FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studentesse e studenti della Scuola secondaria

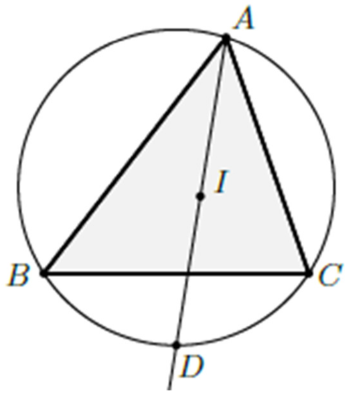
Flatlandia – Problema di novembre 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo e I il suo incentro. Sia D l'ulteriore intersezione della semiretta AI con la circonferenza circoscritta al triangolo ABC (vedi figura). Dimostrare che

a) il triangolo BCD è isoscele.

b) il punto D è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo BCI.



Commento

Il problema poneva due domande relative a un triangolo inscritto in una circonferenza in cui era assegnata la bisettrice di uno degli angoli interni.

Le risoluzioni arrivate sono tutte accettabili, anche se contengono a volte un linguaggio poco curato o delle figure incomplete.

Abbiamo ricevuto cinque risposte da studentesse e studenti delle seguenti scuole:

- I.I.S. Liceo Scientifico G. Bruno-R. Franchetti, Mestre Venezia (VE)
- Liceo Scientifico L.B. Alberti, Cagliari
- Liceo Classico "Don Mazza", Verona
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Milano
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Caravaggio (BG)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse. Per rispetto della privacy mettiamo solo l'iniziale del cognome delle studentesse e degli studenti che hanno inviato le soluzioni.*

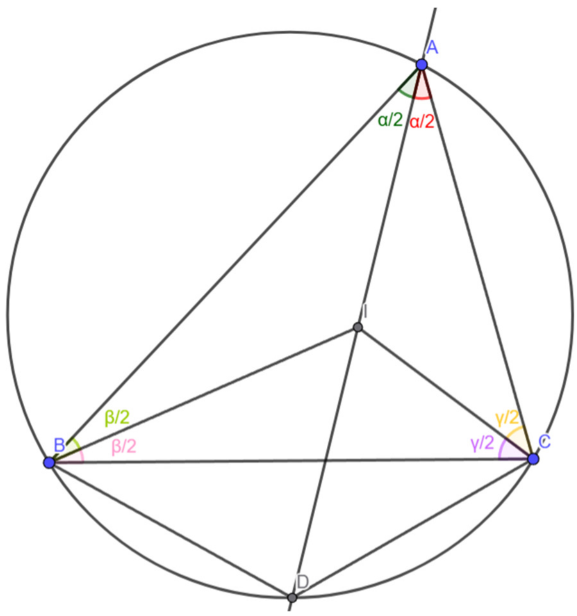
Soluzioni arrivate

1)Soluzione inviata da: Gianmaria O.- LS, Classe 4E, I.I.S. "G. Bruno e R. Franchetti" Mestre-VE

[Commento: soluzione accettabile. Non viene però usato un equation editor per scrivere le formule]

a) Chiamiamo gli angoli ∠BAC, ∠ABC e ∠ACB rispettivamente α, β e γ e tracciamo i segmenti BI e CI, dato che I è l'incentro, ovvero l'incontro delle bisettrici di un triangolo (e centro della circonferenza ad esso inscritta), possiamo dire che:

∠BAI≅∠CAI≅α/2, ∠ACI≅∠BCI≅β/2 e ∠CBI≅∠ABI≅∠γ/2.



*ho tracciato anche i segmenti BD e CD

∠BAD≅∠BCD poiché sono entrambi angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda BD, per la proprietà transitiva, dato che ∠BAD=α/2 (∠BAD e ∠BAI sono il medesimo angolo), ∠BCD=α/2.

Analogamente otteniamo che ∠DBC=α/2, sempre per la proprietà transitiva ∠DBC≅∠BCD, di conseguenza <u>il triangolo BCD è isoscele</u> poiché è un triangolo con gli angoli alla base [BC] congruenti.

b) Per il teorema degli angoli esterni sappiamo che ∠BID≅∠BAI+∠ABI=α/2+β/2.

Inoltre ∠DBI≅∠DBC+∠CBI= α/2+β/2, per la proprietà transitiva: ∠DBI≅∠BID.

Sappiamo ordunque ["ordunque" si usava nell'Ottocento o prima…] che il triangolo BDI è isoscele, quindi la mediana uscente per D è anche l'altezza [di chi?], essendo entrambe [???scritto male] è allora asse del segmento BI. Analogamente otteniamo che anche l'asse di CI passa per D, dato che gli assi di un triangolo si incontrano tutti e tre nello stesso punto che è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo, possiamo dire che:

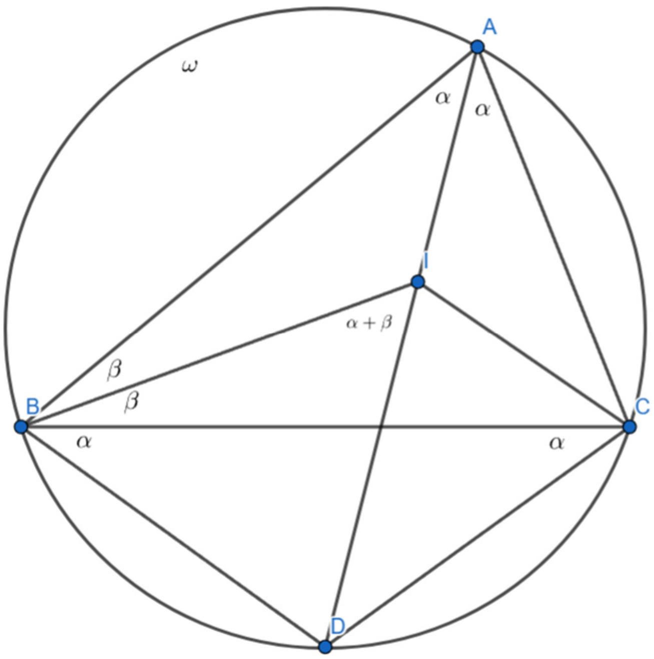
il punto D è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo BCI.

*ovviamente bastavano 2 [due] assi per trovare il punto di intersezione di tutti e tre.

2) Soluzione inviata da Michele T., Classe 4^ BS, Liceo Scientifico L.B. Alberti, Cagliari

[Commento: soluzione adeguata con qualche imprecisione di linguaggio]

a)



Essendo I l'incentro del triangolo ABC, il segmento AI divide BÂC in due angoli congruenti, detti α. Detta ω la circonferenza circoscritta ad ABC, si ha che gli angoli BÂD e BĈD insistono sullo stesso arco [BD] di ω e sono quindi congruenti. Medesimo ragionamento è applicabile agli angoli CÂD e CB̂D. Si ha quindi che

CB̂D = BĈD = α

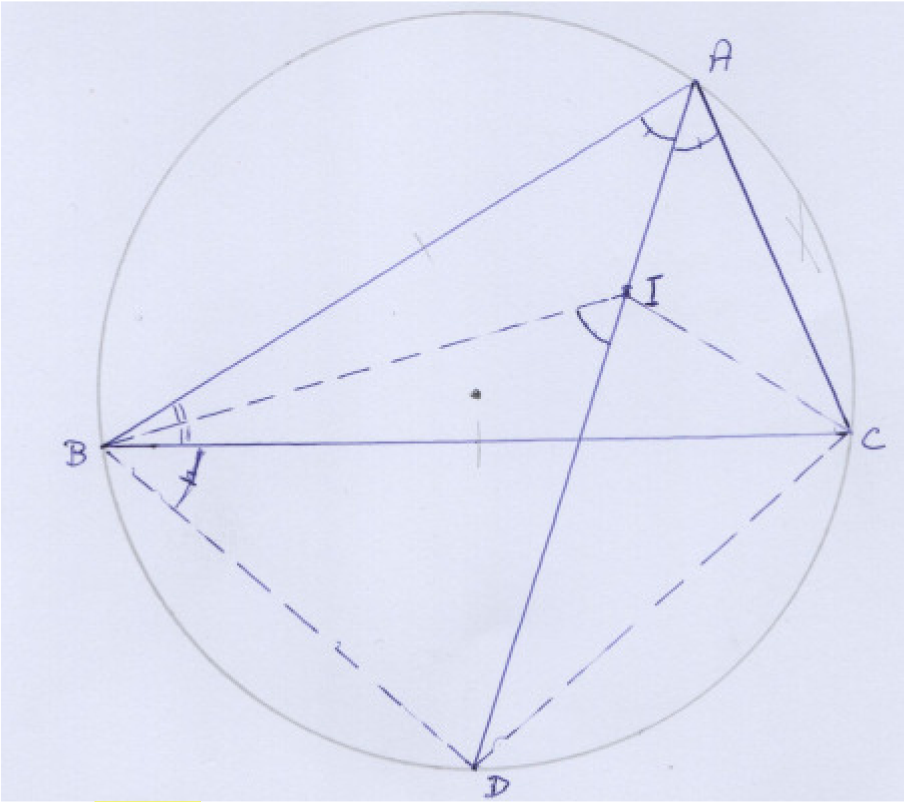
e [[che]] il triangolo BCD è dunque isoscele sulla base BC.

b)

Il segmento BI divide CB̂A in due angoli congruenti, detti β. Essendo poi BÎD angolo esterno di BÎA, si ha [[che]] BÎD = α + β. Esso è pertanto congruente a IB̂D e il triangolo BDI è dunque isoscele sulla base BI. Per la proprietà transitiva applicata ai lati BD, DI e DC si ha dunque che essi sono tutti e tre congruenti: i punti B, I e C sono equidistanti da D che è [pertanto il] centro della circonferenza passante per i tre punti.

3) Soluzione inviata da Ettore C., classe IV Liceo Classico "Don Mazza" – Verona

[Commento: soluzione adeguata, anche se con imprecisioni nel linguaggio; alcune parole, non a inizio frase, sono scritte erroneamente con l'iniziale maiuscola].



Nel triangolo ABC l'Incentro I è il punto di intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni del triangolo.

Perciò $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ e $C\hat{B}I = I\hat{B}A$.

Nella circonferenza circoscritta al triangolo ABC, essendo $B\hat{A}D = D\hat{A}C$, gli Angoli alla circonferenza $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$ insistono su Archi Uguali, cioè l'arco BD è uguale all' arco DC, e quindi le corde sottese BD e DC sono uguali: BD = DC.

È così dimostrato che il triangolo BDC, di base BC, è isoscele.

Considero gli angoli alla circonferenza $D\hat{B}C$ e $D\hat{A}C$: sono uguali perché insistono sul medesimo arco DC.

Considero il triangolo ABI: l'angolo $D\hat{I}B$ è angolo esterno al triangolo ed è somma degli angoli interni, non adiacenti, del triangolo: $D\hat{I}B = I\hat{B}A + B\hat{A}I$

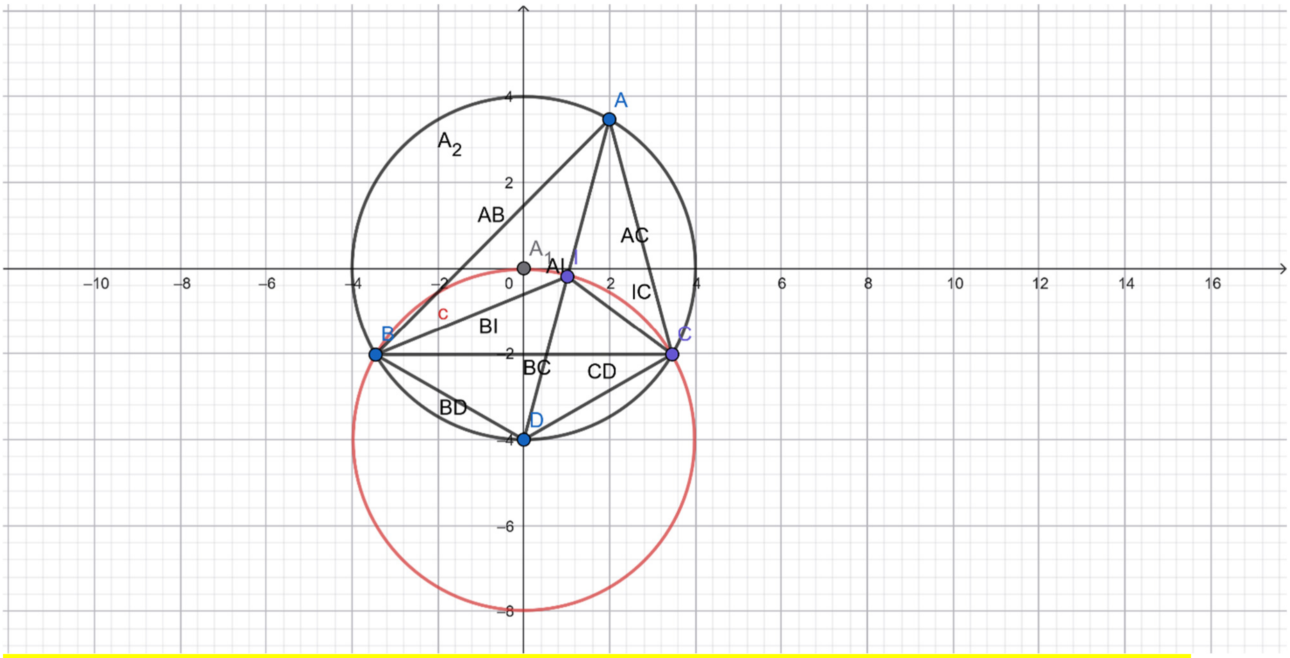
Considero il triangolo DBI. L' angolo $D\hat{B}I = D\hat{B}C + C\hat{B}I$.

Poiché $D\hat{B}I = D\hat{I}B$, il triangolo BID, di base BI, è isoscele, e di conseguenza DI = DB.

Data l'uguaglianza DB = DI = DC, concludo che tali segmenti sono raggi [[di una]] [della] circonferenza di centro D, circoscritta al triangolo BIC.

4) Soluzione di Lina C., Classe 1A scientifico, LS “Enrico Fermi”, Milano

[Commento: la figura contiene gli assi cartesiani, la quadrettatura e i nomi di tutti gli “oggetti” creati, che erano da evitare. Sono presenti diversi errori di linguaggio e un errore più pesante riguardo all’incentro, che è chiamato “baricentro”].



Commento alla figura: non si doveva lasciare il piano cartesiano e nemmeno la quadrettatura.

RICHIESTA N. 1

1. Dato che I è ~~[[il baricentro]]~~ [l’incentro] del triangolo ABC, allora AI è la bisettrice dell’angolo $B\hat{A}C$.[
2. $\widehat{BAI} = C\hat{A}I$ e quindi anche l’arco di circonferenza BD è [[equivalente]] [congruente] all’arco DC.
3. Dato che abbiamo dimostrato che gli archi sono uguali, sono uguali [[anche i raccordi e cioè]] i segmenti $\overline{BD} = \overline{DC}$.
4. Con questo possiamo [[direttamente]] dedurre che il triangolo BDC è isoscele.

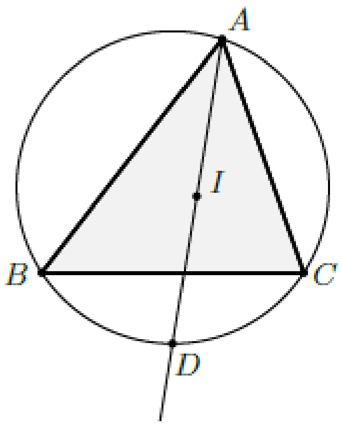
RICHIESTA N.2

[Commento. Questa parte sembra svolta con un sistema di IA.]

1. Collega $\overline{BI}$ e $\overline{CI}$.
2. Imposta l’angolo $B\hat{A}I = C\hat{A}I$ e chiamiamolo “a”. Poiché gli archi sottesi agli angoli $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ sono lo stesso arco di circonferenza $\breve{BD}$, allora l’angolo $B\hat{A}I = B\hat{C}D$ e sono quindi uguali ad “a”.
3. Poiché I è il baricentro del triangolo ABC, l’angolo $A\hat{C}I = B\hat{C}I$ e chiamiamo questi due “b”.
4. Pertanto l’angolo $I\hat{C}D$ misura a+b. Dato che l’angolo $C\hat{I}A$ misura 180°-(a+b), quindi l’angolo $D\hat{I}C$ misura, prendendo l’angolo piatto AD come riferimento, 180°-(180°-(a+b))=a+b. Quindi l’angolo $C\hat{I}D = I\hat{C}D = a + b$.
5. Quindi $\overline{ID} = \overline{CD}$ e come dimostrato prima $\overline{CD} = \overline{BD}$, quindi D è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo BCI.

5) Soluzione inviata da Antonio L., classe IV A, Liceo Scientifico Galileo Galilei, Caravaggio (BG)

[Commento: dimostrazione prolissa e scritta male, anche con errori di scrittura; mancano i segmenti citati nella figura; la figura non è completa]



- *PROCEDIMENTI punto a)*

– Per dimostrare che il triangolo BCD [[sia]] [è] isoscele, dobbiamo dimostrare sia che le corde $\underline{BD}$ e $\underline{DC}$ siano congruenti, sia che gli angoli $\widehat{DBC}$ e $\widehat{DCB}$ siano della stessa ampiezza [ne basta una delle due; o due lati congruenti oppure che ha due angoli congruenti].

– Sappiamo che con il termine *incentro* si intende il punto di incontro delle bisettrici del triangolo, quindi la semiretta AI divide l'angolo $\hat{A}$ in $\widehat{BAI}$ e $\widehat{CAI}$, che sono congruenti poiché la semiretta è anche bisettrice di $\hat{A}$.

– Congiungiamo i punti B e C [nella figura mancano i segmenti citati] prima con il punto I, e in seguito con il punto D.

– Applicando il *teorema sugli angoli alla circonferenza* agli angoli $\widehat{BAI}$ e $\widehat{CAI}$, essendo questi congruenti, significa che insistono su archi di circonferenza congruenti, quindi possiamo dedurre che l'arco BD e l'arco DC sono congruenti, e che le corde BD e DC sottese ad archi congruenti, sono congruenti.

– consideriamo gli angoli $\widehat{BAI}$ e $\widehat{DCB}$, questi sono angoli alla circonferenza e secondo il teorema prima citato, hanno la stessa ampiezza, poiché insistono sullo stesso arco di circonferenza.
– Ripeto ciò per gli angolo $\widehat{CAI}$ e $\widehat{DBC}$, che insistendo sullo stesso arco, sono congruenti, e con ciò abbiamo scoperto che gli angoli $\widehat{BAI}$, $\widehat{CAI}$, $\widehat{DBC}$ e $\widehat{DCB}$ sono congruenti ad $\hat{A}/2$.

– Essendo sia gli angoli $\widehat{DBC}$ e $\widehat{DCB}$ congruenti che i lati BD e DC, possiamo stabilire con certezza che il triangolo BCD è isoscele su base BC.

- *PROCEDIMENTI punto b)*

– Per dimostrare che il punto D sia il centro della circonferenza circoscritta al triangolo BCI, dobbiamo dimostrare che i segmenti BD, DC e DI siano congruenti

– Considero l'angolo $\widehat{DIB}$ come l'angolo esterno dell'angolo $\widehat{BIA}$, appartenente al triangolo ABI, e secondo il secondo teorema dell'angolo esterno, sappiamo che l'angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni del triangolo non adiacenti, in questo caso sono gli angoli $\widehat{BAI}$ e $\widehat{IBA}$

– Se consideriamo questa formula, ricaviamo che: $\widehat{DIB} = \widehat{B/2} + \widehat{A/2}$

– Consideriamo il triangolo BDI, conosciamo l'angolo $\widehat{DIB}$ e l'angolo $\widehat{DBI}$, scritto come la somma tra l'angolo $\widehat{CBI}$, scritto come $\widehat{B/2}$, essendo il segmento $\underline{BI}$ bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, e l'angolo $\widehat{DBC}$, scritto come $\widehat{A/2}$. Questi 2 angoli presentano la stessa ampiezza, essendo la somma di medesimi angoli, e si può quindi dedurre che il triangolo BDI sia isoscele e che i lati $\underline{BD}$ e $\underline{DI}$ siano congruenti avendo come angoli gli stessi.

– Dalla [[seguente]] [o precedente?] dimostrazione sappiamo che $\underline{DC} = \underline{BD}$ e che $\underline{BD} = \underline{DI}$, quindi possiamo stabilire che $\underline{DC} = \underline{BD} = \underline{DI}$. Essendo questi tre segmenti congruenti, possiamo [[~~supporre~~]] [dedurre] che [[~~disegnando una~~]] [la] circonferenza di raggio pari alla lunghezza del segmento $\underline{DC}$ e con centro in D, [[~~questa~~]] passa per i punti B, C e I.