curie”, Pergine, (TN) non si aprono i due file delle figure

Nel problema avevamo proposto di costruire la bisettrice di un angolo di cui non si vede il vertice, perché fuori dal foglio di lavoro. Questo era rappresentato da un rettangolo in cui due segmenti dati erano porzioni dei lati dell'angolo.

La costruzione doveva essere eseguita all'interno del rettangolo assegnato.

In tutte le risposte che abbiamo esaminato la bisettrice è stata individuata nel modo richiesto, cioè con costruzioni interne alla figura data, ma solo in una ci si è chiesti se e come il procedimento seguito rispettasse tale condizione (vedi Giacomo Canevari, LS “Aselli”).

I punti presi in modo “qualunque” sui due segmenti assegnati da cui tracciare poi rette perpendicolari o parallele, oppure bisettrici di angoli, dovevano essere scelti in modo “opportuno” affinché le costruzioni successive risultassero interne al rettangolo. Non si chiedeva in modo esplicito di determinare le condizioni di esistenza della costruzione, ma sarebbe stato corretto tener presente quella necessità nella scelta “arbitraria” di quei punti.

Quando si propone una costruzione, si deve intendere una costruzione eseguibile con riga e compasso anche se si fa ricorso allo strumento informatico. La maggior parte ha individuato la bisettrice richiesta mediante due suoi punti costruiti in modi diversi.

Presenteremo le risposte ritenute più significative per illustrare i diversi percorsi seguiti per risolvere il quesito. Come al solito le risposte degli studenti di scuola media inferiore vengono accolte anche se incomplete nelle giustificazioni.

- LS “G. Aselli”, in cui si propone una costruzione un po' laboriosa, ma pienamente giustificata.
- Un procedimento simile è stato presentato anche nelle risposte di LS “Scorza” e LS “Agnoletti”, senza considerare la necessità di rimanere sul foglio di lavoro.
- LS “Alessi”, in cui si ricorre ad una costruzione semplice e immediata, senza però indagare se sia sempre possibile.
- ITA “G. Pastori”, in cui si utilizzano due incentri, come nella risposta di SM di Gaiarine e in una di SM “E. De Amicis”. Anche in queste risposte non si indaga sulla possibilità.
- SM “C. A. Dalla Chiesa”, in cui si considerano gli incentri di due triangoli simili senza indagare sulla loro scelta.
- SM “Tiepolo”, in cui si fa ricorso all'equidistanza.
- SM “Besta”, in cui si utilizza l'incentro in modo diverso dalle risposte precedenti.

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

## Soluzioni

Giacomo Canevari, classe 3C

Liceo Scientifico "G. Aselli" Cremona (CR)

Presi a piacere un punto P su AB e uno P' CD, tracciamo le perpendicolari ai segmenti passanti per questi. Chiamiamo poi N un punto qualunque della perpendicolare ad AB e disegniamo la parallela al segmento; quindi tracciamo la circonferenza di centro P' e raggio congruente a PN, che interseca la perpendicolare a BC in punto N', interno all'angolo determinato dalle rette AB e CD. Disegniamo quindi la parallela a CD per N', che interseca la parallela ad AB in un punto V.

Tracciata una circonferenza qualsiasi di centro V, troviamo sulle due rette NV e N'V rispettivamente i punti R ed S; l'intersezione tra la circonferenza di centro R e raggio RS e quella di centro S e raggio pure RS è il punto T.

I triangoli RTV e STV sono congruenti per il terzo criterio:

$RV = VS$  per costruzione,

$RT = TS$  per costruzione,

VT è in comune.

Dunque, gli angoli RVT e TVS sono congruenti fra loro; la retta TV è bisettrice dell'angolo  $RVS$ .

Resta da dimostrare che essa è anche bisettrice dell'angolo determinato dalle rette AB e CD.

Si congiunga V con O.

Sappiamo che, per costruzione, EV è parallelo ad AB, mentre FV è parallelo a CD; inoltre, indicati con H e K i piedi delle perpendicolari condotte da V rispettivamente alla retta AB e alla retta CD,  $VH = VK$ . Ora, i triangoli OVH e OVK sono congruenti tra loro per il quarto criterio, valido per i triangoli rettangoli:

OP è in comune,

$VH = VK$ ,

$\angle VHO = \angle VKO = 90^\circ$ .

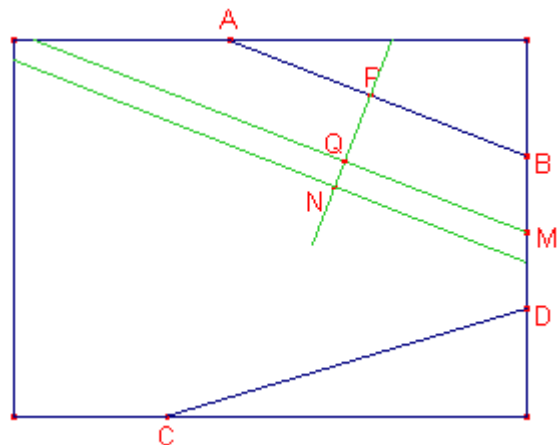
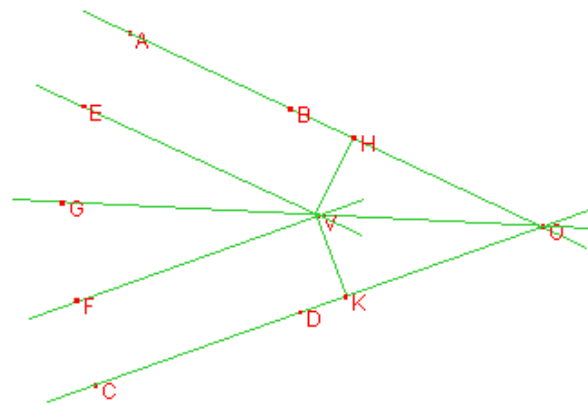
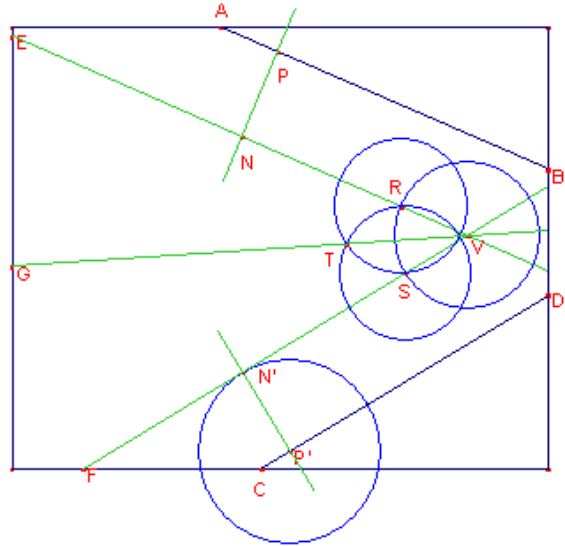
Quindi, gli angoli HOV e KOV sono congruenti e la retta OV è bisettrice dell'angolo AOC. Tale retta è anche bisettrice di HVK, perché  $\angle HVO = \angle KVO$ ; inoltre,

$$\angle EVO = \angle EVH + \angle HVO = \angle KVO + 90^\circ = \angle KVO + \angle KVF = \angle FVO$$

da cui si ricava che la retta OV è bisettrice dell'angolo EVF e che, quindi, le bisettrici degli angoli AOC e EVF coincidono tra loro. La costruzione è pertanto giustificata.

N.B.: la scelta dei punti P e P' non influisce sulla costruzione.

Invece, dalla misura di NP dipende la posizione del



punto V e va quindi scelto un punto N tale per cui V cada interno al foglio. Si potrebbe, per esempio, trovare il punto medio M di BD, tracciare la parallela ad AB per M, che intersecherà la perpendicolare per P in un punto Q, e scegliere un punto N dalla parte opposta a Q rispetto a P.

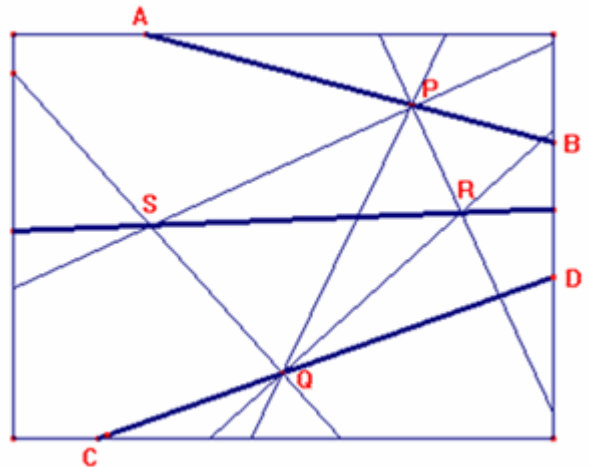
**Barbanera Mattia, classe 2E**

**Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia (PG)**

Il procedimento è abbastanza semplice: Sia P un punto [[qualsiasi]] su AB e sia Q un punto [[qualsiasi]] su CD; si congiunga P con Q e si traccino le bisettrici degli angoli APQ e CQP, che si incontreranno nel punto S, e le bisettrici di BPQ e DQP, che si incontreranno nel punto R [R e S debbono risultare interni al rettangolo e questo dipende dalla scelta di P e Q].

Si può dimostrare che la retta congiungente S e R è la bisettrice dell'angolo acuto formato da AB e CD.

Infatti il punto R, appartenendo alla bisettrice dell'angolo QPB è equidistante dai lati PB e PQ; ma R appartiene anche alla bisettrice dell'angolo DQP, quindi è equidistante dai lati PQ e QD; quindi, per la proprietà transitiva della congruenza, R è equidistante dai lati PB e QD, cioè dalle rette AB e CD: risulta pertanto sulla bisettrice richiesta. Analogamente si dimostra che anche il punto S appartiene alla bisettrice richiesta. Congiungendo dunque il punto R con il punto S, il problema è risolto.



**Classe 2F**

**Istituto tecnico Agrario "G. Pastori" - Brescia (BS)**

Traccio le bisettrici degli angoli CAB e DCA, trovo il loro punto di intersezione M:

per definizione di bisettrice, M è equidistante sia dal lato AB che al lato AC, perché punto della bisettrice dell'angolo CAB, ma M è anche equidistante dai lati CD e AC, perché punto della bisettrice dell'angolo DCA.

Per la proprietà transitiva, M è equidistante sia da AB che da CD.

[Presi un punto E su AB e un punto F su CD], ripetiamo la costruzione alla ricerca di un secondo punto:

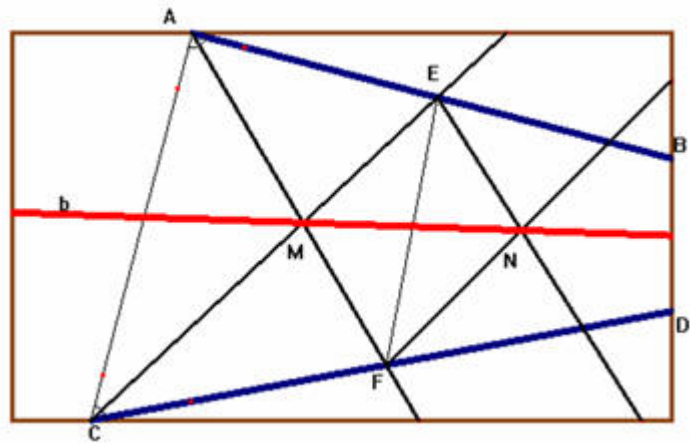
Traccio le bisettrici degli angoli DFE e BEF, trovo il loro punto d'intersezione N:

[N deve risultare interno al rettangolo e questo dipende dalla scelta di E e di F]

N è equidistante sia dal lato EB che dal lato EF, perché punto della bisettrice dell'angolo BEF, ma N è anche equidistante dai lati FD e EF, perché punto della bisettrice dell'angolo DFE.

Per la proprietà transitiva, N è equidistante sia da EB che da FD, quindi è equidistante da AB e CD.

Poiché i punti M e N sono equidistanti dai segmenti AB e CD, sono punti appartenenti alla bisettrice dell'angolo avente per lati AB e CD. (l'angolo che si formerebbe col prolungare i due lati fuori dal foglio).





*Thomas Neri e Mattia Rovelli*

*classe 3P Scuola Media "C. A. Dalla Chiesa" - San Genesio ed Uniti (Pavia)*

Uniamo A con C e consideriamo l'ipotetico triangolo ASC (S punto di intersezione delle rette AB e CD).

Noi sappiamo che le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un unico punto.

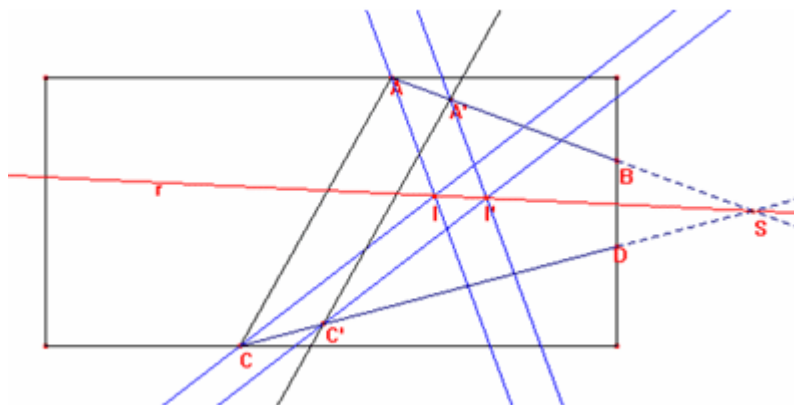
Tracciamo le bisettrici degli angoli CAS e ACS; il punto di incontro è l' incentro (I) del triangolo ASC.

Per l' incentro passerà anche la bisettrice dell'angolo ASC ma, dato che con solo questo punto non possiamo tracciare la bisettrice dell'angolo ASC, tracciamo una retta parallela al lato AC che interseca AB e CD rispettivamente nei punti A' e C'.

I triangoli A'C'S e ACS sono ugualmente disposti e simili, perché hanno gli angoli interni rispettivamente uguali [perché corrispondenti],  $CAS=C'A'S$   $ACS=A'C'S$ , e l'angolo ASC in comune; quindi le bisettrici dell'angolo ASC e dell'angolo A'SC' coincidono.

Tracciamo le bisettrici relative agli angoli C'A'S e A'C'S il loro punto di incontro è l' incentro (I') relativo al triangolo A'C'S. Da questo incentro passerà anche la bisettrice dell'angolo A'SC'.

A questo punto [se I' è interno al rettangolo] tracciamo una retta r passante per i due incentri; così facendo troviamo la bisettrice dell'angolo  $ASC=A'SC'$ .



**Classe 3F**

*Scuola Media "G. B. Tiepolo" Milano (MI)*

Per tracciare la bisettrice è sufficiente individuare due punti.

Congiungendo A con C si ottiene un triangolo il cui vertice O è esterno al foglio di lavoro.

Sapendo che le bisettrici di un triangolo si incontrano nell' incentro e sapendo che sono sufficienti due bisettrici per poter trovare questo punto, tracciamo le bisettrici degli angoli A e C.

Troviamo in questo modo il punto I; dal quale siamo sicuri passerà anche la bisettrice dell'angolo O

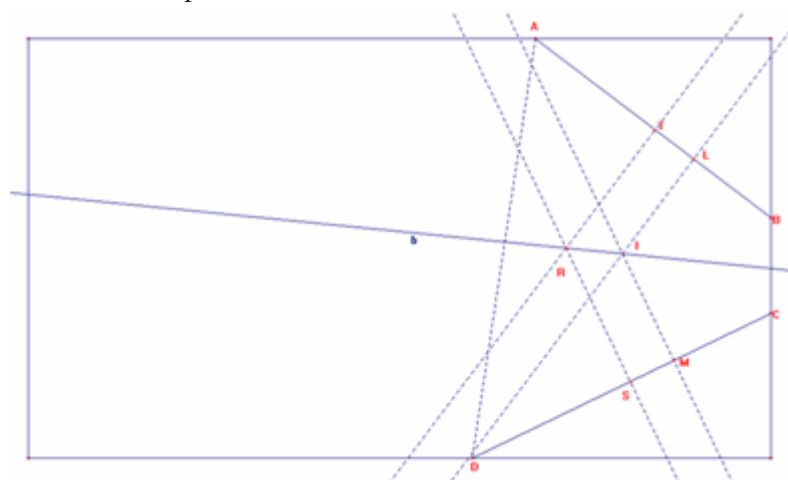
Abbiamo così trovato il primo punto necessario per la costruzione della bisettrice;

per trovare il secondo punto tracciamo le perpendicolari ai lati AB e CD passanti per il punto I, trovando i punti L e M. Il punto I è equidistante dai due segmenti AB e CD, perciò  $IL=IM$ .

Fissiamo un punto sul segmento AB ad una certa distanza dal punto M, riportiamo un punto anche sul segmento CD, mantenendo la stessa distanza con il punto L.

[[...]]

Chiamiamo i due punti S e T.  $SM=TL$



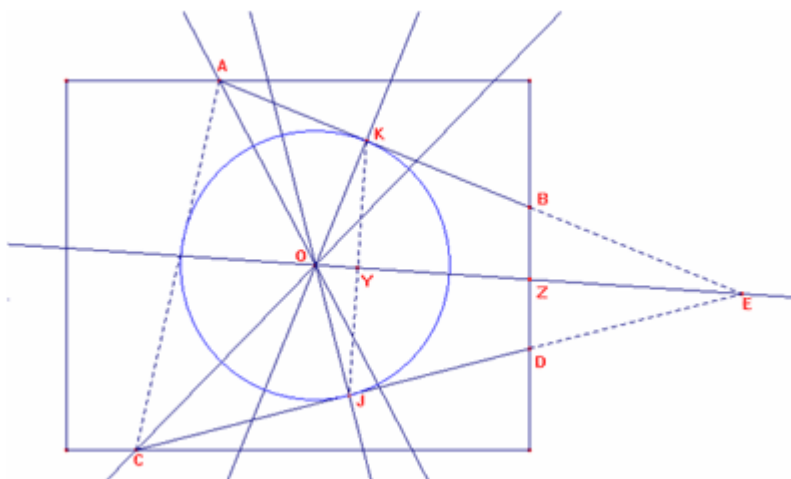
Da questi due punti tracciamo le perpendicolari rispettivamente al segmento AB e CD trovando in questo modo il secondo punto della bisettrice chiamato R. [essendo  $RS=RT$ ; affermazione che deve però essere dimostrata].

Avendo due punti [equidistanti dai lati] possiamo ora tracciare la bisettrice all'angolo O, passante per i punti R ed I.

### *Alcuni alunni della classe 3C*

#### *Scuola Media "F. Besta" - Bologna*

- Costruiamo AC e poi le bisettrici degli angoli ACD e CAB. Il loro punto d'intersezione O rappresenta l'incastro del triangolo ACE (il punto E ottenuto prolungando i segmenti AB e CD). Il punto O è anche un punto delle bisettrici richieste dal testo.
- Costruiamo da O i segmenti perpendicolari ad AB e CD che chiamiamo OK e OJ. Successivamente tracciamo la circonferenza di centro O inscritta nel triangolo di raggio OK.
- Tracciamo il segmento KJ e individuiamo il triangolo isoscele KOJ. Infine tracciamo l'asse del segmento KJ. L'asse rappresenta anche le bisettrici degli angoli acuti formati dal prolungamento di AB e CD. [Conclusione corretta, ma affrettata; poteva essere motivata con maggior precisione]

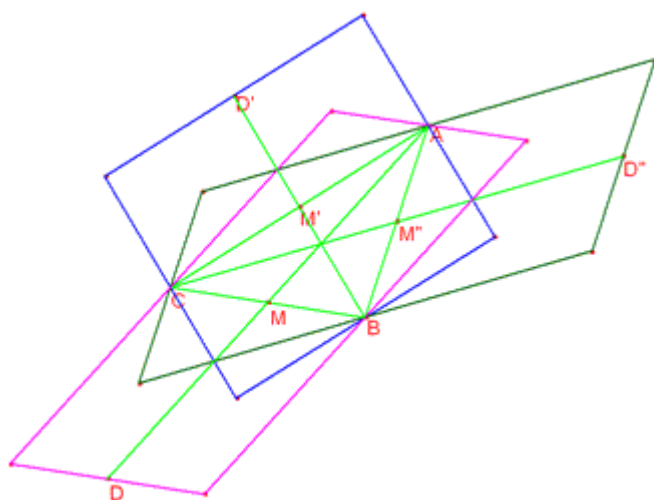


Novembre 2004

Il testo del problema:

- 1) Costruire un parallelogrammo noti i punti medi di tre lati.
  - 2) Come debbono essere scelti i tre punti per ottenere un rettangolo, un rombo, un quadrato?
- Motivare le risposte.

*Figura proposta dalla Scuola Media di Vicoforte (CN)*



A, B, C sono i tre punti medi scelti inizialmente

## Commento

Questa volta abbiamo ricevuto 24 risposte provenienti dalle scuole:

- LS "G. Aselli" Cremona – due risposte
- SM "F. Besta", Bologna
- LS "L. da Vinci", Bisceglie (BA) – tre risposte
- LC "Aristosseno", Taranto
- LS "G. B. Scorza", Cosenza
- ITI, LST "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
- IIS "M. Curie", Pergine, (TN)
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
- ITI, LST "F. Berenini", Fidenza (PR) – tre risposte
- ITG "Ruffini", Imperia
- LS "N. Copernico", Bologna – due risposte
- ITI, LST "F. Albergheiti", Imola (BO)
- SM "Marco Polo", Rolo (RE)
- SM "G. B. Tiepolo", Milano
- SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
- ITA "G. Pastori", Brescia
- Scuola media di Gaiarine (TV)
- Scuola media di Vicoforte (CN)

Nel problema avevamo proposto di costruire un parallelogrammo essendo dati i punti medi di tre lati e si chiedeva poi quali ulteriori ipotesi si dovevano fare sui tre punti per ottenere i tre parallelogrammi particolari.

La costruzione era semplice e si poteva effettuare in vari modi: c'è chi ha trovato il risultato con pochi passaggi utilizzando le proprietà dei punti medi e del parallelismo; chi, volendo usare principalmente il compasso, ha fatto ricorso ad una lunga serie di circonferenze; chi, invece del compasso, ha considerato simmetrie centrali o assiali per trasportare punti e segmenti.

Ci siamo trovati in imbarazzo nella scelta delle risposte da proporre all'attenzione dei partecipanti.

La "evidenza" del risultato ha fatto sì che molte costruzioni, semplici e ben fatte, non siano poi state giustificate o lo siano state solo in parte. Non bastava trovare un parallelogrammo, ma si doveva anche dimostrare che avesse quei tre punti come punti medi dei lati.

Si doveva dare una completa giustificazione del caso generale, punto (1), e trarre poi rapide conclusioni nei casi particolari, punto (2).

Riteniamo opportuno fare anche le seguenti osservazioni:

- pochi hanno considerato tutte le possibili varianti una volta scelti i tre punti (si veda la figura presentata con il commento);
- qualcuno ha giustamente osservato che i tre punti scelti non dovevano essere allineati;
- qualcuno ha citato in modo improprio il teorema di Talete.

E' vero che congiungendo i punti medi di due lati opposti di un parallelogrammo si ottiene un segmento parallelo agli altri due lati, ma il teorema di Talete non afferma questo: **NON ESISTE** in generale il "teorema inverso" (si vedano la figura e il commento del problema di Gennaio 2004).

Presentiamo in questa pagina:

- la figura inviata dalla Scuola Media di Vicoforte (vedi sopra), in cui si mostrano i tre possibili risultati (una figura analoga hanno inviato un gruppo di studenti dell'ITI "Berenini").

- le risposte provenienti dalle scuole:

- SM "Marco Polo", prima e seconda parte, in cui si propongono costruzioni semplici e motivate.
- SM "C. A. Dalla Chiesa", prima parte, in cui si fa prima una analisi della figura da ottenere per giustificare la successiva costruzione
- LS "G. Aselli", quella di Giacomo Canevari, prima parte, in cui si propone una costruzione un po' laboriosa e sostanzialmente giustificata.
- LS "L. da Vinci", quella di Annalisa Todisco (ma simile alle altre), seconda parte, in cui si espongono i tre casi particolari in modo conciso facendo, come richiesto, le ipotesi sui tre punti scelti.

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

## Soluzioni

Classe 3°, Scuola Media "Marco Polo", Rolo (RE)  
Istituto Comprensivo "Italo Calvino"

1)

Dati tre punti A, B, C suppongo che A e C siano i punti medi di due lati opposti del parallelogrammo, altrimenti vi sarebbero tre costruzioni possibili.

1. Mando da A la parallela a BC e da C la parallela ad AB e chiamo D il loro punto di intersezione.
2. Il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo in quanto ha i lati opposti e paralleli per costruzione.
3. Mando per D e per B le parallele ad AC e per A e per C le parallele a DB ottenendo il parallelogrammo EFGH come in figura 1.
4. Se indico con O il centro del parallelogrammo ABCD [intersezione delle diagonali AC e BD] allora i quadrilateri AOBF e EDOA sono parallelogrammi avendo i lati opposti paralleli.
5. In particolare  $EA=DO$  e  $AF=OB$  perché lati opposti, ed essendo  $DO=OB$  perché in un parallelogrammo le diagonali si bisecano scambievolmente, allora  $EA=AF$  per cui A è il punto medio del lato EF. In modo analogo si dimostra che B è il punto medio di FG e che C è il punto medio di HG.

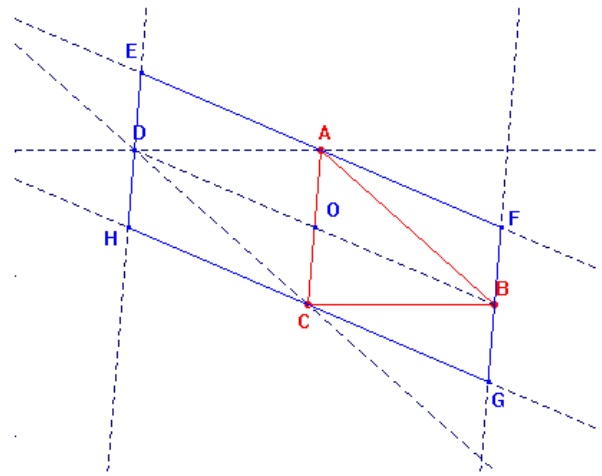


fig. 1

2)

Il parallelogrammo EFGH è rettangolo quando il triangolo ABC è isoscele di vertice B, infatti il parallelogrammo EFGH è rettangolo se e soltanto se AC e BD sono perpendicolari e quindi quando il parallelogrammo ABCD è un rombo (fig. 2).

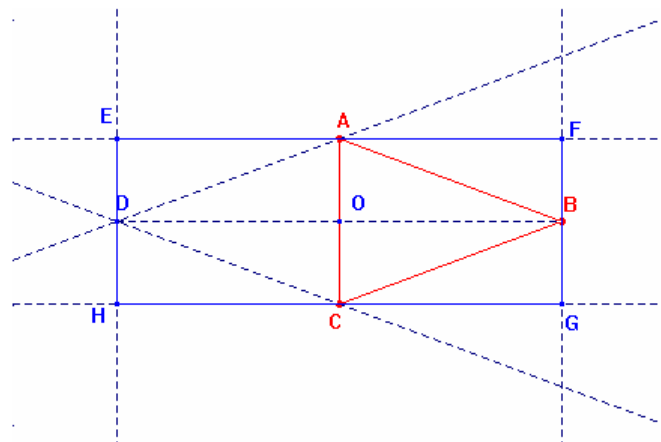


fig. 2

Il parallelogrammo EFGH è un rombo quando il triangolo ABC è rettangolo in B, infatti il parallelogrammo EFGH è un rombo se e soltanto se AC e BD sono uguali e quindi quando il parallelogrammo ABCD è un rettangolo (fig. 3).

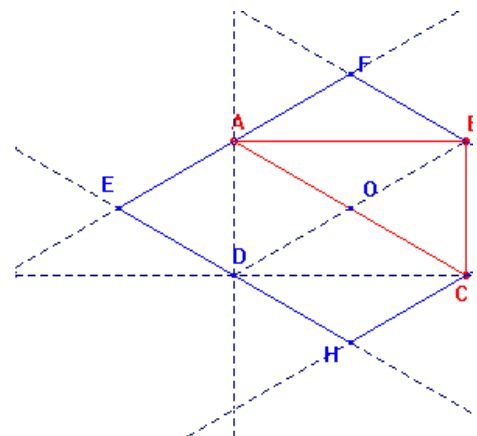


fig. 3

Il parallelogrammo EFGH è poi un quadrato quando il triangolo ABC è isoscele e rettangolo in B essendo un quadrato sia un rettangolo che un rombo (fig. 4).

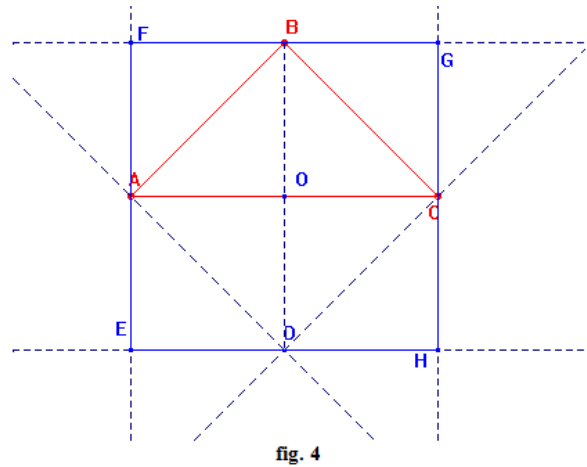
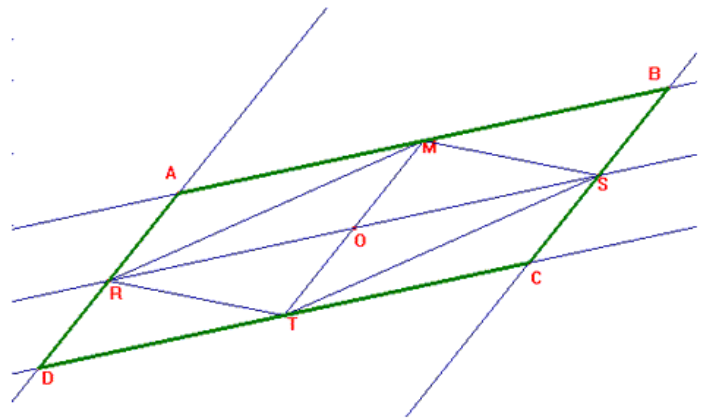


fig. 4

*Davide Cua, Virginia Lucaccini, Thomas Neri, Mattia Rovelli*  
*classe 3P Scuola Media di San Genesio ed Uniti - (Pavia)*

1)

In un parallelogramma il segmento che unisce i punti medi di due lati opposti risulta parallelo agli altri due lati [[per il teorema di Talete]] [vedi commento e la nota qui sotto], e i segmenti che uniscono i punti medi dei lati opposti si tagliano scambievolmente a metà, perché si formano quattro parallelogrammi uguali, simili a quello di partenza, aventi i lati di lunghezza la metà di quello di partenza.



Presi nel piano i punti M, R, T, per trovare il punto medio del quarto lato del parallelogramma uniamo M con T e tracciamo la retta passante per R e per il punto medio O del segmento MT.

Con una simmetria centrale di centro O, troviamo il simmetrico di R che chiamiamo S.

In questo modo abbiamo trovato il punto medio del quarto lato.

Per le osservazioni fatte all'inizio è sufficiente, per costruire il parallelogramma richiesto, mandare le parallele ai segmenti MT ed RS passanti rispettivamente per i punti M, R, T, S. I punti di intersezione di queste quattro rette sono i vertici del parallelogramma ABCD che bisognava cercare.

[Nota: ADTM è un quadrilatero con due lati opposti, DT e AM, sia uguali che paralleli, quindi è un parallelogrammo e si ha AD parallelo a TM,...]

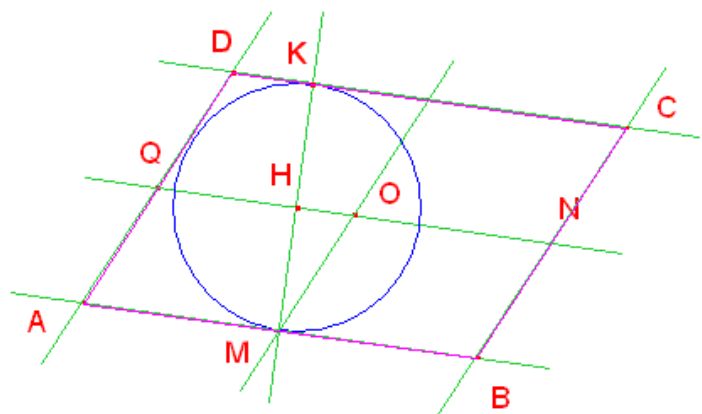
2) [...]

*Giacomo Canevari, classe 3C*  
*Liceo Scientifico "G. Aselli" Cremona*

1)

**Costruzione**

Chiamati M, N e Q i punti assegnati, tracciamo la retta passante per due di essi; consideriamo, per esempio, la retta NQ. Innalziamo la retta perpendicolare a NQ per il punto M, individuando il punto H; disegniamo la circonferenza di centro H e

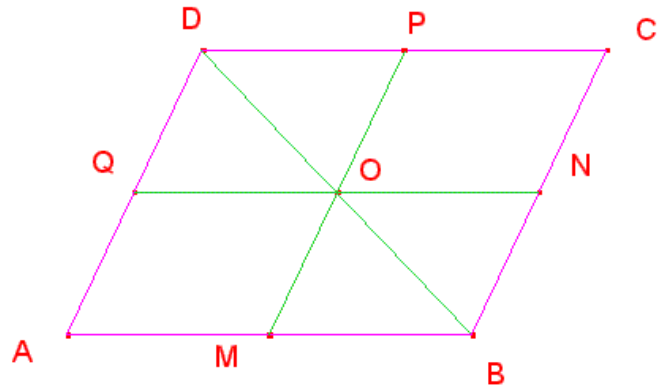


raggio HM, trovando il punto K, poi le rette parallele a NQ per i punti M e K. Trovato il punto medio O del segmento NQ, tracciamo la retta per O e M e le sue parallele per Q ed N; i punti di intersezione tra queste ultime e le parallele a NQ sono i vertici del parallelogrammo ABCD.

**Dimostrazione**

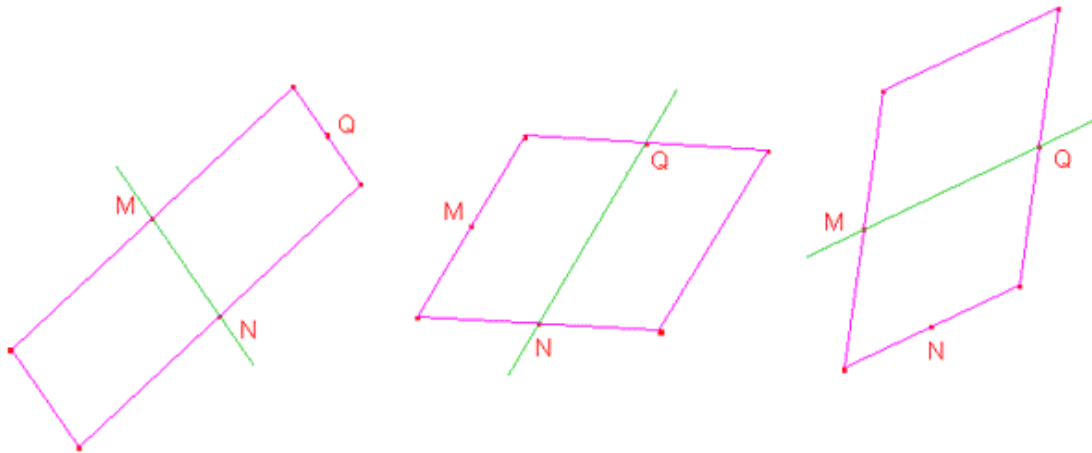
HP: ABCD parallelogrammo  
 AM = BM = CP = DP  
 AQ = DQ = BN = CN

Poiché il parallelogrammo possiede un centro di simmetria O, che è il punto di intersezione delle diagonali [[...]], risulta che  $DO = BO$ , quindi che O è il punto medio di BD come Q lo è di AD. Perciò il segmento OQ è parallelo al lato AB, perché è il segmento congiungente i punti medi di due lati del triangolo ABD.



Ripetendo lo stesso ragionamento per la diagonale AC, otteniamo che MP e NQ sono paralleli ai lati e, dunque, dividono il quadrilatero ABCD in quattro parallelogrammi congruenti tra loro e simili ad ABCD secondo il rapporto  $k = 1/2$ , in quanto  $AM = 1/2 AB$ .

Da tutto ciò segue che O è il punto medio di NQ e che l'altezza dei quattro parallelogrammi minori è  $1/2$  di quella di ABCD: la costruzione è pertanto giustificata.



N.B.: non esistono limitazioni al problema, in quanto si basa su costruzioni (trasporto di distanze, punto medio, retta parallela) sempre possibili. La soluzione, tuttavia, non è unica: varia a seconda della retta considerata, quindi ne esistono tre per ogni terna di punti presa. Tutti i parallelogrammi ottenuti, però, sono equivalenti in quanto la loro area è il quadruplo dell'area del triangolo MNQ.

2) [[...]]

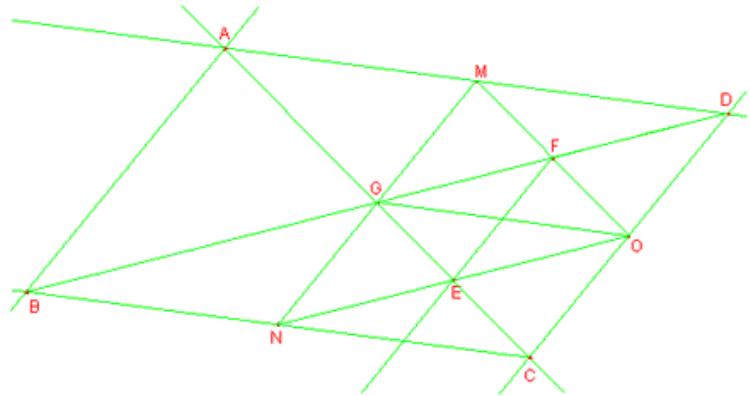
Annalisa Todisco, classe 2D  
 Liceo Scientifico "L. da Vinci", Bisceglie (BA)

1.  
 [...]

2.  
 Se i punti medi M, N, O sono i vertici di un triangolo isoscele [[di base MN]] la mediana GO è anche altezza per cui i lati AD e DC che sono paralleli rispettivamente ai segmenti GO e MN risultano perpendicolari per cui il quadrilatero ABCD è un rettangolo.

Se i punti medi M, N, O sono i vertici di un triangolo rettangolo [[in O]], le diagonali del parallelogramma ABCD risultano perpendicolari, perché sono parallele ai cateti del triangolo MNO, quindi il quadrilatero ABCD è un rombo.

Se i punti medi M, N, O sono i vertici di un triangolo rettangolo isoscele il quadrilatero ABCD risulta sia un rettangolo che un rombo quindi è un quadrato.

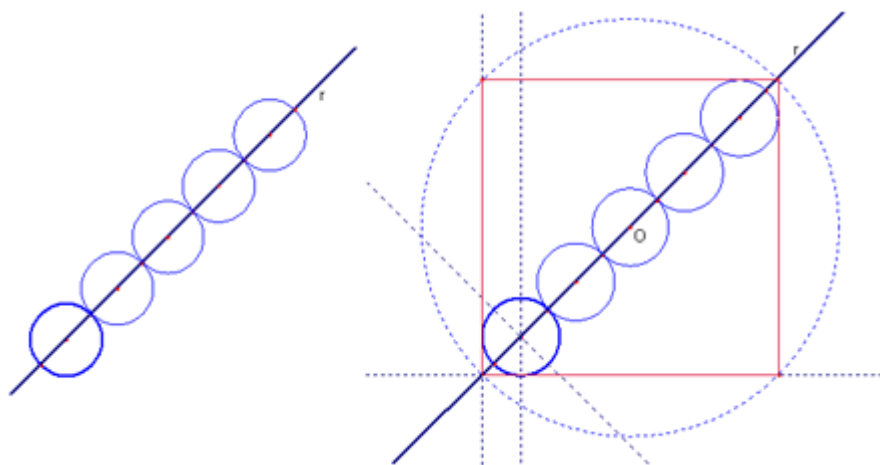




Dicembre 2004

Lungo la diagonale di un quadrato sono disposte cinque monete tutte uguali in modo che siano a due a due tangenti fra loro e che la prima e l'ultima siano tangenti ai lati del quadrato.

1. Costruite, giustificandola, una figura che illustri la situazione.
2. Qual è il maggior numero di monete, uguali a quelle date, che riuscite a disporre nel quadrato?
3. In quale modo?
4. Indicato con  $r$  il raggio delle monete, determinate, in funzione di  $r$ , il lato del quadrato.



## Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte di cui due provengono da scuole superiori.

In una risposta il testo è stato scritto nel file della figura, ripetiamo ancora di non farlo perché ci crea problemi di gestione.

Le risposte provengono dalle scuole:

- LS "Aristosseno" Taranto (TA)
- Scuola media di Vicoforte, I.C. "S. Michele", Mondovì (CN)
- SM "G. B. Tiepolo", Milano (MI)
- LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)
- SM "Marco Polo", I.C. "I. Calvino" Rolo (RE)
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
- SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)

Nel problema si proponeva come primo quesito una costruzione che raffigurasse la sistemazione di cinque monete tutte uguali lungo la diagonale di un quadrato, secondo un modo richiesto. Nella maggior parte delle risposte questa prima fase è stata risolta in modo soddisfacente, ricorrendo a vari percorsi di risoluzione.

Come secondo quesito si chiedeva di inserire nel quadrato ottenuto il maggior numero di monete uguali alle prime cinque. Tutti hanno individuata la soluzione di questa parte del problema, ma pochi ne hanno dato una giustificazione e in nessuna risposta questa è esauriente.

Successivamente si chiedeva di calcolare il lato del quadrato dato il raggio delle monete.

Riteniamo opportuno precisare quanto segue:

- o quando si fa ricorso alle simmetrie occorre precisare il centro o l'asse rispetto a cui si opera la trasformazione;

- o non è corretto utilizzare il calcolo delle misure nelle costruzioni geometriche;
- o non è corretto interporre il simbolo “=” fra l’espressione che rappresenta un numero irrazionale e un suo valore approssimato;
- o il simbolo “=” si usa solo fra simboli matematici, non fra parole del linguaggio.

Abbiamo scelto due risposte complete e parti di altre in modo da presentare i vari modi di risoluzione:

- o LS “G. B. Scorza”, risposta completata da una nostra correzione all’inizio della prima parte ed un commento nella seconda. Poiché contiene molte formule, questo file sarà visibile in formato PDF, “cliccando” sul link predisposto.
- o S.M. “C. A. dalla Chiesa”, risposta completa, nelle cui costruzioni si utilizzano le simmetrie.
- o S.M. “Tiepolo”, la seconda parte; in essa si fornisce una giustificazione della costruzione che, pur con qualche imprecisione, riteniamo accettabile per studenti di scuola media inferiore.
- o S.M. “Marco Polo”, prima e terza parte in quanto si differenziano dalle precedenti.
- o S.M. “Zanella”, prima parte, in cui si fornisce una costruzione un po’ complessa ricorrendo al teorema di Talete.

**P.S.** Per non appesantire il problema abbiamo volutamente richiesto il **MAGGIOR NUMERO** e non il **MASSIMO NUMERO** di monete che si riusciva ad inserire nel quadrato così costruito.

Dopo aver calcolato il lato si può osservare che non è possibile disporre in quel quadrato quattro monete a due a due tangenti fra loro e ciascuna tangente allo stesso lato.

La disposizione lungo la diagonale che abbiamo suggerito consente di ottenere il massimo numero possibile.

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

## Soluzioni

*Mercedes Scarpino, classe 2G*

*Liceo Scientifico “G. B. Scorza”, Cosenza (CS)*

### QUESITO N° 1

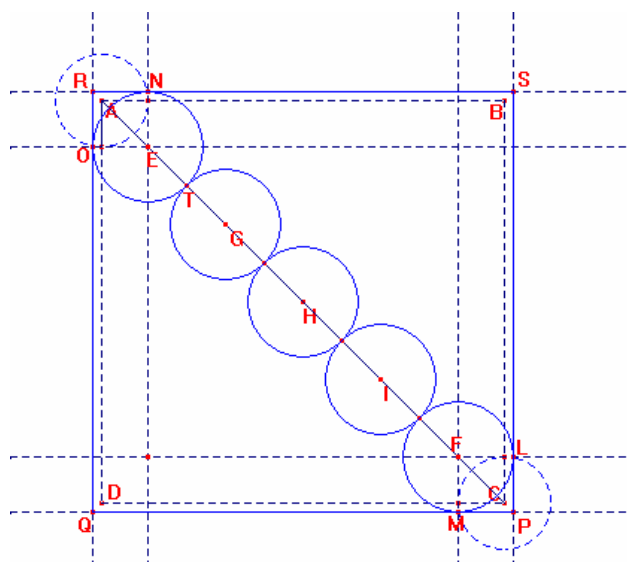
#### COSTRUZIONE

Traccio inizialmente un quadrato  $[[\dots]]$ .

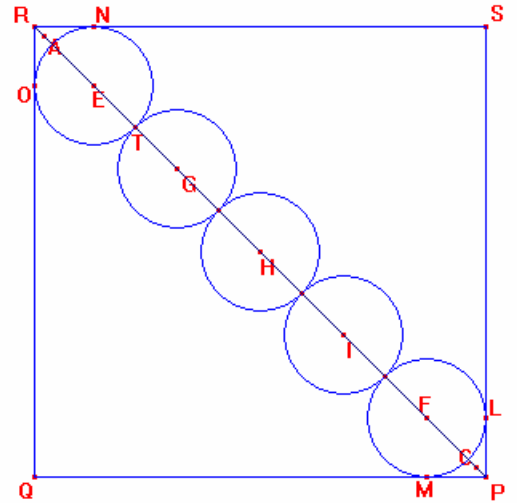
Sulla diagonale  $EF$  del quadrato così ottenuto trovo il punto medio  $H$ ; successivamente trovo  $G$  e  $I$ , punti medi rispettivamente dei segmenti  $EH$  e  $HF$ ; e ancora i punti medi dei segmenti ottenuti. In tal modo ho suddiviso la diagonale  $EF$  in otto segmenti congruenti, che saranno proprio i raggi delle cinque monete richieste.

Infatti, per individuare il quadrato richiesto, disegno le cinque monete che hanno tutte raggio  $ET$  e centro rispettivamente in  $E, G, H, I, F$ .

Indicando con  $N, O, L, M$  i punti ottenuti dall’intersezione delle suddette circonferenze di centro  $E$  ed  $F$  con i prolungamenti dei lati del quadrato di diagonale  $EF$ , ottengo i segmenti  $FM, FL, EO, EN$ , che sono tutti congruenti al raggio  $ET$  poiché raggi di circonferenze congruenti. Provvedo perciò a tracciare le parallele ai lati del quadrato di diagonale  $EF$ , passanti per i punti  $N, O, L$  ed  $M$ .



Le rette che ho costruito in tal modo, vanno a formare il quadrato PQRS, che è il quadrato richiesto. PQRS è un quadrato perché ha i lati paralleli a quelli del quadrato di diagonale EF e la cui distanza da essi è costante e congruente al raggio ET.

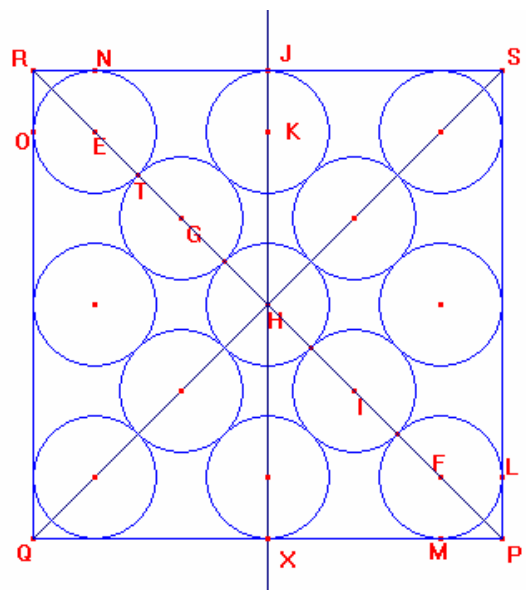


**QUESITO N° 2**

Nel quadrato PQRS posso inserire al massimo 13 monete uguali a quelle date.

Per simmetria, sull'altra diagonale inserisco altre 4 monete; in ciascuno spazio vuoto posso inserire una moneta; la prima ha come centro il punto K, posto sull'asse di simmetria JX del quadrato. Per simmetria assiale ripetuta, inserisco le restanti 3 monete.

[Risposta imprecisa (vedi commento) e non motivata]



**QUESITO N° 3**

Detto  $l$  il lato del quadrato e  $d$  la sua diagonale, risulta  $d = l\sqrt{2}$ , per il teorema di Pitagora.

D'altra parte  $d$  è anche uguale a 10 volte il raggio più 2 volte il segmento RW. Questo è dato dalla differenza tra la diagonale del quadrato di raggio  $r$  ed il raggio stesso, perciò

$$d = 10 * r + 2 * (r\sqrt{2} - r).$$

Confrontando i due risultati si ottiene

$$l * \sqrt{2} = 10 * r + 2 * (r\sqrt{2} - r),$$

da cui

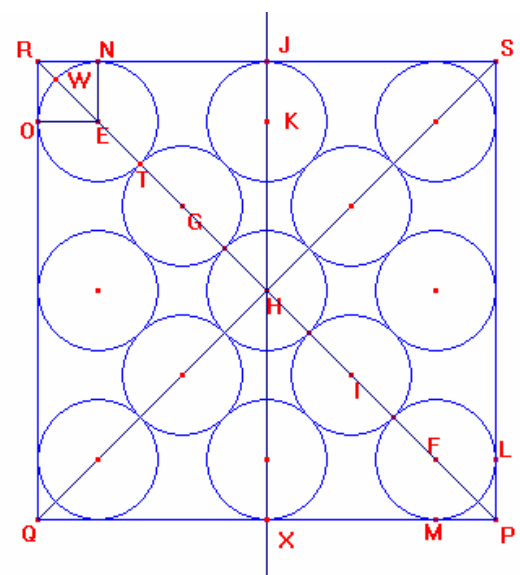
$$l * \sqrt{2} = 8 * r + 2 * r\sqrt{2}$$

Ed infine

$$l = \frac{(8 * r + 2 * \sqrt{2} * r)}{\sqrt{2}}$$

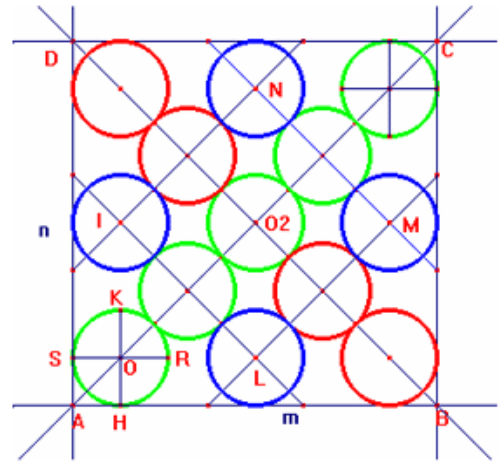
Ovvero

$$l = 4 * r * \sqrt{2} + 2 * r$$



*Riccardo Fabbian, Thomas Neri e Mattia Rovelli*  
*Classe 3° P Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa"*  
*San Genesio ed Uniti (PV)*

1) Abbiamo disegnato una circonferenza di centro O ed in essa due diametri perpendicolari HK e SR. Abbiamo tracciato le rette m ed n tangenti alla circonferenza nei punti H ed S. Abbiamo così costruito due rette perpendicolari e chiamato il loro punto di intersezione A. Poi abbiamo disegnato la retta passante per A ed O. Su questa retta abbiamo riportato per quattro volte il diametro HK a partire da O ed abbiamo così trovato i centri delle altre quattro circonferenze tangenti a due a due ed allineate sulla retta AO. Indicato con O2 il centro della terza circonferenza questo punto è anche punto d'intersezione delle diagonali del quadrato. Troviamo il vertice C del quadrato facendo il simmetrico di A rispetto ad O2 e i vertici B e D del quadrato mandando per C le rette parallele alle rette m ed n e trovando i loro punti d'intersezione con n ed m. Ecco trovato un quadrato ABCD con cinque monete disposte sulla diagonale tangenti a due a due.



2) Sulla seconda diagonale abbiamo riportato altre quattro circonferenze simmetriche rispetto [[...]] al centro O2. Poi abbiamo tracciato due rette perpendicolari alla diagonale AC e due rette perpendicolari alla diagonale BD e passanti per i centri delle quattro circonferenze tangenti alla circonferenza di centro O2. I punti di intersezione di queste rette I, L, M, N, sono i centri delle ultime quattro circonferenze. In totale nel quadrato ci stanno tredici monete. Le circonferenze blu hanno raggio uguale ad r perché il lato del quadrato [perché?] ILMN, uguale alla distanza dei centri della seconda e quarta circonferenza verde, misura  $4r$ .

$LM=r+2r+r$  e quindi [le circonferenze blu] sono tangenti alle altre circonferenze [quali?] [Ciascuna di esse è anche tangente a un lato del quadrato].

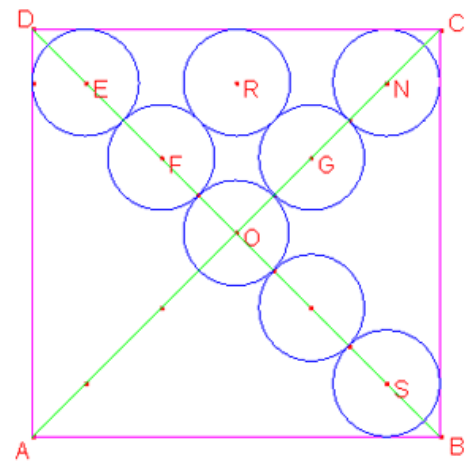
3) Consideriamo il triangolo OAH,  $OA=r\sqrt{2}$ ; la diagonale del quadrato ABCD misura  $2r\sqrt{2} + 8r$  quindi il lato del quadrato misura  $AB = (2r\sqrt{2} + 8r) / \sqrt{2}$ .

*Classe 3F, Scuola Media "G.B. Tiepolo"*  
*Milano (MI)*

1. [[...]]

2.

Disegniamo l'altra diagonale del quadrato (AC), sulla quale disegniamo altre quattro circonferenze uguali a quelle date. Tracciamo le perpendicolari alle diagonali passanti per E, F, G, N. Troviamo il punto R. Il quadrato FOGR (quadrato perché ha tre angoli di  $90^\circ$  e due lati adiacenti congruenti) ha il lato di  $2r$  (r raggio), perciò la distanza dalla circonferenza di centro F o G al punto R è uguale ad un raggio, uguale agli altri raggi. Dimostrando che R si trova sulla stessa retta di E e N (perché [sia E, N come R, N] sono vertici opposti di un quadrato) abbiamo anche dimostrato la possibilità di costruire un'altra circonferenza con centro in R tangente al lato CD e alle circonferenze di centro F e G. Si può ripetere lo stesso procedimento negli altri tre spazi, raggiungendo un totale di 13 circonferenze.



[La figura è incompleta per problemi tecnici nell'uso del software Cabri]

3. [...]

*Paolo Goldoni, classe 3A  
Scuola media "Marco Polo"  
IC "I. Calvino", Fabriano Rolo (RE)*

1)

a) Traccio due rette perpendicolari per il punto A;

b) Con centro in A traccio una circonferenza di raggio arbitrario AB, che diventerà poi il raggio delle monete;

c) Sempre con lo stesso raggio traccio due circonferenze di centro B e C e chiamo D l'altro loro punto di intersezione (vedi fig.1);

d) Traccio la bisettrice AD dell'angolo retto;

e) Con centro in D e raggio AB traccio la circonferenza rappresentante la prima moneta;

f) Con centro nell'intersezione dalla parte opposta di A rispetto a D dell'ultima circonferenza con la bisettrice traccio un'altra circonferenza con lo stesso raggio, e così via, fino ad ottenere 5 circonferenze a due a due tangenti esternamente tra loro e col centro sulla bisettrice.

g) Dal centro E dell'ultima circonferenza mando la parallela ad AB, che interseca la circonferenza nel punto F (vedi fig.2);

h) Dal punto F mando la parallela a AC, che interseca la retta AD in G;

i) Mando da G la parallela ad AB completando il quadrato (fig.3).

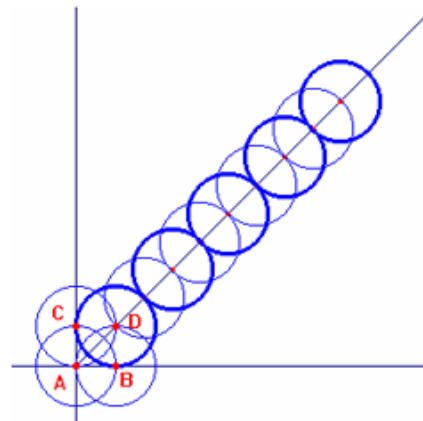


fig.1

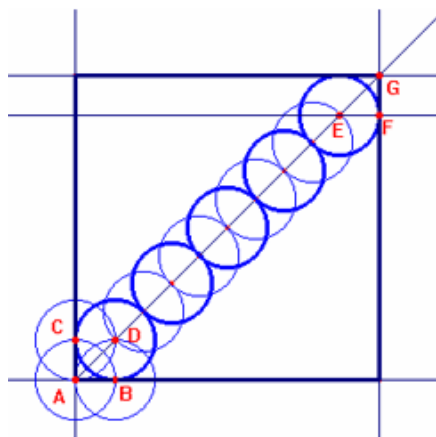


fig.2

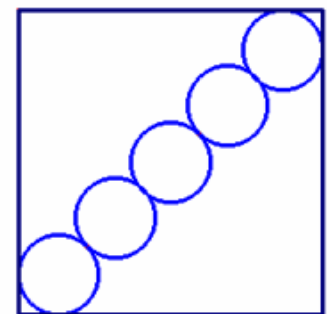


fig.3

2) [...]

3)

a) Considero il quadrato ottenuto congiungendo i vertici delle quattro circonferenze situate agli estremi delle diagonali (vedi fig.5);

b) La sua diagonale misura e quindi il suo lato misura  $8r/\sqrt{2}$ ;

c) Il lato del quadrato contenente le monete supera quello del quadrato precedente di per cui misura  $(8/\sqrt{2} + 2)r$ .

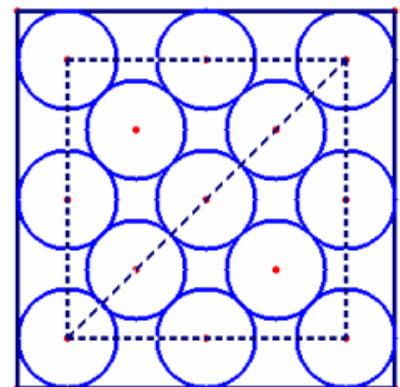
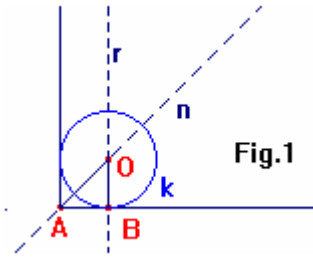
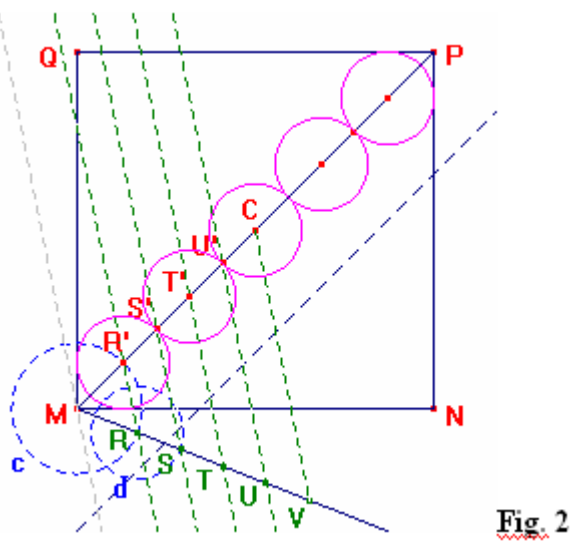


fig.5

Classe 3A, Scuola Media "Zanella"  
Roveredo in Piano (PN)



Due semirette perpendicolari di origine A; bisettrice n; punto O su n; retta r perpendicolare ad una semiretta per O, loro intersezione B; circonferenza k di centro O per B. Se il segmento OB (raggio di k) è 1, il segmento OA è  $\sqrt{2}$  (anche AB è raggio).



1. Quadrato MNPQ; consideriamo la diagonale MP.
  1. Punto medio di MP: C (è il centro della terza circonferenza);
  2. Semiretta di origine M;
  3. Compasso: centro M e raggio OA della Fig. 1: circonferenza c e sua intersezione R con la semiretta;
  4. Compasso: centro R e raggio OB (Fig.1), circonferenza d, sua intersezione S con la semiretta;
  5. Simmetria centrale di R rispetto S: T; analogamente per ottenere i punti U e V;
  6. Segmento CV; rette parallele a CV per U, per T per S, per R e loro rispettive intersezioni con la diagonale MP: U', T', S', R';
  7. Circonferenza di centro R' per S'; circonferenza di centro T' per U'; circonferenza di centro C per U';
  8. Simmetria centrale delle prime due circonferenze tracciate rispetto C (Era sufficiente determinare i punti R' e S' e tracciare la circonferenza di centro R' per S' e con opportune simmetrie centrali disegnare le altre quattro circonferenze).

I segmenti MR, RS, ST, TU, UV misurano rispettivamente  $\sqrt{2}$ , 1, 1, 1, 1, per costruzione; i segmenti MR', R'S', S'T', T'U', U'V' staranno nella stessa proporzione per il Teorema di Talete.

2. [...]
3. [...]

Gennaio 2005

1) Dati un segmento  $BC$  e un angolo acuto di ampiezza  $\alpha$ , costruire un arco di circonferenza che insista su  $BC$  e capace dell'angolo  $\alpha$ .

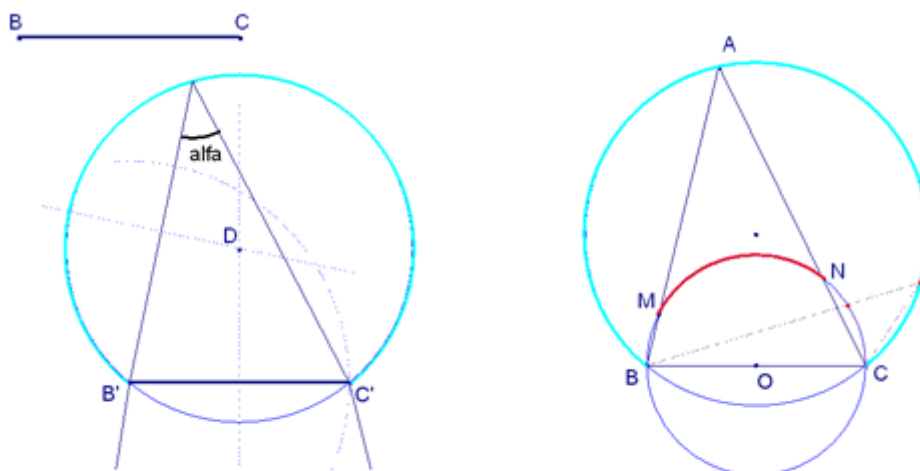
Descrivere e motivare la costruzione.

2) Considerare ora un punto  $A$  su tale arco. Tracciata la circonferenza di diametro  $BC$ , indicare con  $O$  il suo centro e con  $M$  e  $N$  le sue intersezioni con le corde  $AB$  e  $AC$ .

Che cosa si può affermare dell'arco  $MN$  al variare di  $A$  sull'arco  $BC$ ?

Motivare la risposta.

**NOTA:** Chi non riesce a risolvere il punto 1) può rispondere solo al punto 2) considerando la circonferenza circoscritta ad un triangolo acutangolo  $ABC$  e l'arco  $BAC$  di tale circonferenza.



Costruzione descritta nella risposta della SM "C.A. Dalla Chiesa"

## Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte dalle seguenti scuole:

- LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
- LS "Aristosseno" Taranto (TA)
- SM "G. B. Tiepolo", Milano (MI)
- SM "Marco Polo", I.C. "I. Calvino" Rolo (RE)

Il problema proposto comprendeva due parti, ma si dava la facoltà di rispondere alla seconda anche senza aver risolto la prima.

Nella prima si chiedeva di costruire un arco capace di un dato angolo e che sottendesse una corda assegnata. In un "Corso di geometria" di Palatini-Faggioli si trova la seguente definizione: un arco si dice capace di un dato angolo, quando gli angoli in esso inscritti sono tutti congruenti a quello dato.

Nelle risposte ricevute vengono proposti tre diversi percorsi di costruzione, uno di questi è descritto senza riportare la corrispondente figura. Illusteremo questa costruzione con una figura eseguita da noi e presentata a corredo del testo.

Nella seconda parte, tracciata una circonferenza con diametro la corda data ( $BC$ ) e considerato un punto  $A$  sull'arco costruito, si chiedeva di osservare il comportamento dell'arco staccato su quella circonferenza dalle corde  $AB$  e  $AC$ , al variare di  $A$ .

Anche per questa parte le risposte ricevute presentano diversi spunti di risoluzione, alcuni incompleti, uno "fuori tema", ma tutti ugualmente interessanti.

Commenteremo quindi ciascuna risposta, allegando di volta in volta la presentazione delle parti ritenute più significative.

- *SM "C. A. Dalla Chiesa"*: gli studenti Carlo Fabian e Mattia Rovelli della classe 3P hanno risolto entrambi i quesiti. Nella prima parte non compare la figura della loro costruzione essendo la stessa stata utilizzata per rispondere al punto 2); nella seconda parte hanno descritto in modo completo e sufficientemente motivato la variazione dell'arco individuando i limiti entro cui tale arco rimane costante.
- *SM "Marco Polo"*: lo studente Paolo Goldoni della classe 3A ha risolto entrambi i quesiti in modo diverso dalla risposta precedente, non fa un esame completo della variazione dell'arco, ma conclude la sua risposta con una significativa osservazione.
- *SM "Tiepolo"*: gli studenti della classe 3F hanno affrontato solo la seconda parte del problema; la loro risposta è corretta, ma incompleta. Le osservazioni da loro fornite sono già presenti nelle risposte precedenti.
- *LS "Aristosseno"*: gli studenti della classe 1D hanno risposto solo al punto 2), hanno preso in esame casi particolari, ma non hanno completato l'analisi della variazione dell'arco. Hanno fornito una interessante interpretazione del problema.
- *LS "G. B. Scorza"*: la studentessa Mercedes Scarpino della classe 2G propone una costruzione ancora diversa, non del tutto motivata. Inoltre non considera l'arco in cui l'angolo dato è inscritto, ma quello su cui l'angolo insiste. Questo fatto la porta "fuori tema" in quanto nella seconda parte non sono le corde AB e AC che incontrano la circonferenza assegnata, ma i loro prolungamenti. Pubblichiamo ugualmente la sua risposta considerandola un interessante ampliamento del problema proposto.

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

## Soluzioni

*Riccardo Fabbian e Mattia Rovelli*  
*Classe 3° P Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa"*  
*San Genesio ed Uniti (PV)*

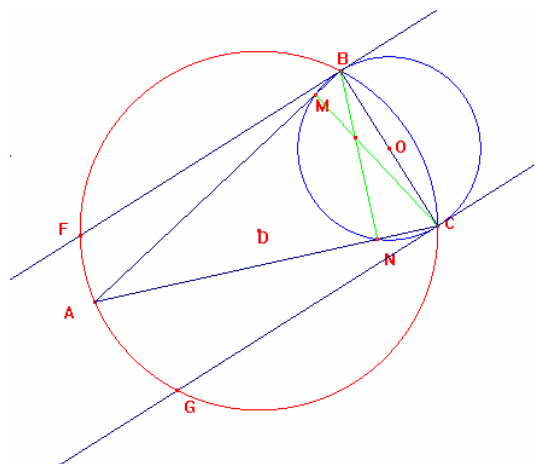
- 1) Dati un segmento BC e un angolo alfa di vertice [A] prendiamo su una semiretta che delimita l'angolo un punto B' e con centro in B' e apertura BC tracciamo una circonferenza. [Una delle intersezioni] di questa con l'altra semiretta dell'angolo la chiamiamo C'. Uniamo B' con C', otteniamo il triangolo A'B'C'. Tracciamo gli assi dei segmenti dei suoi lati e chiamiamo D il loro punto di intersezione. Questo punto è il centro della circonferenza che bisognava costruire. Con apertura DB' tracciamo la circonferenza di centro D e così troviamo l'arco [B'A'C'] capace dell'angolo alfa come richiesto dal problema. [Vedi figura allegata al testo del problema]

- 2) Indichiamo il punto B' con B e il punto C' con C.  
 Chiamiamo C la circonferenza di centro D e C' la circonferenza di centro O.

Tracciamo le tangenti alla circonferenza C' passanti per B e per C (rette perpendicolari al diametro BC) e chiamiamo i punti di intersezione con la circonferenza C, F e G.

[Consideriamo un punto A sull'arco BC]

Quando il punto A descrive l'arco BF il punto M coincide sempre con B e la lunghezza dell'arco MN





passa da un valore zero (quando A coincide con B) al valore "l" quando A coincide con il punto F. Quindi la lunghezza dell'arco aumenta fino al valore "l". Quando A coincide con F l'angolo ABC è retto perché FB è tangente alla circonferenza C' e l'angolo BCA misura  $(90^\circ - \alpha)$  ed insiste sull'arco MN di lunghezza "l".

Quando A descrive l'arco FG la lunghezza dell'arco MN non varia e si mantiene di lunghezza uguale ad "l" essendo MN un arco su cui insiste, nella circonferenza C', l'angolo alla circonferenza MCN di ampiezza [costante]  $(90^\circ - \alpha)$  (infatti il triangolo BNC è rettangolo in N perché inscritto in una semicirconferenza, quindi  $\angle BNA = 90^\circ$ ,  $\angle ABN = (90^\circ - \alpha) = \angle MCN$  perché insistono su uno stesso arco)

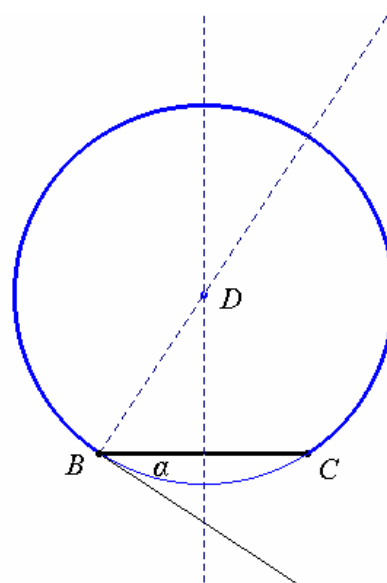
Quando A descrive l'arco GC il punto N coincide con C e dato che il punto M si muove (al variare di A) verso C l'arco MN diminuisce di lunghezza fino a raggiungere ancora il valore zero.

**Paolo Goldoni, classe 3A**  
**Scuola media "Marco Polo"**  
**IC "I. Calvino", Fabriano (RE)**

1)

**DESCRIZIONE**

1. Riporto l'angolo  $a$  col vertice in B e un lato sul segmento BC;
2. Mando l'asse di BC;
3. Mando la perpendicolare al secondo lato di  $a$  nel punto B e indico con D la sua intersezione con l'asse di BC;
4. Con centro in D e raggio DB traccio una circonferenza.
5. L'arco cercato è l'arco BC situato nel semipiano opposto a quello contenente il secondo lato di  $a$ .



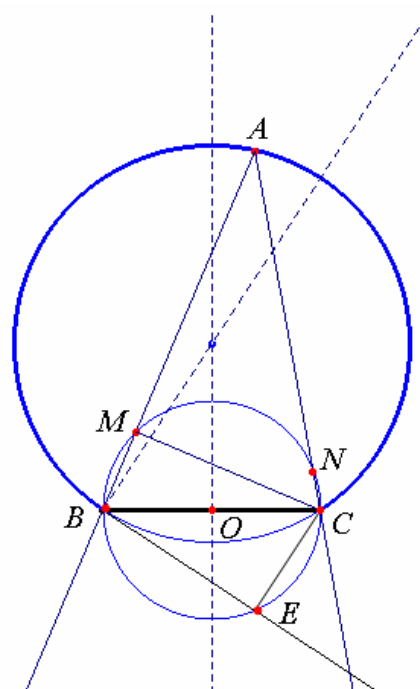
**MOTIVAZIONE**

Gli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda BC e che hanno il vertice nell'arco trovato sono tutti uguali fra loro e, in particolare, all'angolo  $a$ .

2) [La lunghezza] dell'arco MN non dipende [dalla posizione del punto] A ed è uguale all'arco tagliato dal secondo lato dell'angolo  $a$  sulla circonferenza di diametro BC.

Infatti l'angolo BMC è retto perché inscritto in una semicirconferenza e quindi il triangolo ACM è rettangolo in M e il suo angolo MCN misura  $(90^\circ - a)$ . Ma anche il triangolo BCE è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza e l'angolo BCE misura pure  $(90^\circ - a)$ . Poiché angoli alla circonferenza uguali insistono su archi uguali ne segue che l'arco MN è uguale all'arco BE.

**Osservazione.** Le intersezioni M e N delle corde [AB e AC con la circonferenza di centro O] non esistono sempre, mentre la proprietà continua a



valere a patto che si considerino le intersezioni delle **semirette**  $AB$  e  $AC$  con la circonferenza.

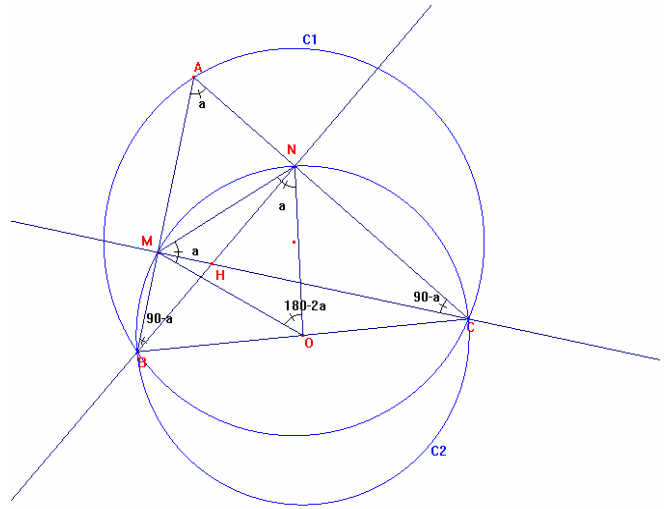
**Classe I D liceo scientifico Brocca**  
**Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)**

Rispondiamo solo al punto 2) del problema .  
Considerato il triangolo  $ABC$  e la circonferenza  $C1$  circoscritta ad esso, abbiamo tracciato la circonferenza  $C2$  di diametro  $BC$  e centro  $O$  ,  
indicando quindi con  $M$  ed  $N$  i punti intersezione delle corde  $AB$  e  $AC$  con la circonferenza  $C2$  .

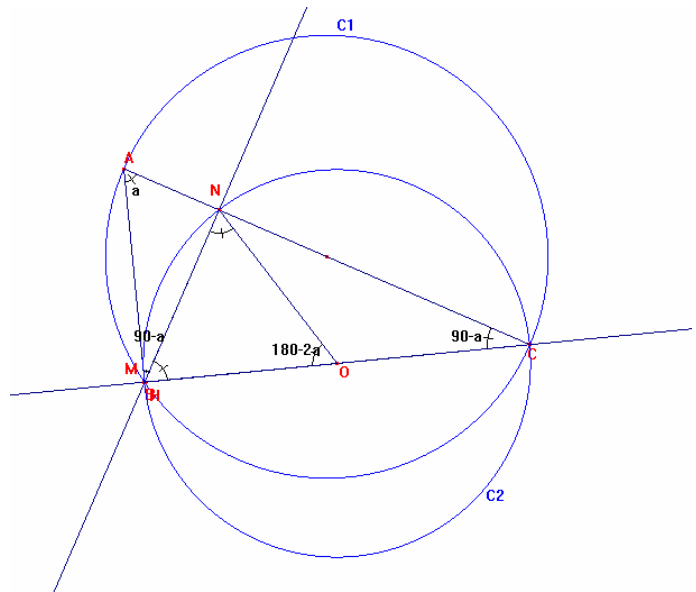
[[...]]

[Osservazioni]

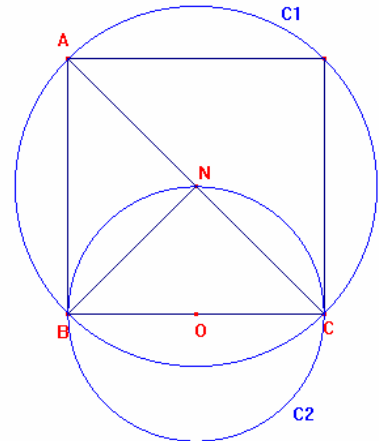
In un qualunque triangolo acutangolo in  $A$  , in cui l'ampiezza dell' angolo in  $A$  non varia (e quindi inscritto in una circonferenza), gli estremi dell'arco  $MN$  possono essere intercettati sui lati del triangolo come piedi delle altezze condotte dai restanti due vertici  $B$  e  $C$  del triangolo sui rispettivi lati opposti: la semicirconferenza di centro il punto medio del terzo lato  $BC$  è il luogo descritto da ciascuno dei punti  $M$  ed  $N$  mentre il punto  $A$  descrive l'arco  $BAC$ .  
[I punti  $M$  e  $N$  descrivono l'intera circonferenza se si considerano le semirette  $AC$  e  $AB$ . Vedi osservazione SM "Marco Polo"]



Quando in particolare il segmento  $AC$  è diametro della circonferenza  $C1$ , e quindi il triangolo  $ABC$  è rettangolo in  $B$  (come in figura) o in  $C$ , uno degli estremi dell'arco  $MN$  (in figura  $M$ ) coincide con uno degli estremi del diametro  $BC$  (in figura con  $B$ ), e l'arco  $MN$  è tale che la corda  $MN$  [sottesa da] esso è l'altezza relativa all'ipotenusa  $AC$  del triangolo .



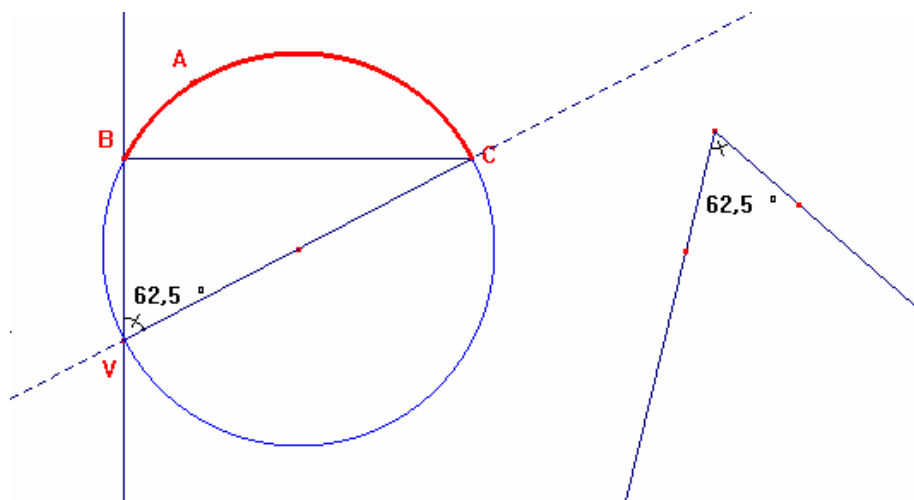
In questo secondo caso, se in particolare  $\alpha = 45^\circ$  l'arco  $MN$  è la quarta parte della circonferenza  $C2$  in quanto la corda  $MN$  è il lato del quadrato ad essa inscritto.



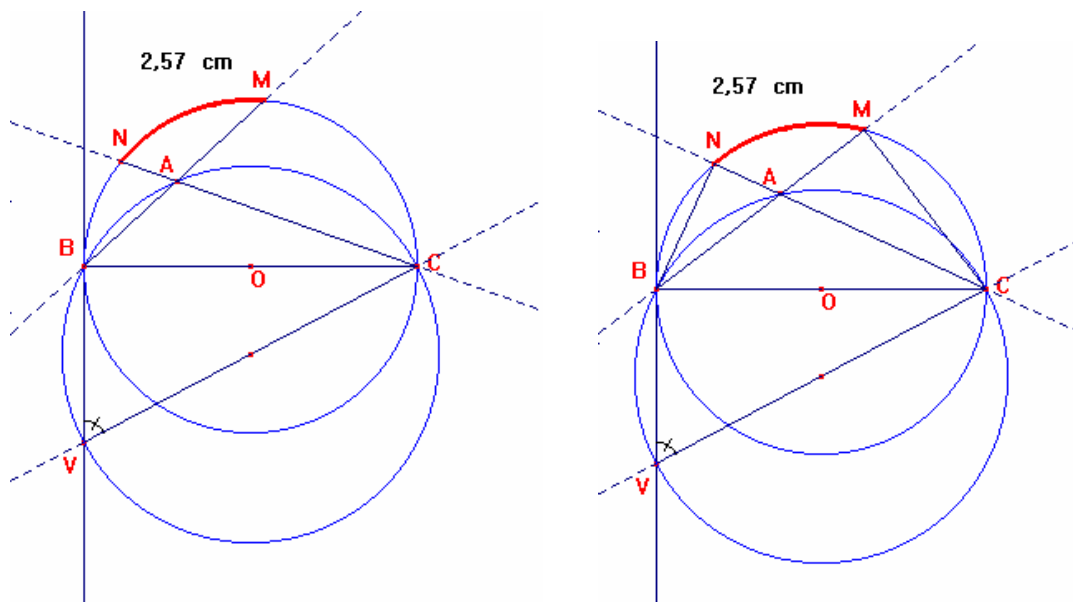
Mercedes Scarpino, classe 2G  
 Liceo Scientifico "G. B. Scorza", Cosenza (CS)

1)  
**COSTRUZIONE E DIMOSTRAZIONE:**

Dato il segmento BC, traccio la perpendicolare ad esso passante per il punto B, sulla quale si individua un punto V tale che l'angolo BVC sia congruente all'angolo  $\alpha$  dato [si doveva dare una costruzione esatta della posizione di V, ad esempio costruendo in C un angolo con misura  $(90^\circ - \alpha)$ ]. CV è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BCV ed è anche il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo BCV, dato che tutti i triangoli rettangoli possono essere inscritti in una semicirconferenza avente per diametro l'ipotenusa stessa. Sulla circonferenza così ottenuta i punti B e C individuano l'arco BAC richiesto [l'arco richiesto non è quello indicato in figura, ma l'arco in cui è inscritto l'angolo BVC].



2)



Al variare di A sull'arco BC, l'arco MN rimane sempre costante [in questo caso l'affermazione è vera per ogni posizione di A sull'arco considerato].

**DIMOSTRAZIONE:**

Considero il quadrilatero ABVC che si è venuto a formare, esso è inscritto nella circonferenza di diametro CV, ed in esso, come in tutti i quadrilateri inscritti in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari. Perciò se l'angolo BVC è  $\alpha$ , l'angolo BAC ad esso opposto è  $(180^\circ - \alpha)$ , e l'angolo MAC supplementare a quest'ultimo è  $\alpha$ .

Essendo  $BMC = 90^\circ$  ( perché angolo retto del triangolo BMC inscritto nella semicirconferenza di diametro BC), l'angolo **MCA** è  $(90^\circ - \alpha)$ , perché complementare dell'angolo MAC.

A sua volta anche l'angolo NAB è supplementare dell'angolo BAC, e quindi è anch'esso  $\alpha$ .

Essendo  $BNC = 90^\circ$  ( perché angolo retto del triangolo BNC inscritto nella semicirconferenza di diametro BC), l'angolo **NBA** è  $(90^\circ - \alpha)$ , perché complementare dell'angolo NAB.

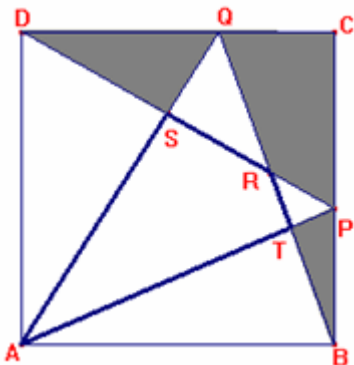
I due angoli alla circonferenza MCA e NBA sono perciò congruenti fra loro; ma, al variare di A sull'arco BC, i due triangoli MAC ed NAB continuano ad essere rettangoli e con gli angoli MCA ed NBA, rispettivamente, congruenti a  $(90^\circ - \alpha)$ .

Quindi, poiché in una stessa circonferenza angoli alla circonferenza congruenti insistono su archi congruenti, gli archi NM sottesi dagli angoli suddetti sono sempre congruenti fra loro e quindi l'arco NM è sempre costante.

Febbraio 2005

Dato un quadrato ABCD siano P e Q due punti qualunque presi rispettivamente sui lati BC e CD.

Congiungendo P e Q con gli estremi dei lati ad essi opposti, si ottiene il quadrilatero ATRS, come si vede nella figura allegata.



- Dimostrare che tale quadrilatero è equivalente alla parte di figura colorata in grigio.
- Se P e Q sono i punti medi dei lati BC e CD, quali caratteristiche assume il quadrilatero ATRS?
- Calcolare l'area di ATRS del caso b) considerando 1 (uno) la misura del lato del quadrato.

## Commento

Ci sono pervenute sette risposte da sei scuole equamente divise fra secondaria inferiore e secondaria superiore:

- LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)
- LS "Aristosseno" Taranto (TA)
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV) – due risposte
- SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
- ITI, LST "F. Berenini", Fidenza (PR)
- SM "G. B. Tiepolo", Milano (MI)

Il problema proposto in questo mese, per evitare lunghe descrizioni, era accompagnato dalla figura. A questa faremo ora riferimento per descriverne gli aspetti essenziali: presi due punti, P e Q, su due lati consecutivi di un quadrato ABCD, congiungendoli con gli estremi dei lati a loro opposti, si ottiene il quadrilatero ATRS.

- Primo quesito: dimostrare l'equivalenza fra il quadrilatero ATRS e la parte di quadrato colorata in grigio. Le risposte a questo quesito sono, tranne una, corrette e completamente giustificate.
- Secondo quesito: osservare, motivandole, le caratteristiche del quadrilatero ATRS nel caso particolare che i punti P e Q siano i punti medi dei lati del quadrato. La figura assume una "evidente" simmetria rispetto alla diagonale AC del quadrato e probabilmente per questo motivo in nessuna delle risposte questa parte è stata risolta in modo esauriente.

Si fa notare che i vertici T, R, S non sono assegnati, ma risultano dalle intersezioni delle congiungenti prima dette. Si doveva quindi valutare il ruolo assunto da questi punti nel caso particolare proposto: S e T diventano vertici di angoli retti; R si viene a trovare sulla diagonale del quadrato e la divide in due parti una doppia dell'altra (infatti R diviene baricentro del triangolo DBC come hanno osservato due studenti dell'ITI "Berenini"). L'appartenenza di un punto a un segmento, come pure l'allineamento di tre punti, è una

questione “sottile” che spesso sfugge agli studenti, tratti in inganno dalla evidenza della figura.

- Terzo quesito: si chiedeva il calcolo dell'area di ATRS, che nel caso particolare diventa un deltoide. Non tutti hanno risposto a questa parte: chi non ha “visto” gli angoli retti in S e T non era in grado di risolverla.

#### Altre osservazioni:

- non sempre, dove si fa ricorso alle isometrie, le proprietà osservate vengono giustificate in modo esplicito; ribadiamo che prima di affermare che triangoli con un vertice in R sono simmetrici rispetto all'asse AC, si doveva far notare che i segmenti simmetrici BQ e DP si incontrano sull'asse AC;
- per chi ha utilizzato i criteri di congruenza dei triangoli, dimostrare l'allineamento di R con A e C non è immediato, si possono sfruttare le proprietà del triangolo isoscele BDC in cui BQ e DP sono mediane;
- nei calcoli è preferibile esprimere i risultati in forma esatta, ricorrendo agli opportuni simboli (frazioni, radici quadrate, ...);
- non si devono confondere i teoremi di Euclide con quello di Talete.

Presentiamo parti delle risposte di seguito elencate, corredate da ulteriori nostri commenti. Quelle che contengono caratteri speciali sono proposte in formato PDF.

- SM “C. A. Dalla Chiesa”, classe 2P, prima parte, in cui si è scelta una esposizione discorsiva, ma esauriente.
- SM “C. A. Dalla Chiesa”, classe 3P, seconda e terza parte in cui si ricorre alla congruenza dei triangoli e alla similitudine (con figura presa a prestito dalla classe 2P perché mancante).
- SM “Zanella”, seconda e terza parte; nella seconda si utilizzano le isometrie e si dimostra il ruolo assunto dal punto R.
- LS “Aristosseno”, tutta; la seconda parte presenta alcune carenze nelle giustificazioni, ma in essa vengono individuate tutte le caratteristiche della figura.

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

## Soluzioni

*Elda Bistika, Erika Dargenio, Monica Maida*

*Classe 2P, Scuola Media “C.A. Dalla Chiesa” di San Genesio ed Uniti (PV)*

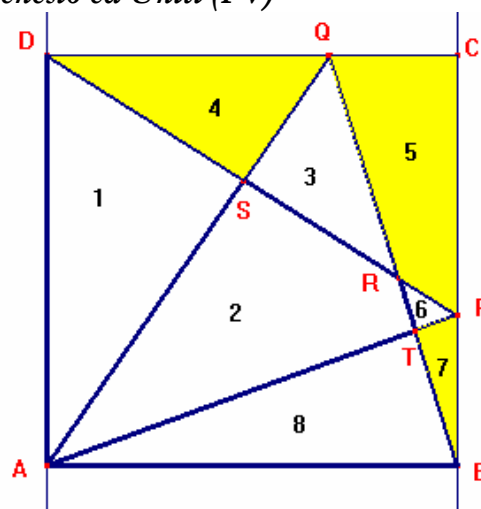
a)

Il triangolo AQB (formato dalle figure 3,2,8) è equiesteso al triangolo DPA (formato dalle figure 1,2,6) perché hanno la stessa base  $AD=AB$  e la stessa altezza: infatti la distanza del punto P dal lato DA è uguale alla distanza del punto Q dal lato AB, che è uguale al lato del quadrato.

Inoltre ognuno di questi triangoli è equiesteso a metà del quadrato in quanto le dimensioni utilizzate nel calcolo dell'area del triangolo ( $l^2/2$ ) sono uguali al lato del quadrato ( $l^2$ ).

Abbiamo visto che i triangoli AQB e DAP hanno in comune la figura indicata con il numero 2, e poiché i due triangoli sono equiestesi vuol dire che la somma delle aree delle figure indicate con 8 e 3 è uguale alla somma delle aree delle figure indicate con 1 e 6 ( $3+2+8=1+2+6$  per cui  $3+8=1+6$ )

Se il triangolo APD è equiesteso a metà quadrato anche la rimanente superficie (che chiameremo “rimanente”) cioè la somma delle figure 4,3,5,7,8 è equiestesa a metà quadrato.



Se togliamo dal triangolo APD le figure 1+6 e dal “rimanente” le figure 3+8 equiestese a 1+6 otteniamo che la figura 2 è equiestesa alla somma delle figure 4+5+7. Quindi il quadrilatero ASTR è equiesteso alla parte di figura colorata in grigio per differenza di parti equiestese.

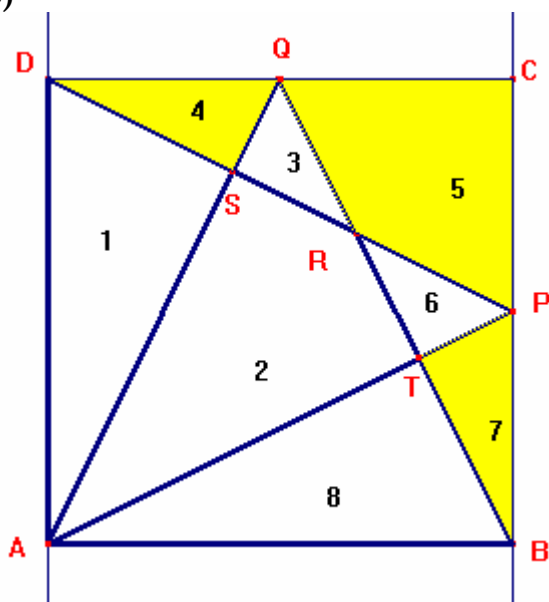
b) [[...]]

c) [non risolto]

*Davide Cua, Riccardo Fabbian, Mattia Rovelli  
 classe 3P, S.M.S. di San Genesio ed Uniti (PV)*

a) [[...]]

b)



Nel caso in cui i punti P e Q sono punti medi dei lati BC e CD consideriamo i triangoli ADQ, BQC e ABP sono uguali perché hanno i cateti di uguale misura:  $AD=AB=BC$  e  $DQ=BP=QC$  per costruzione. Indichiamo gli angoli  $DAQ = PAB=QBC= \alpha$ , allora gli angoli  $DQA=APB= BQC= (90^\circ-\alpha)$ . Consideriamo il triangolo ATB avente l'angolo TAB uguale ad  $\alpha$ , l'angolo ABT è  $(90^\circ-\alpha)$ , quindi  $BTP=90^\circ$ . Si dimostra nello stesso modo che  $DSA=90^\circ$ . I triangoli ADS e ABT' sono triangoli rettangoli congruenti perché hanno rispettivamente uguale un lato  $AD=AB$  e gli angoli uguali pertanto  $AS=AT$ . I triangoli ASR e ATR sono triangoli rettangoli congruenti avendo  $AS=AT$  e gli angoli  $SAR=RAT=(45^\circ -\alpha)$  [questa affermazione è vera solo se R appartiene alla diagonale AC, vedi commento], quindi anche  $SR=RT$ .

Il quadrilatero ASRT è un deltoide perché ha due coppie di lati consecutivi uguali.

c) I triangoli ATQ e SQR sono triangoli rettangoli ( $ATQ=QSR=90^\circ$ ) ed inoltre hanno l'angolo AQT in comune, per cui si deduce che gli angoli  $QAT=QRS$  perché complementari di angoli uguali e quindi i triangoli sono simili.

$$AQ = \sqrt{AD^2+DQ^2} = (\sqrt{5})/2$$

$$DS = (AD \cdot DQ)/AQ = (\sqrt{5})/5$$

$$SQ = \sqrt{DQ^2-DS^2} = (\sqrt{5})/10$$

$$AS = AQ-SQ = 2(\sqrt{5})/5$$

$$QT = \sqrt{AQ^2-AT^2} = 3(\sqrt{5})/10$$

$$SR/AT = SQ/QT$$

$$SR = (AT \cdot SQ)/QT = 2(\sqrt{5})/15$$

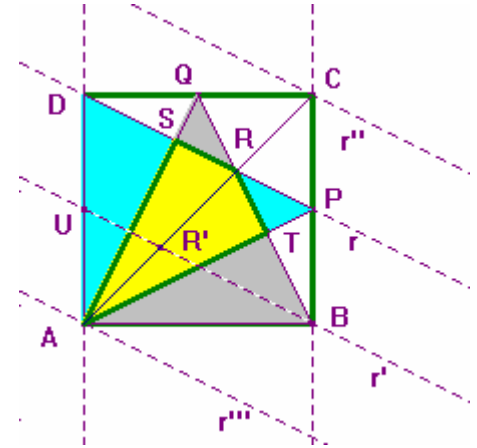
$$\text{Area (ASRT)} = AS \cdot SR = 4/15 \text{ essendo l'area del quadrato ABCD} = 1$$

Classe 3A, Scuola Media "Zanella"  
Roveredo in Piano (PN)

a) [...]

b)

- I lati corrispondenti dei triangoli ABQ e APD sono perpendicolari, perché il triangolo ABQ si ottiene con una rotazione di 90° del triangolo APD attorno al punto medio della diagonale AC del quadrato. Conseguo [poiché AP va in BQ e PD in QA] che i triangoli ATR e ASR sono rettangoli rispettivamente in T e S. (I triangoli ABQ e APD sono simmetrici rispetto la diagonale AC [quindi i lati corrispondenti BQ e PD si incontrano su AC])
- I triangoli ABP e AQP sono rettangoli e tra loro congruenti per costruzione; i segmenti BT e DS sono altezze rispetto l'ipotenusa dei rispettivi triangoli; AT e AS sono le proiezioni del cateto maggiore sull'ipotenusa (tra loro congruenti).



- I triangoli rettangoli ATR e ASR sono congruenti perché AT e AS congruenti per quanto detto sopra e AR è lato in comune.

- Il segmento AR è 2/3 della diagonale del quadrato per quanto segue

- Retta r per PD; retta r' parallela ad r per B, sua intersezione U con il lato AD, sua intersezione R' con AC; retta r'' parallela ad r per C; retta r''' parallela ad r per B. Se P è punto medio del lato BC anche R è punto medio del segmento CR' per il teorema di Talete; se BP è metà lato, anche DU lo è per lo stesso teorema, consegue che anche R' è punto medio del segmento RA. I punti R ed R' dividono la diagonale AC in tre parti uguali.

c)

$AP = \frac{\sqrt{5}}{2}$  (ipotenusa del triangolo rettangolo ABP, teorema di Pitagora)

$TB = \frac{1}{\sqrt{5}}$  (cateto\*cateto/ipotenusa;  $1 \cdot 1/2/\sqrt{5}/2$ ); triangolo ABP)

$AT = \frac{2}{\sqrt{5}}$  (cateto maggiore del triangolo ABT; teorema di Pitagora)

$AR = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}$  ( $\frac{2}{3}$  diagonale del quadrato di lato 1)

$RT = \frac{2}{\sqrt{45}}$  (cateto minore del triangolo ATR; teorema di Pitagora)

Area del poligono ATRS =  $2 \cdot (AT \cdot RT) / 2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{45}}) = \frac{4}{15}$  (dell'area del quadrato)

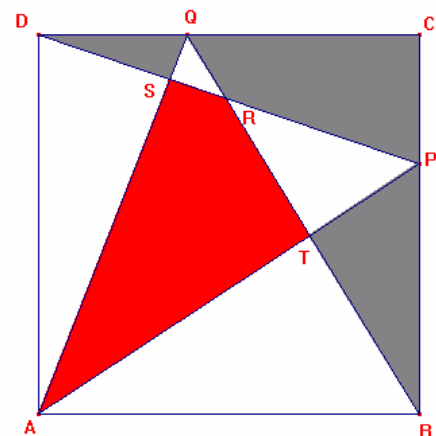
Notaristefano Preethi, classe I G

Liceo "Aristosseno", Taranto

a) Costruendo la figura del problema, osserviamo che i triangoli AQB ed APD, avendo basi e altezze congruenti, sono equiestesi e che l'area di ciascuno di essi è la metà di quella del quadrato ABCD.

Poiché le figure che si ottengono dalla differenza di figure congruenti (o equiestese) sono equiestese, sottraendo da ciascuno dei suddetti triangoli il quadrilatero ATRS, possiamo dire che la somma delle aree dei triangoli ASD e TPR (indicate tra le parentesi tonde) è uguale alla somma delle aree dei triangoli ABT ed RQS, ovvero:

$$(ASD) + (TPR) \equiv (ABT) + (RQS)$$





Pertanto risulterà:

$$(ATRS) \equiv (APD) - (ASD + TPR) \equiv (PCD + ABP) - (ABT + RQS) \equiv (PCD - RQS) + (ABP - ABT)$$

che è l'area colorata in grigio.

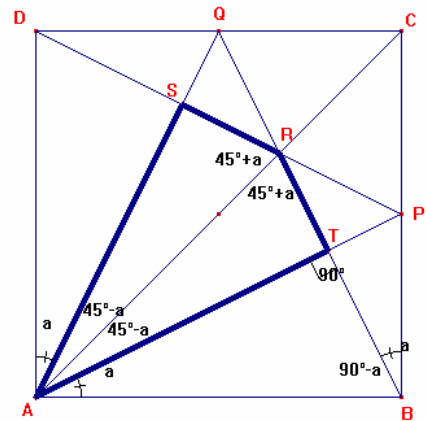
**b)** Nel caso particolare in cui i punti P e Q sono punti medi dei lati BC e CD, il quadrilatero ATRS è un deltoide, unione dei due triangoli rettangoli congruenti ATR ed ASR [perché? *Affermazione da dimostrare in modo esplicito, anche se messa in evidenza nella figura*] la cui ipotenusa, la diagonale AR, giace sulla diagonale AC del quadrato [anche questa affermazione è da dimostrare, vedi commento] e misura i 2/3 di AC (come spiegato in seguito) [vedi commento]. Il quadrilatero ATRS è inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza, in quanto gli angoli opposti sono supplementari e la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due (sono a due a due congruenti i lati adiacenti) come si deduce dalla figura.

**c)** Per il calcolo della misura dell'area del quadrilatero ATRS, supponendo  $AB = 1$ , calcoliamo anzitutto la misura di AP (che coincide con quelle di PD, di AQ e di BQ), applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABP:

$$AP = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad (\text{essendo } BP = \frac{1}{2}).$$

Poi calcoliamo la misura di AT applicando allo stesso triangolo il primo teorema di Euclide:

$$AT = \frac{AB^2}{AP} = \frac{1}{AP} = \sqrt{\frac{4}{5}}.$$



Se congiungiamo infine T con S e P con Q, dalla similitudine dei triangoli ATS ed APQ (in tratteggio) si ha che:

$$\frac{AT}{AP} = \frac{TS}{PQ} \quad \text{per cui} \quad :$$

$$TS = \frac{4}{5} PQ = \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

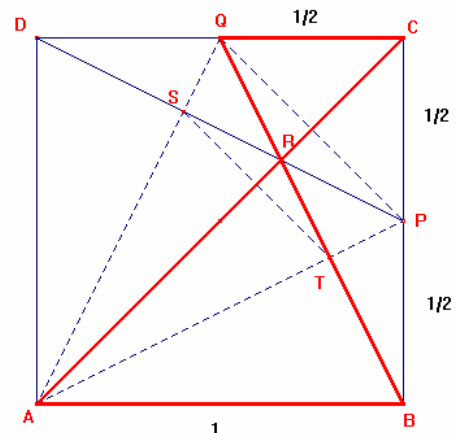
(essendo  $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  l'ipotenusa del triangolo rettangolo

isoscele PCQ i cui cateti misurano  $\frac{1}{2}$ )

Sono simili anche i triangoli ABR e CRQ (nella figura sono in rosso),  $AR = 2RC$  e quindi:

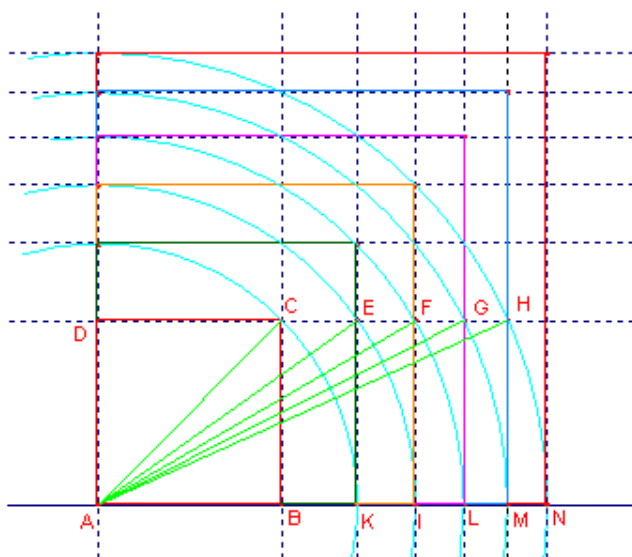
$$AR = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Pertanto: } (ATRS) = \frac{1}{2} AR \cdot TS = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{15}.$$



Marzo 2005

1. Dato un segmento di lunghezza  $a$ , costruire il quadrato equivalente alla superficie totale del cubo di spigolo  $a$ .
2. Confrontare la diagonale del quadrato ottenuto con quella del cubo



$$AB = a$$

$$AK = AC = a \cdot \sqrt{2}, \dots$$

$$AN = AH = a \cdot \sqrt{6}$$

## Commento

Abbiamo ricevuto otto risposte di cui una non è stata accolta perché priva della costruzione richiesta.

Le risposte accolte provengono dalle scuole:

- LS "Aristosseno" Taranto (TA)
- LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
- SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
- SM "Via Ribolle", Forlì (FC)
- SM IC "De Amicis", Busto Arsizio (VA)
- SM "G. B. Tiepolo", Milano (MI)

Nel problema assegnato si chiedeva di costruire un quadrato equivalente alla superficie di un cubo e di confrontare le diagonali delle due figure.

Le soluzioni pervenute sono corrette anche se non tutte esaurienti nelle giustificazioni e/o precise nella esposizione. In esse si espongono tre diversi percorsi di costruzione, di cui due dedotti dal calcolo della misura del lato del quadrato richiesto e una basata sulla equivalenza di superfici.

Nelle risposte del LS "Scorza", della SM "Dalla Chiesa" e della SM "De Amicis", si costruisce la "chiocciola" basata sul teorema di Pitagora per ottenere i segmenti le cui misure, rispetto allo spigolo del cubo, sono successivamente le radici quadrate dei numeri naturali 2, 3, ...

Nelle risposte del LS "Aristosseno", della SM "Via Ribolle" e della SM "Tiepolo" si ricorre ad un opportuno triangolo equilatero per costruire il segmento che misura la radice quadrata di sei rispetto allo spigolo del cubo.

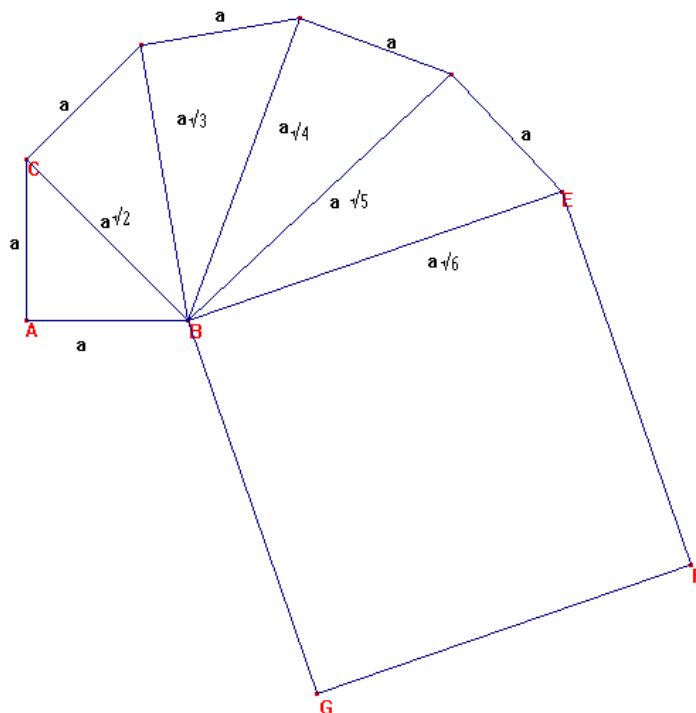
Infine presenteremo la risposta della SM "Zanella", in cui si utilizzano i teoremi di Euclide per trasformare un rettangolo, equivalente alla superficie del cubo, nel quadrato equiesteso.

Nella nostra figura, allegata al testo del problema, presentiamo una ulteriore costruzione, basata sul teorema di Pitagora, che permette di ottenere una successione di quadrati di area doppia, tripla, ..., rispetto al quadrato iniziale.

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

## Soluzioni

*Davide Cua, Riccardo Fabbian, Virginia Lucaccini, Thomas Neri, Mattia Rovelli,  
Classe 3P, Scuola Media "C. A. Dalla Chiesa"  
San Genesio ed Uniti (Pavia)*



1) Se “a” è lo spigolo del cubo, l’area di una faccia del cubo è  $a^2$  e quindi la superficie totale del cubo è  $6a^2$ .

L’area del quadrato equiesteso alla superficie totale del cubo è  $6a^2$  perciò il lato del quadrato è  $\sqrt{6a^2} = \sqrt{6}\sqrt{a^2} = a\sqrt{6}$

Per costruire il lato del quadrato abbiamo utilizzato la costruzione con riga e compasso di  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4}$  ecc che avevamo fatto in 2° media:

- Costruiamo un triangolo rettangolo isoscele ABC con il cateto di misura “a”

- L’ipotenusa del triangolo misura  $a\sqrt{2}$

- Mandiamo una retta perpendicolare all’ipotenusa CB passante per il punto C

- Su questa retta perpendicolare riportiamo un segmento di misura “a”

- Uniamo l’estremo del segmento con il punto B

- Otteniamo un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura :

$$\sqrt{(a^2 + (a\sqrt{2})^2)} = a\sqrt{3}$$

- Ripetiamo la procedura fino ad ottenere un segmento la cui misura è

$$a\sqrt{6}$$

- Costruiamo su questa ipotenusa il quadrato BEFG la cui area è  $6a^2$ .

2) Diagonale del cubo è  $a\sqrt{3}$

Diagonale del quadrato BEFG è  $a\sqrt{6}\sqrt{2} = a\sqrt{12} = 2a\sqrt{3}$ . Quindi la diagonale del quadrato BEFG è il doppio della diagonale del cubo.

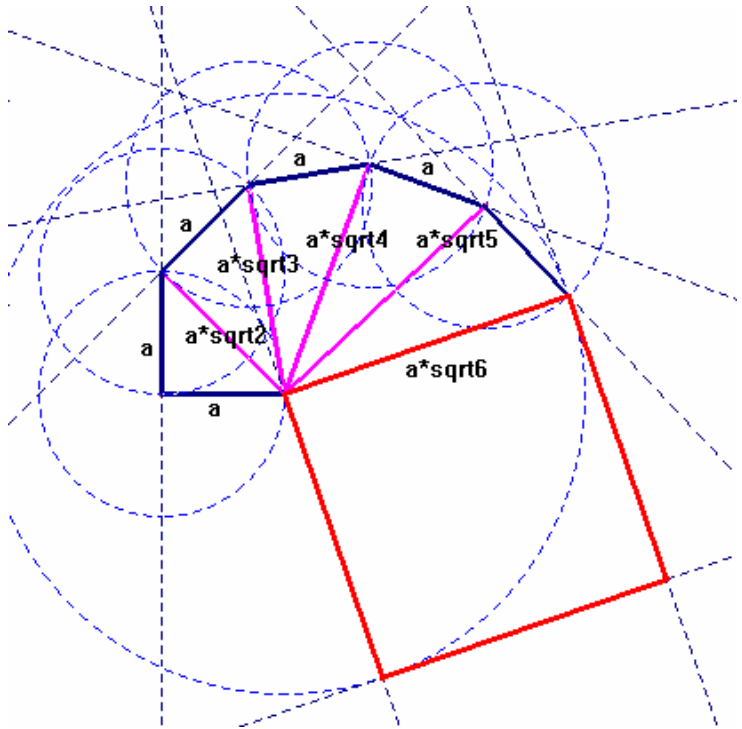
Mercedes Scarpino, Classe 2 G  
Liceo Scientifico "G. B. Scorza"  
Cosenza (CS)

1.

**Spiegazione:**

La superficie totale del cubo di spigolo  $a$  è uguale a  $6 * a^2$ , per cui il quadrato equivalente ha come lato  $\sqrt{6 * a^2}$ , cioè  $\sqrt{a^2} * \sqrt{6} = a * \sqrt{6}$ .

Per determinare graficamente  $a * \sqrt{6}$  ho utilizzato il teorema di Pitagora, disegnando dapprima un triangolo rettangolo isoscele di cateto  $a$ ; in tal modo la sua ipotenusa è  $a * \sqrt{2}$ . Ho disegnato poi un altro triangolo rettangolo avente come cateti l'ipotenusa appena ottenuta ed il segmento  $a$ . L'ipotenusa di questo triangolo è  $a * \sqrt{3}$ . Ripetendo la stessa operazione altre tre volte ottengo il segmento di lunghezza  $a * \sqrt{6}$ , sul quale sarà facile costruire poi un quadrato.



2.

**dc** = diagonale del cubo

**dq** = diagonale del quadrato

**Dimostrazione:**

La diagonale del quadrato ottenuto è  $a * \sqrt{6} * \sqrt{2} = a * \sqrt{12}$  (per il teorema di Pitagora).

La diagonale del cubo di spigolo

$$a \text{ è } \sqrt{(a * \sqrt{2})^2 + a^2} =$$

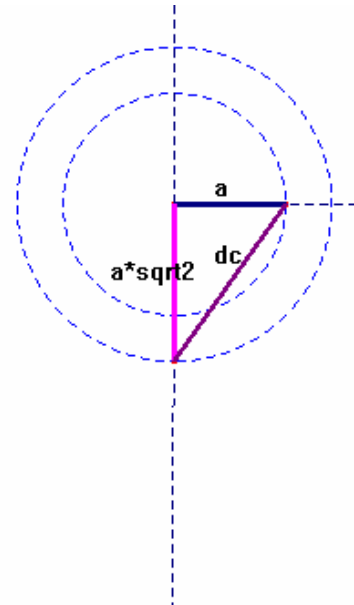
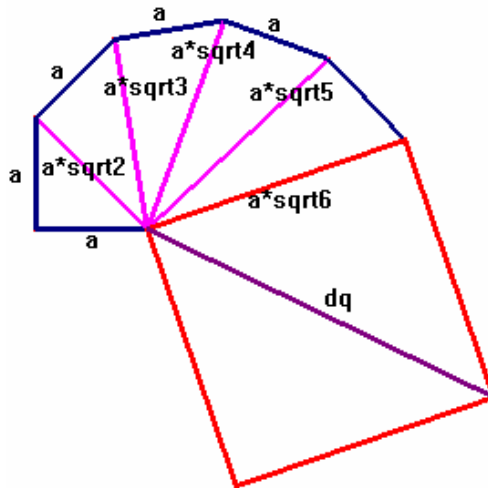
$$\sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a * \sqrt{3}$$

(sempre per il teorema di Pitagora).

$$\text{Ma } a * \sqrt{12} = a * \sqrt{3} * \sqrt{4} = 2a$$

$* \sqrt{3}$ ; dunque la diagonale del

quadrato ottenuto è il doppio di quella del cubo di spigolo  $a$ .



Gabrieli Gianluca, Lunardon Luca, Colombo Alessandra  
 Meneghini Simone, Furlato Elisa  
 Classe 2D, 3D  
 Istituto Comprensivo De Amicis, Busto Arsizio (VA)

1.

L'area della superficie totale del cubo è uguale all'area di 6 quadrati congruenti di lato  $a$  e cioè  $6a^2$ .  
 Ora per costruire il lato del quadrato ( $l=a\sqrt{6}$ ) equivalente alla superficie totale del cubo di spigolo  $a$   
 procedo in questo modo:

- Prendo in considerazione il triangolo rettangolo isoscele con cateto  $a$  e per mezzo della  
 chiocciola, rappresentazione grafica [delle radici quadrate dei numeri naturali] [...], proseguo  
 così:

Triangolo I: misura ipotenusa =  $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Triangolo II: misura ipotenusa =  $\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

...

Triangolo V: misura ipotenusa =  $\sqrt{(a\sqrt{5})^2 + a^2} = \sqrt{5a^2 + a^2} = a\sqrt{6}$

L'ipotenusa del triangolo V sarà il lato del quadrato cercato e su di esso, con riga e compasso,  
 costruisco il quadrato.

2.

d, diagonale del quadrato è

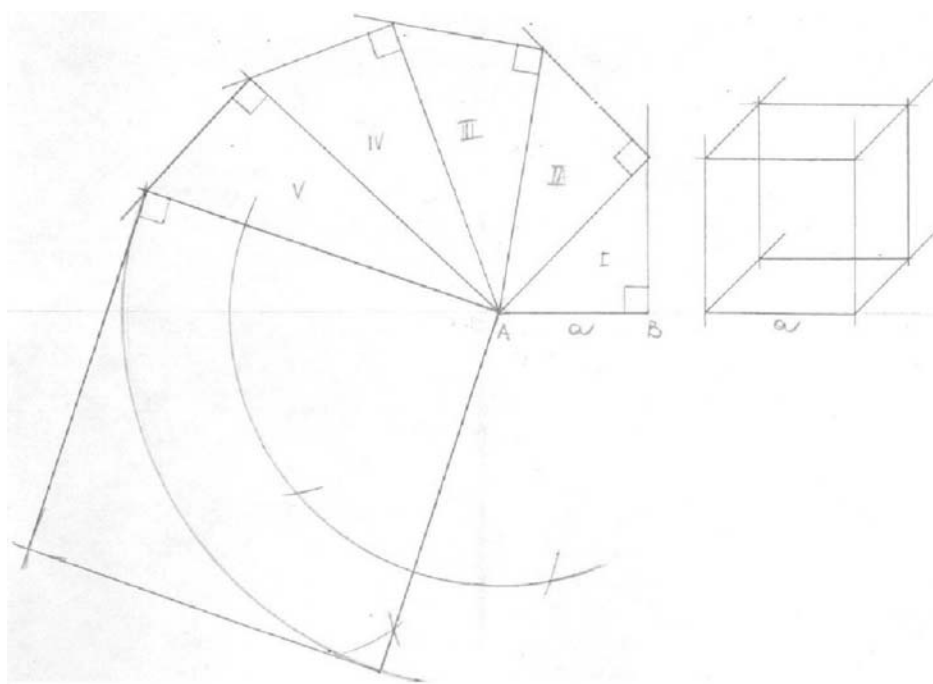
$$\sqrt{(a\sqrt{6})^2 + (a\sqrt{6})^2} = a\sqrt{12} = 2a\sqrt{3}$$

D, diagonale del cubo è

$$a\sqrt{3}$$

$$d/D = (2a\sqrt{3}) / (a\sqrt{3}) = 2$$

Pertanto la diagonale del quadrato è doppia di quella del cubo



**Classe I D - Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto (TA)**

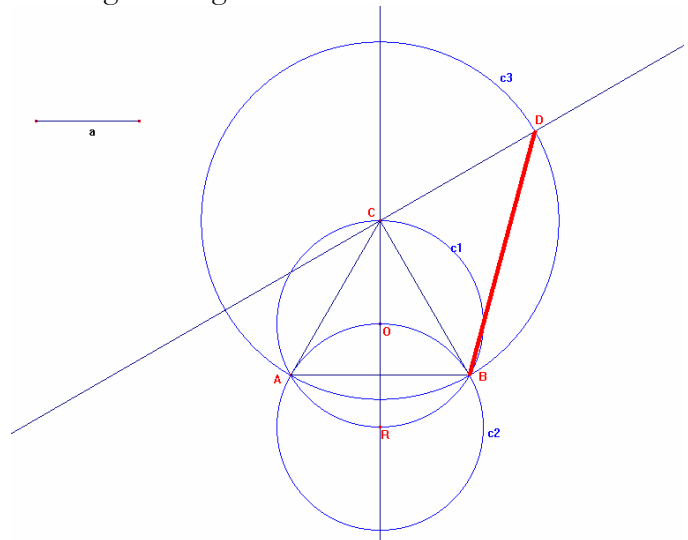
1.

Essendo la superficie di un cubo di spigolo  $a$ :  $S = 6 \cdot a^2$ , il lato del quadrato avente area  $S$  sarà:  $l = a \cdot \sqrt{6} = a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ . Se allora costruiamo una circonferenza di raggio  $a$ , e quindi il lato del triangolo equilatero in essa inscritto, la cui misura è  $l' = a \cdot \sqrt{3}$ , il lato  $l$  del quadrato richiesto sarà la diagonale del quadrato che ha per lato  $l'$ .

E' infatti  $l = l' \cdot \sqrt{2}$ .

La costruzione, effettuata con Cabri Géomètre, è nella seguente figura :

Precisamente: fissato un segmento di misura  $a$ , con lo strumento Compasso del Cabri Géomètre, tracciamo una circonferenza  $c1$  di raggio  $a$ . Tracciato poi un diametro qualunque e detto  $R$  uno dei suoi punti in comune con  $c1$ , la circonferenza  $c2$  avente il centro in  $R$  e raggio  $a$  individua su  $c1$  gli estremi  $A$  e  $B$  del lato del triangolo equilatero inscritto in essa [C, estremo del diametro  $CR$ , è il terzo vertice del triangolo].



A partire dal lato  $CB$  del triangolo equilatero così ottenuto, costruiamo la diagonale del quadrato di lato  $CB$  tracciando la retta perpendicolare a  $CB$  nel punto  $C$  e quindi la circonferenza  $c3$  di centro  $C$  e raggio  $CB$ .

Il segmento  $BD$  è il lato del quadrato richiesto dal problema.

2.

Essendo  $BD = a \cdot \sqrt{6}$ , la diagonale del quadrato di lato  $BD$  sarà  $d = BD \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{3}$  mentre la diagonale del cubo di spigolo  $a$  è data da:  $d' = \sqrt{3 \cdot a^2} = a \cdot \sqrt{3}$

Se ne deduce allora che:  $d = 2 \cdot d'$ , cioè la diagonale del quadrato che abbiamo costruito è doppia di quella del cubo.

**Classe 3A**

**Scuola Media "Via Ribolle"**

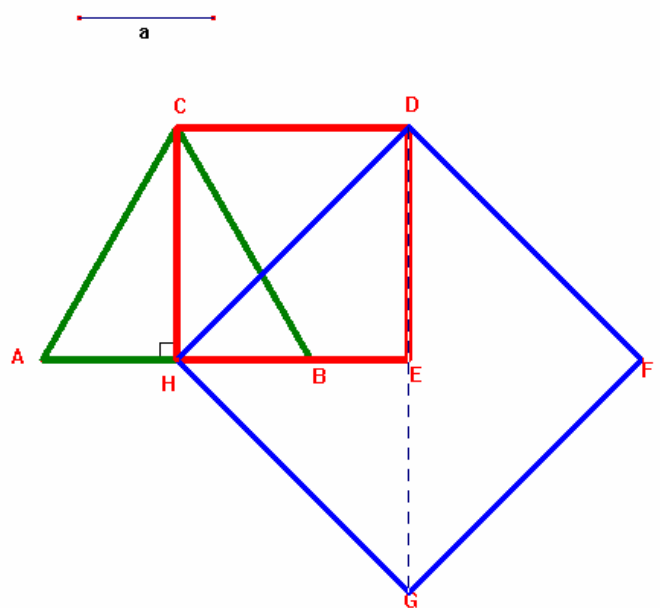
**Forlì (FC)**

1. Dato un segmento di lunghezza  $a$ , costruire il quadrato equivalente alla superficie totale del cubo di spigolo  $a$ .

Se  $a$  è lo spigolo di un cubo, e quindi la superficie di una sua faccia è  $a^2$ , la superficie totale del cubo vale  $6a^2$ .

Volendo costruire un quadrato di superficie equivalente alla superficie totale del cubo, il suo lato sarà: radice quadrata di  $6a^2$ , ovvero radice di 6 moltiplicata per [la misura del] segmento  $a$ .

Preso il segmento  $AB = 2a$ , si punta il compasso in  $A$  con apertura  $AB$  e poi si punta in  $B$  sempre con la stessa apertura.



Nell'intersezione formata si crea il punto C e poi si collegano C con A e B per formare il triangolo equilatero ABC.

Poi si costruisce il quadrato HEDC avente come lato l'altezza del triangolo CH.

Poi, prendendo come lato la diagonale HD, si costruisce il quadrato HGFD, avente l'area equivalente alla superficie totale del cubo di spigolo a.

[La costruzione doveva essere poi giustificata]

2. Confrontare la diagonale del quadrato ottenuto con quella del cubo:

La diagonale di un cubo si trova prendendo lo spigolo, elevandolo alla seconda, sommandolo tre volte, tutto sotto radice quadrata, quindi radice di tre moltiplicata per a.

Se pensiamo alla radice di sei come alle radici di due e di tre moltiplicate tra di loro, avremo che la diagonale DG sarà uguale alla radice di sei per a per radice di due, ovvero radice di dodici per a, il risultato sarà di radice di tre per due (radice di quattro), moltiplicato per a.

Il rapporto è quindi esprimibile in questo modo:  $d$  quadrato /  $d$  cubo è due volte a per radice di tre / a per radice di tre, che si semplificherà in: due per a / a, ovvero 2 / 1.

Possiamo quindi concludere che la diagonale DG del quadrato HGFD è doppia di quella del cubo avente la superficie totale equivalente al quadrato.

[La descrizione dei calcoli così fatta rende difficoltosa la lettura e la comprensione del testo]

### Classe 3F

#### Scuola Media "G. B. Tiepolo"

#### Milano (MI)

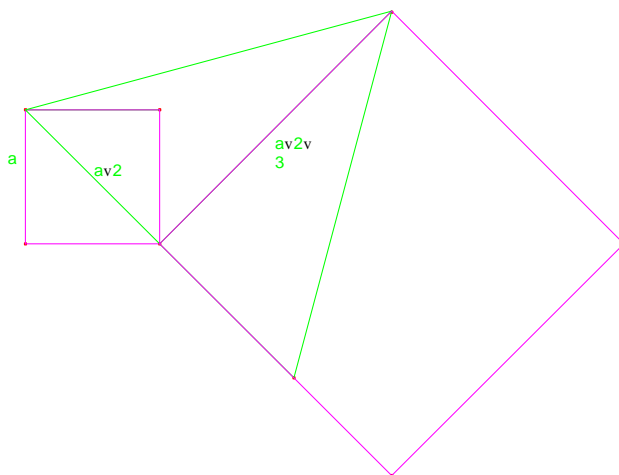
1) Dato il segmento  $a$ , costruiamo il quadrato equivalente all'estensione totale del cubo con spigolo  $a$ .

Considerando che il cubo ha sei facce, ognuna il quadrato di  $a$ . Possiamo quindi affermare che il quadrato cercato è  $6a^2$ . Il lato di questo quadrato è quindi  $a\sqrt{6}$ . Scomponendo il numero otteniamo che il lato del quadrato è  $a\sqrt{2}\sqrt{3}$ . Ovvero misura quanto l'altezza di un triangolo equilatero che ha come semilato la diagonale del quadrato di lato  $a$ . (Teorema di Pitagora).

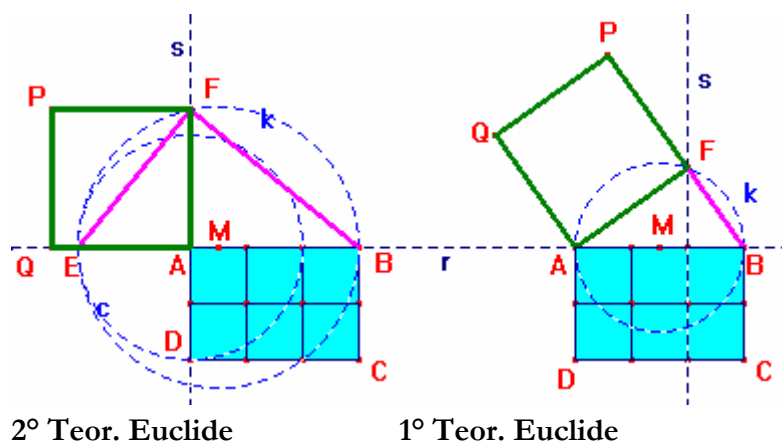
[Si doveva descrivere anche la costruzione]

2) Ora confrontiamo la diagonale del cubo con quella del quadrato appena costruito. La diagonale del

quadrato è  $2a\sqrt{3}$ , e quella del cubo  $a\sqrt{3}$ . Quindi possiamo affermare che la diagonale del quadrato equivalente alla superficie di un cubo è il doppio della diagonale del cubo stesso.



Classe 3A (gruppo di approfondimento)  
 Scuola Media "Zanella", Roveredo in Piano (PN)



2° Teor. Euclide

1° Teor. Euclide

1)

- Con i quadrati delle sei facce del cubo costruiamo un rettangolo (le dimensioni, [rispetto allo spigolo del cubo] possono essere: 1 e 6 o 2 e 3) che in tal modo risulta equivalente all'area totale del cubo.

- Nelle rappresentazioni geometriche dei Teoremi di Euclide il rettangolo può avere per dimensioni:

- le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa (equivalente al quadrato costruito sull'altezza rispetto all'ipotenusa, per il 2° teorema);

- l'ipotenusa e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa (equivalente al quadrato sul cateto considerato, per il 1° teorema).

- Descriviamo la costruzione che utilizza il 2° Teorema di Euclide.

1. Rettangolo ABCD; rette per AB ( $r$ ) e per AD ( $s$ );

2. Circonferenza  $c$  di centro A per D e sua intersezione E con la retta  $r$  (EB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che stiamo disegnando);

3. Punto medio M tra E e B; circonferenza  $k$  di centro M per B e sua intersezione F con la retta  $s$  (FA è l'altezza del triangolo rettangolo EBF rispetto l'ipotenusa, rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza per costruzione). 4. Costruiamo il quadrato AFPQ che risulterà equivalente al rettangolo ABCD (per il 2° Teorema di Euclide).

2)

Diagonale del cubo:  $a\sqrt{3}$ ;

Lato del quadrato:  $\sqrt{(6a^2)}$ ;

Diagonale del quadrato:  $\sqrt{(6a^2)*\sqrt{2}} = \sqrt{(12a^2)} = a\sqrt{12}$ .

Il rapporto tra la diagonale del cubo e la diagonale del quadrato risulta:  $\sqrt{(1/4)} = 1/2$ .



Aprile 2005

Dato un qualsiasi triangolo  $ABC$  ed un punto  $X$  sullo stesso piano, sia  $D$  il punto in cui la retta  $AX$  incontra la retta  $BC$ .

1. Dimostrare che il rapporto fra l'area del triangolo  $AXC$  e quella del triangolo  $AXB$  è uguale al rapporto dei segmenti  $DC$  e  $DB$ .
2. Esiste sempre tale rapporto?
3. Quali sono le posizioni del punto  $X$  per cui i triangoli suddetti risultano equivalenti?

Motivare le risposte.

Figura proposta da Mercedes Scarpino  
Liceo Scientifico "G. B. Scorzà"  
Cosenza (CS)

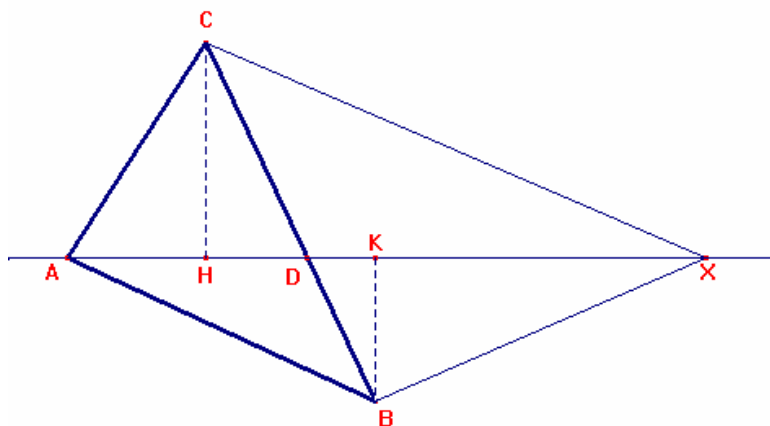
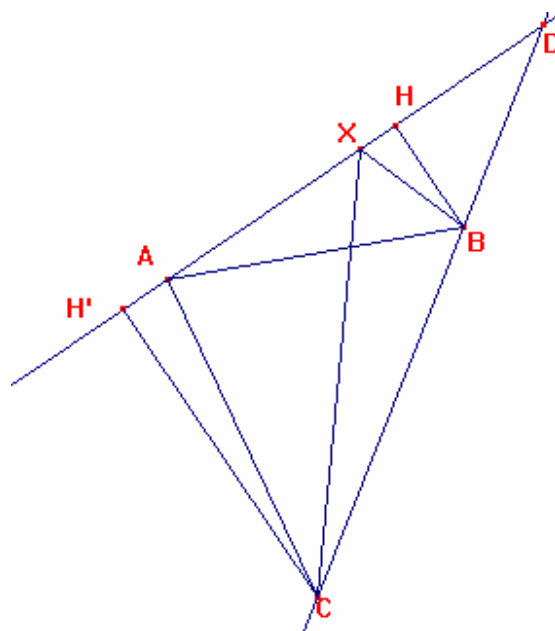


Figura proposta da: Fabbian Riccardo, Thomas Neri,  
Mattia Rovelli  
3° P, S.M. San Genesio ed Uniti (PV)



## Commento

Abbiamo ricevuto 9 risposte provenienti dalle scuole:

- LC "Aristosseno", Taranto (TA)
- LS "G. B. Scorzà", Cosenza (CS)
- SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
- ITIS "F. Berenini", Fidenza (PR)
- LS Istituto "B. Russell", Roma (RM)
- SM "De Amicis", Busto Arsizio (VA)

- SM "G. B. Tiepolo", Milano (MI)
- SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
- LS "Galeazzo Alessi", Perugia (PU)

Un'ulteriore risposta ci è giunta del LS "G. Aselli" di Cremona, che non possiamo includere nelle proposte da commentare perché realizzata da un alunno della classe terza; ci fa però piacere osservare che l'interesse per la geometria, e per FLATlandia, non si esaurisce nel biennio.

Nel problema di questo mese erano stati assegnati un triangolo ABC e un punto X nello stesso piano. Si doveva tracciare la retta congiungente il vertice A con il punto X, e considerare l'intersezione D di questa con la retta passante per gli altri due vertici del triangolo.

Il primo quesito chiedeva di dimostrare l'uguaglianza del rapporto fra le aree di due particolari triangoli e di due segmenti al variare della posizione di X nel piano.

Il secondo e il terzo chiedevano rispettivamente di verificare se tale rapporto esiste sempre e di considerare un caso particolare.

Tutte le risposte pervenute sono sostanzialmente corrette anche se non tutte sono complete e in alcuni casi contengono delle imprecisioni.

Modificando la posizione del punto X si ottenevano due differenti configurazioni: nella maggior parte delle risposte è stata dimostrata l'uguaglianza del rapporto soltanto in uno dei due casi; chi ha considerato correttamente i due casi non ha però fatto la giusta distinzione rispetto al punto X (si vedano le figure proposte prima del commento e di seguito le due diverse dimostrazioni dell'ITIS "F. Berenini" di Fidenza e del Liceo "B. Russell" di Roma con le nostre correzioni). Solo nella risposta della scuola Media di Roveredo in Piano (visibile dopo il commento) è stata data un'unica dimostrazione dell'uguaglianza valida per tutte le posizioni del punto X in cui i rapporti considerati esistono.

Anche per il secondo e il terzo quesito solo una risposta proveniente dall'ITIS "Berenini" di Fidenza (visibile dopo il commento) è risultata completa avendo considerato tutti i casi possibili.

Per concludere riteniamo opportuno fare anche le seguenti osservazioni:

- il rapporto fra due grandezze non esiste quando il denominatore è nullo; se è soltanto il numeratore ad essere uguale a zero, allora il rapporto esiste e sarà anch'esso zero.
- qualcuno ha citato in modo improprio l'omotetia quando invece era più opportuno considerare la similitudine;
- Il problema risulta indeterminato nel caso in cui il punto X coincida con il vertice A del triangolo, poiché in questo caso la retta AX non è univocamente determinata.

Presentiamo le risposte di seguito elencate:

- SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)- prima parte
- LS Istituto "B. Russell", Roma- prima parte
- ITIS "F. Berenini", Fidenza (PR)- risposta completa

**NOTA:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

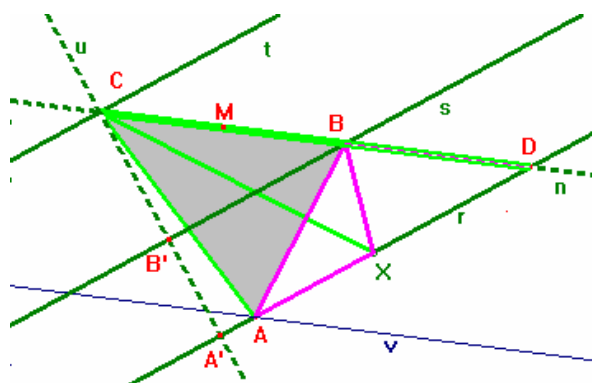
## Soluzioni

*Guendalina Antoniazzi e Stefania Basso Moro  
classe 3A, Scuola Media di Roveredo in Piano  
(PN)*

Triangolo ABC; Punto X; Retta  $n$  per C e B; Retta  $r$  per A e X; Punto D, intersezione di  $n$  ed  $r$ ; Triangoli AXB e AXC.

1.

- Retta  $n$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per C; retta  $s$  parallela ad  $r$  per B; intersezione



di  $u$  con  $r$  e con  $s$ :  $A'$ ,  $B'$ . [la retta  $s$  è perpendicolare alla  $u$  perché parallela a una sua perpendicolare]

Tracciamo le altezze  $CA'$  e  $B'A'$  dei triangoli  $AXC$  e  $AXB$  rispetto al lato  $AX$  in comune.

Le aree dei triangoli  $AXC$  e  $AXB$  avendo il lato  $AX$  in comune sono proporzionali alle relative altezze  $A'C$  e  $A'B'$  [A'B' è altezza del triangolo  $AXB$  relativa ad  $AX$  perché  $r$  ed  $s$  sono parallele]

- Consideriamo il fascio di rette parallele  $r$ ,  $s$ ,  $t$  (per  $C$ ) e le due rette  $u$  ed  $n$ . Per il Teorema di Talete i segmenti  $CA'$  e  $B'A'$  (sulla retta  $u$ ) sono proporzionali ai segmenti  $CD$  e  $BD$  (sulla retta  $n$ ), quindi per la proprietà transitiva anche le Aree dei triangoli  $AXC$  e  $AXB$  lo sono nei confronti di  $CD$  e  $BD$ .

2. [...]

3. [...]

**Leonardo del Vecchio**

*classe 2 D, Istituto "B. Russell", Roma*

**PUNTO 1:**

Si disegnino le altezze  $BK$  e  $CH$  relative alla base  $AX$ .

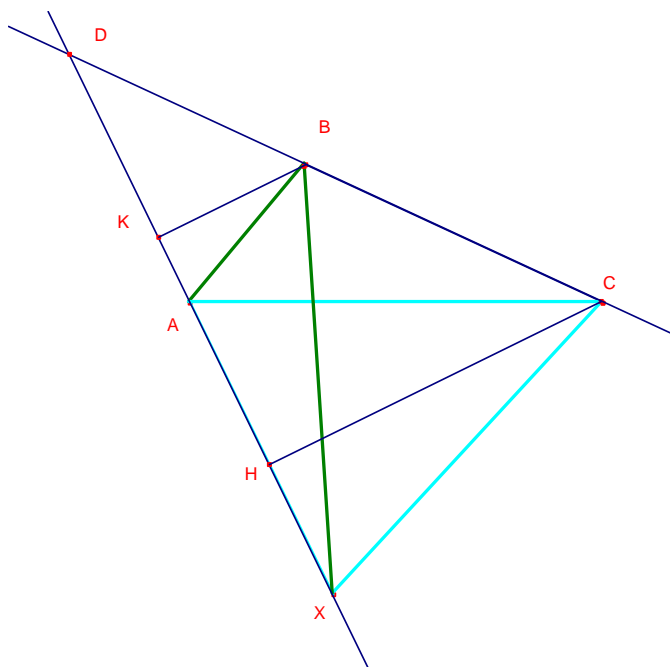
I triangoli  $DKB$  e  $CHD$  sono simili perché:

$BKD = DHC$  angoli retti per costruzione

$KBD = HCD$  perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele  $BK$  e  $CH$  tagliate dalla trasversale  $BC$  [le rette  $BK$  e  $CH$  sono parallele perché perpendicolari alla stessa retta  $AX$ ]

$KDB = HDC$  [angolo in comune]

I triangoli  $ABX$  e  $ACX$  hanno la base  $AX$  in comune e come altezze (relative ad  $AX$ ) hanno rispettivamente  $BK$  e  $CH$ , quindi il rapporto tra le aree sarà uguale al rapporto tra le altezze, cioè:  $A(ACX)/A(ABX) = CH/BK$  ma, poiché i triangoli  $DKB$  e  $CHD$  sono simili (come prima dimostrato) hanno i lati in proporzione, in particolare:  $CH/BK = CD/BD$ , quindi, si ha che  $A(ACX)/A(ABX) = CD/BD$ .



2. [...]

3. [...]

Classe 2 B, ITIS "Berenini", Fidenza

1. Se X appartiene all'angolo convesso individuato dalle semirette AC e AB (figura 1) [La configurazione della figura 1 si presenta anche quando X è interno all'angolo opposto al vertice dell'angolo convesso CAB, infatti anche in questo secondo caso il punto D è interno al segmento CB] o se X non vi appartiene [non appartiene ai due precedenti casi] (figure 2 e 3), i triangoli CDH e BDK sono comunque simili perché hanno i tre angoli rispettivamente congruenti (l'angolo BKD = CHD perché retti; l'angolo CDH = BDK perché opposti al vertice; l'angolo DBK = DCH perché alterni interni [considerazioni valide solo nel caso della figura 1; nel caso della figura 2 e 3: l'angolo BKD = CHD perché retti; l'angolo CDH = BDK perché in comune; l'angolo DBK = DCH perché corrispondenti]).

Quindi esiste la proporzione:  $CH / BK = CD / BD$ .  
Poiché l'area del triangolo AXC è data  $(AX * CH) / 2$  e del triangolo AXB è  $(AX * BK) / 2$ , si ha:

$$\text{Area AXC} / \text{Area AXB} = [(AX * CH) / 2] / [(AX * BK) / 2] = CH / BK = CD / BD$$

c.v.d.

2. Tale rapporto non esiste se  $BD = 0$  quindi D coincide con B, ciò succede se X appartiene alla retta AB (figura 4).

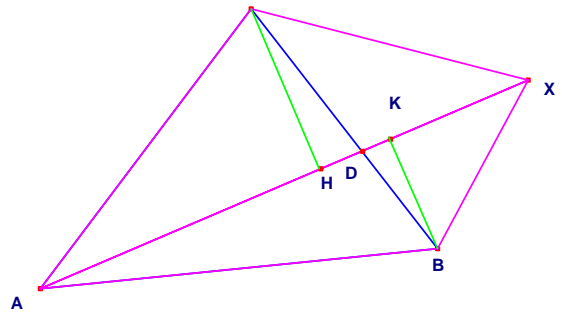


fig. 1

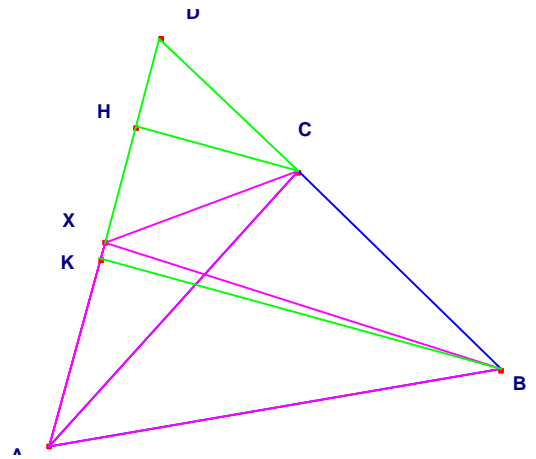


fig. 2

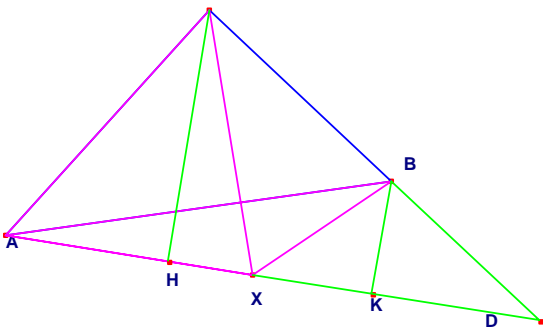


fig.3

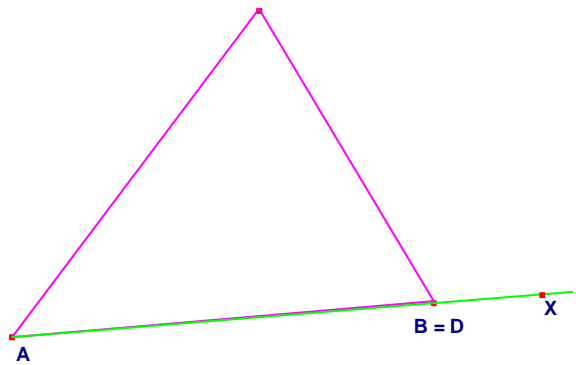


fig. 4

Inoltre se X sta sulla retta per A parallela a BC, D non esiste (figura 5).

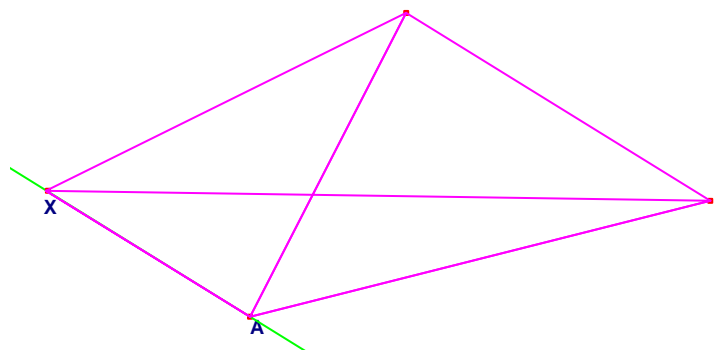


fig. 5

3. I triangoli AXB e AXC sono equivalenti se hanno stessa area, quindi se il rapporto delle loro aree è 1. Per quanto visto al punto 1 in tal caso, anche il rapporto  $CD/BD$  vale 1 e ciò si ha se  $CD=BD$ .

Quindi i triangoli sono equivalenti se  $CD=BD$  cioè se D è punto medio di CB; ciò accade se X sta sulla retta per A e per il punto medio di CB (figura 6).

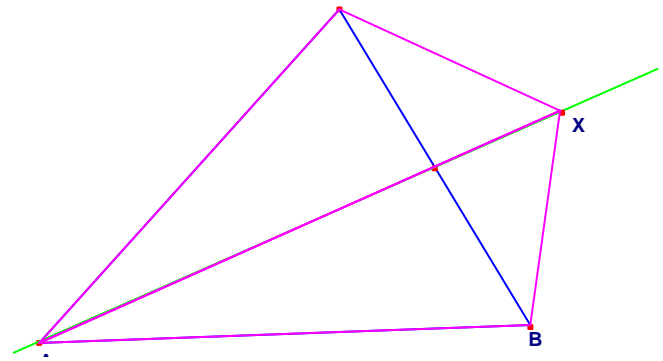


fig.6

Inoltre i triangoli sono equivalenti anche se X sta su qualsiasi punto sulla retta parallela al lato BC e passante per A (questo è lo stesso esempio di figura 5): dato che AX è un lato sia di AXB che di AXC e le sue altezze CH e BK sono congruenti (perché distanze tra due rette parallele) i triangoli sono equivalenti (figura 7).

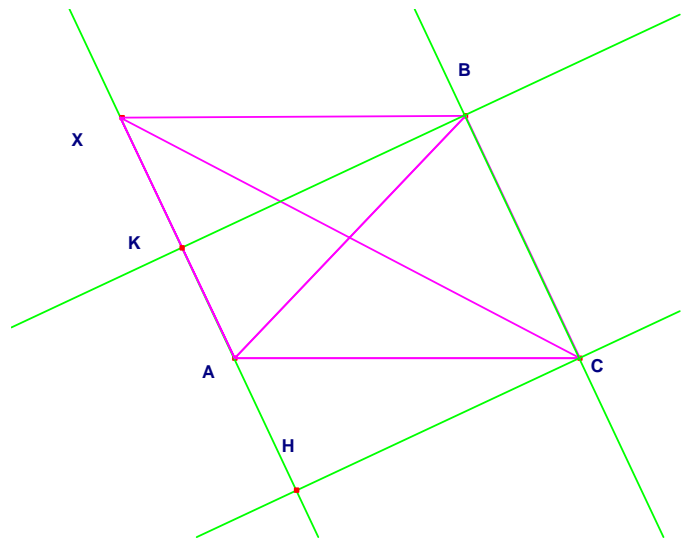
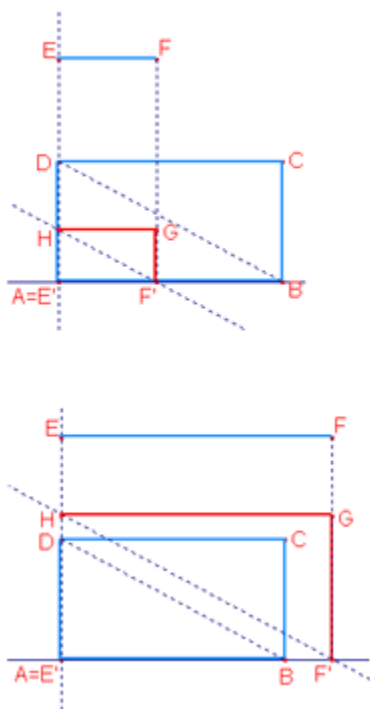


fig. 7

## Maggio 2005

1. Dati un rettangolo ABCD e un generico segmento EF, costruire un rettangolo EFGH simile a quello assegnato.
2. Considerato ora un qualsiasi triangolo PQR inscrivere in esso un rettangolo simile ad ABCD, con un lato ad esempio su PQ. [Suggerimento: costruire prima, all'esterno di PQR, il rettangolo PQST simile ad ABCD, poi congiungere S e T con ...]  
Descrivere e giustificare le costruzioni.



## Commento

Abbiamo ricevuto quattro risposte dalle scuole:

- LC "Aristosseno", Taranto (TA)
- LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)
- SM "Angelo Brofferio" Asti (AT)
- ITI, LST "F. Berenini", Fidenza (PR)

Un saluto di benvenuto alla scuola media "A. Brofferio" di Asti.

Come di consueto il problema proposto comprendeva due parti.

Nella prima, assegnati un rettangolo ed un generico segmento, si chiedeva di costruire il rettangolo simile a quello dato avente un lato su quel segmento.

C'è chi ha interpretato il "generico segmento" in modo molto ampio, considerandolo in una posizione qualunque rispetto al rettangolo e chi, invece, lo ha considerato parallelo ad un suo lato.

Si poteva anche sovrapporre il segmento a un lato del rettangolo (vedi figura allegata al testo).

Nelle risposte pervenute sono stati seguiti due percorsi di costruzione: tracciata una diagonale del rettangolo, si è utilizzata la similitudine dei triangoli rettangoli, oppure, individuato il centro dell'omotetia, si è ottenuto il rettangolo simile per la proprietà della conservazione del parallelismo.

Nella seconda parte del problema si chiedeva di inscrivere in un triangolo PQR un rettangolo simile a quello dato, con un lato su PQ. Si suggeriva poi un percorso che utilizzasse la costruzione precedente.

La scelta del lato PQ doveva ovviamente essere subordinata alla possibilità di eseguire la costruzione richiesta.

Ricordiamo che non possiamo accettare il ricorso alla misura per ottenere le costruzioni richieste. Ribadiamo che per costruzione si intende un percorso eseguibile con riga e compasso. Per abbreviare il percorso non chiediamo di descrivere anche le costruzioni di base come la parallela, la perpendicolare, il trasporto di un segmento o di un angolo, ..., che sono già fornite dal software Cabri o altri.

Commentiamo brevemente ciascuna risposta, riportando quelle che abbiamo ritenuto più complete:

- *Classe 1D, LC "Aristosseno"*; esauriente la prima parte, valido il percorso nella seconda, ma incompleta la sua giustificazione.
- *Gruppo di studenti, classe 3F, SM "A. Brofferio"*; abbiamo accolto la seconda proposta di risoluzione. Le costruzioni sono corrette, non sono esaurienti le motivazioni, ma, come già detto, questo può essere accettato per una scuola media.
- *M: Scarpino, classe 2G, LS "G.B. Scorza"*; ha risolto la prima parte ricorrendo alla omotetia (vedi SM "Brofferio"), ma non ha interpretato correttamente il suggerimento nella seconda parte.
- *Classe 2B, LST "F. Berenini"*; costruzione basata sulla similitudine dei triangoli rettangoli, ma non dichiarata esplicitamente, nella prima parte; una imprecisione di procedimento (il punto F viene individuato due volte con diversi percorsi) nella seconda parte.

**NOTA 1:** Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

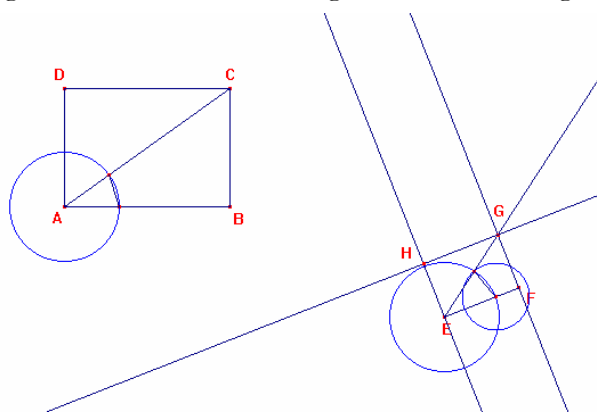
## Soluzioni

### Classe 1D

#### Liceo Aristosseno, Taranto (TA)

1. Dato il rettangolo ABCD ed il segmento EF, in posizione generica nel piano del rettangolo, il problema di costruire un rettangolo simile ad ABCD è ricondotto a quello di costruire un triangolo rettangolo [EFG] simile ad ABC, perché le diagonali dividono il rettangolo in due triangoli rettangoli congruenti. Utilizziamo allora la costruzione del trasporto di un angolo.

Trasportiamo l'angolo BAC sul segmento EF ed individuiamo il vertice G del rettangolo attraverso l'intersezione della semiretta dell'angolo ottenuto con la perpendicolare ad EF condotta da F. Tracciando poi la parallela da G ad EF otteniamo il quarto vertice H del rettangolo EFGH (che risulta ovviamente simile ad ABCD).



2. Dato ora il triangolo generico PQR, costruiamo anzitutto il rettangolo PQST, simile ad ABCD, seguendo la costruzione del punto 1. Poi, come suggerito, congiungiamo i vertici S e T con il vertice R del triangolo. Detti U e V i punti intercettati rispettivamente da TR e RS sulla base PQ del triangolo, osserviamo che i triangoli TSR e UVR sono simili (corollario del teorema di Talete) per cui si ha che:  $TS : UV = SR : VR$ .

Tracciando ora dal punto V la parallela a SQ (perpendicolare a PQ) e individuato il punto W sul lato QR, si ha che i triangoli SRQ e VRW sono anch'essi simili (per lo stesso teorema) e quindi:

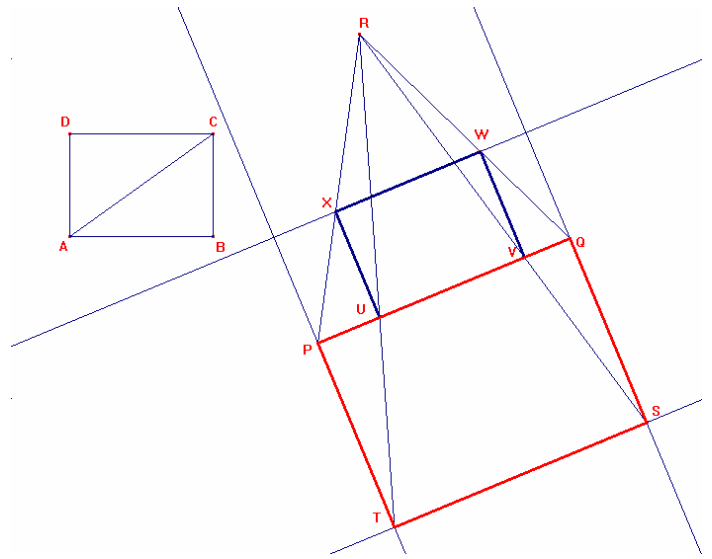
$$RS : RV = SQ : VW$$

Dalle due proporzioni (proprietà transitiva) risulta la seguente:

$$TS : UV = SQ : VW$$

e da questa deduciamo che il rettangolo UVWX [vedi nota sotto] è simile a PQST e quindi anche ad ABCD (la similitudine tra figure piane gode della proprietà transitiva).

[NOTA BENE: non si può ancora affermare che UVWX è un rettangolo, occorre ripetere, a partire da U, il percorso precedente (perpendicolare per U a PQ, intersezione X con PR, ...) per concludere che  $TS : UV = TP : UX$ , da cui, confrontando con l'uguaglianza precedente, si può dedurre che è UV congruente a VW per l'unicità della quarta proporzionale e quindi ...]



*Erica Baratta, Eleonora Boffano, Eugenio Fea, Clara Ferraris, Nicoletta Fiorentini, Davide Tore, Marta Valente*  
**Classe 3F, Scuola Media "Angelo Brofferio"**  
**Asti (AT)**

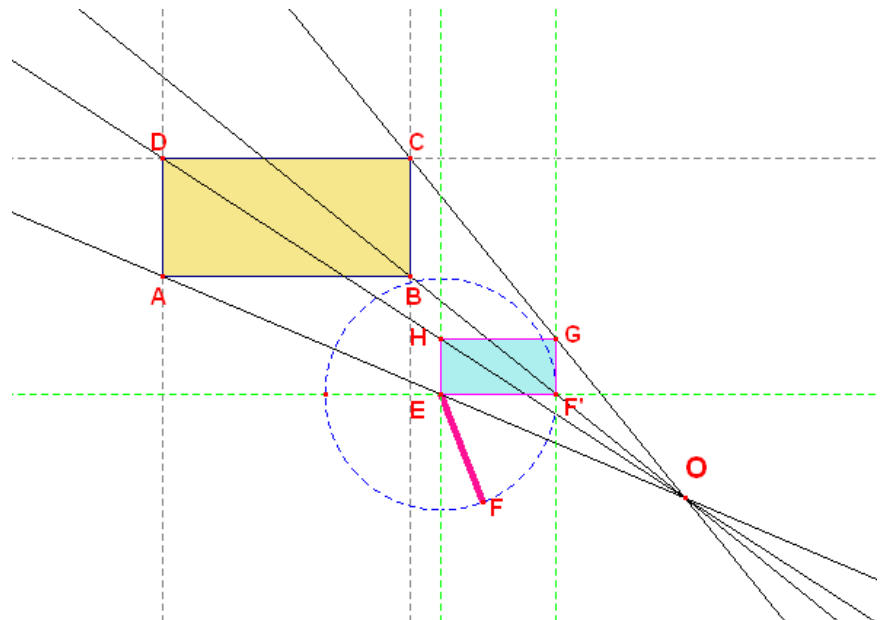
**Prima parte**

**1° soluzione [[...]]**

**2° soluzione:**

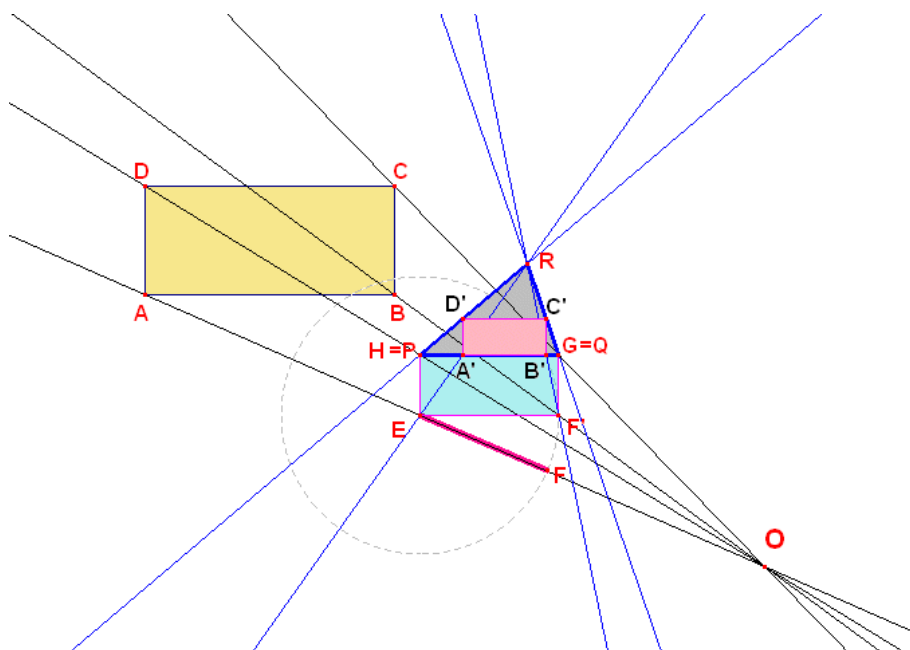
Disegnato il rettangolo ABCD e un segmento a piacere EF, abbiamo pensato di costruire un rettangolo EFGH omotetico a ABCD. Abbiamo ruotato EF (in EF') in modo che fosse parallelo a AB (retta per E parallela ad AB e compasso di centro E e raggio EF), quindi abbiamo disegnato la retta AE e la retta BF' per individuare il centro d'omotetia O [è più corretto dire: il centro O dell'omotetia in cui al punto A corrisponde il punto E; in questo modo viene definito anche il rapporto di omotetia].

A questo punto, dopo aver disegnato le rette DO e CO, abbiamo costruito [tracciando per E la parallela a AD e per F' ...] il rettangolo E'F'GH che risulta simile a ABCD in quanto omotetico [ad esso].





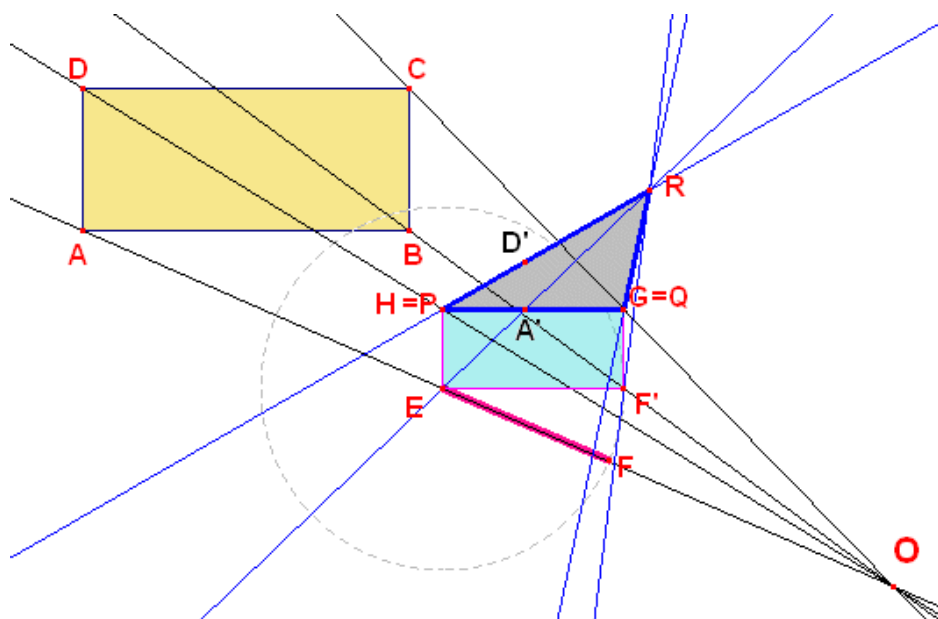
Seconda parte



Partendo dalla costruzione precedente abbiamo disegnato il triangolo PQR prendendo come base PQ il lato HG del rettangolo azzurro. In questo modo risulta già costruito, all'esterno di PQR, il rettangolo simile a ABCD e avente per base PQ (come da suggerimento ...).

Il vertice R del triangolo è il centro d'omotetia [vedi osservazione precedente] per la costruzione del rettangolo A'B'C'D' [idem] (rosa) simile a EFGH (azzurro) e inscritto nel triangolo PQR. Essendo EFGH (azzurro) simile a ABCD (giallo) per la precedente costruzione, risulta che A'B'C'D' è simile a ABCD per la proprietà transitiva.

**Osservazione:** trascinando il vertice R del triangolo PQR si osserva che il rettangolo inscritto avente la base su PQ esiste fino a quando gli angoli adiacenti a PQ sono minori o uguali [di un angolo retto]. Se uno di questi due angoli diventa ottuso il rettangolo inscritto non può più esistere e infatti sparisce.



# **FLATlandia, geometria on-line**

L'IRRE dell'Emilia Romagna,  
valendosi dell'apporto di operatori interni  
e di collaboratori esterni all'Istituto,  
ha proposto questo servizio in rete  
rivolto a docenti e alunni  
che si interessano di matematica.

Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97-'98  
e giunto al suo ottavo anno di attività,  
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche  
di vario tipo

Nel presente volumetto il resoconto  
dell'ottavo anno di attività



*n°*

**29**