FLAT*landia*

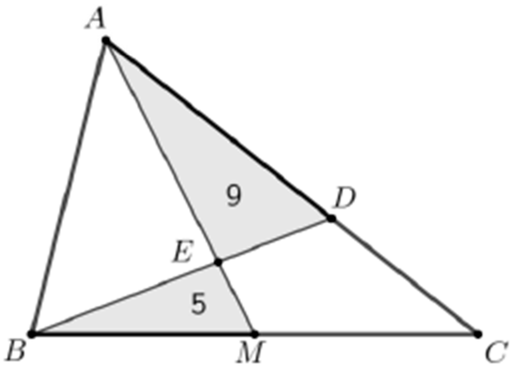
Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di ottobre 2024 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 7 - 28 ottobre 2024

Dato il triangolo ABC, tracciare la mediana AM relativa al lato BC. Il punto D, sul lato AC, è congiunto con il punto B in modo che le aree dei triangoli BME e AED siano rispettivamente 5 e 9 (vedi figura). Trovare l'area del triangolo ABC.



Commento

Il problema poneva un quesito relativo a un triangolo in cui è disegnata la mediana relativa al lato BC e una ceviana BD. In questo modo si formano tre triangoli e un quadrilatero. Conoscendo le aree di due di questi triangoli, si doveva determinare l'area dell'intero triangolo.

E' giunta una sola risposta, da una classe IV di liceo scientifico.
La soluzione arrivata è sostanzialmente corretta ma bisogna notare alcune imprecisioni nell'uso della terminologia [simili non vuol dire equivalenti e i triangoli non si indicano come fossero angoli].

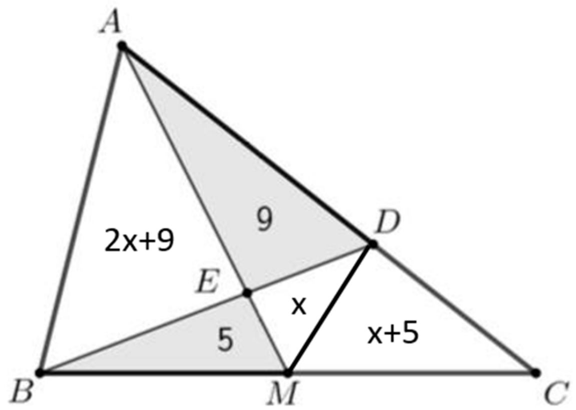
Abbiamo ricevuto una sola risposta da studentesse della seguente scuola:

- Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzione

Soluzione inviata da: Dell'Orto Filomena e Parisi Mariachiara, Classe 4A Liceo Scientifico "ASSTEAS", Buccino (SA)



Dimostrazione:

Colleghiamo il vertice D al punto medio M e [poniamo l'area di EMD] [[la sua area]] uguale a x.

I triangoli [DBM e DMC] sono [corrige: equivalenti] [[errata: simili]], poiché hanno [corrige: basi e altezze relative congruenti] [[la stessa base e la stessa altezza]], per questo l'area del triangolo [DMC] è uguale a $x+5$.

Anche i triangoli [ABM e AMC sono equivalenti] [[sono simili]] in quanto la mediana AM divide il triangolo [ABC] in due parti di area uguale. Questo ci permette di calcolare l'area del triangolo [ABE]:

[non è detto che cosa rappresenta y]

$y+(5)=(9)+(x)+(x+5)$

$y=(9)+(x)+(x+5)-(5)$

$y=2x+9\,.$

Possiamo affermare che:

il triangolo di area $2x+9$ e il triangolo di area 9 hanno , [rispetto alle basi BE e ED], la stessa altezza che per comodità chiamiamo h_1,

il triangolo di area 5 e il triangolo di area x hanno , [rispetto alle basi BE e ED],la stessa altezza che per comodità chiamiamo h_2,

il triangolo di area $2x+9$ e il triangolo di area 5 hanno la stessa base [BE] che per comodità chiamiamo b_1, il triangolo di area 9 e il triangolo di area x hanno la stessa base [ED] che per comodità chiamiamo b_2.

Quindi possiamo dire che:

$$\frac{b_1 * h_1}{2} = 2x + 9$$
$$\frac{b_2 * h_1}{2} = 9$$
$$\frac{b_1 * h_2}{2} = 5$$
$$\frac{b_2 * h_2}{2} = x$$

Risolviamo:

$$b_1 * h_1 = 4x + 18 \Longrightarrow b_1 = \frac{4x + 18}{h_1}$$
$$b_2 * h_1 = 18 \Longrightarrow b_2 = \frac{18}{h_1}$$
$$b_1 * h_2 = 10 \Longrightarrow b_1 = \frac{10}{h_2}$$
$$b_2 * h_2 = 2x \Longrightarrow b_2 = \frac{2x}{h_2}$$

A questo punto possiamo scrivere la seguente proporzione:

$b_1 : b_2 = b_1 : b_2$ [ovvia!]

Sostituiamo i valori e risolviamo:

$$\frac{4x + 18}{h_1} : \frac{18}{h_1} = \frac{10}{h_2} : \frac{2x}{h_2} \Longrightarrow \frac{4x + 18}{18} = \frac{10}{2x} \Longrightarrow \frac{2x + 9}{9} = \frac{5}{x} \Longrightarrow$$

$2x^2 + 9x = 45 \Longrightarrow 2x^2 + 9x - 45 = 0$

$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 9^2 - 4(2)(-45) = 441$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm 21}{4} = \mathrm{x}_1 = 3;\ \mathrm{x}_2 = -\frac{30}{4}$$

Poiché l'area non può avere valore negativo, [è solo] $x = 3$.

L'area del triangolo [ABC] è uguale a:

$A = (2x + 9) + (5) + (9) + (x) + (x + 5)$

Sostituiamo il valore di x e otteniamo:

$A = (6 + 9) + (5) + (9) + (3) + (3 + 5)$

$A = 40.$