FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di aprile 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

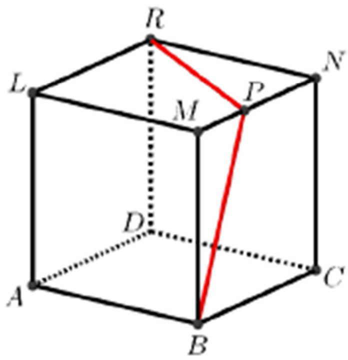
Il testo del problema

Problema - 7 - 28 aprile 2025

Un percorso per andare dal vertice B al vertice R, sulla superficie di un cubo di spigolo unitario, è formato dai segmenti BP e PR, dove P è un punto dello spigolo MN (vedi figura).

a) Determinare la posizione del punto P sullo spigolo MN in modo che BPR sia minimo e la misura di questo percorso minimo.

b) Se BPR è il percorso minimo, considerare il piano per B, P ed R e la sua intersezione con il cubo. Che tipo di poligono si ottiene? Determinare il perimetro e l'area di questo poligono.



Commento

Il problema di aprile richiedeva inizialmente la determinazione del minimo cammino tra due vertici opposti sulla superficie di un cubo. Nella seconda parte occorreva determinare il perimetro e l'area del poligono ottenuto sezionando il cubo con il piano individuato dai vertici opposti del cubo e dal punto che realizza il percorso minimo.

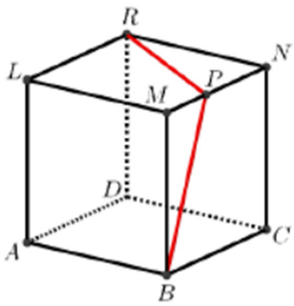
Nelle soluzioni giunte è risolta correttamente la prima parte, mentre nella seconda parte in alcune si afferma che il poligono sezione è un quadrato mentre in realtà è un rombo (che non è non quadrato).

Sono arrivate quattro soluzioni, dalle seguenti scuole:
-IISS "Charles Darwin", Roma
-Liceo Scientifico Statale "F. Severi", Castellamare di Stabia (NA)
-Liceo Classico "Don Mazza", Verona
-Liceo Scientifico Nomentano, Roma

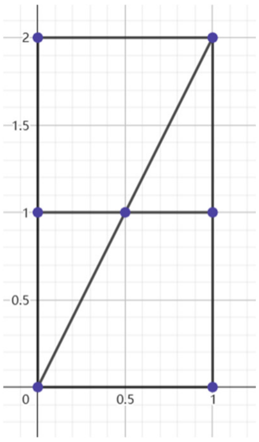
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione svolta da 小金，Enoch J., classe 3^DL , IISS Charles Darwin, Roma



A) Per risolvere il quesito A) ho aperto il cubo e ho preso in considerazione i due piani del cubo che mi interessano



A) Possiamo vedere che la traiettoria più corta è il segmento che congiunge i due punti (R,B) quindi con il teorema di Pitagora otteniamo √(4+1) cioè √5.

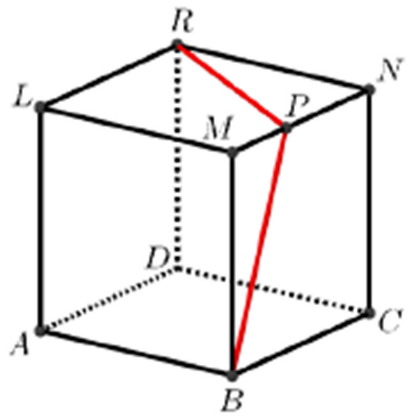
Per trovare dove si trova il punto P ho sfruttato le proporzioni BC:PN=RC:RN sostituendo con i numeri diventa 1:PN=2:1 quindi **PN=1/2** cioè [P e'] [[si trova]] equidistante da M e N.

B)

C) Ritornando al cubo , il piano che passa per i punti R P B passa di sicuro anche per il punto medio di AD essendo PB [parallelo] [[perpendicolare]] a RE (ho chiamato il punto medio di AD E) . Dopo di che abbiamo già calcolato il segmento RB che è il semiperimetro quindi per 2 otteniamo il perimetro cioè **2√5**. Per calcolarci l'area dobbiamo prima capire che tipo di quadrilatero è quindi ho trovato quanto vale un singolo lato del quadrilatero con il teorema di Pitagora √(1+(1/4)) quindi (√5)/2 quindi i 4 lati sono uguali pensando che il poligono puo' essere un quadrato ho fatto il torema di Pitagora per ottenere RB se è uguale a RB ottenuto con la formula della diagonale di un cubo (d=l√3,l=lato,d=diagonale) il quale non vengono uguali, una è √3 e l'altra è(√10)/2 quindi dimostro che non è un quadrato perchè non vale il teorema di Pitagora quindi è un **rombo [un po' confuso].** Per calcolarmi l’altra diagonale ho notato che l’altra diagonale è il segmento EP che sono due punti medi [di chi ?] quindi sempre con il teorema di Pitagora ottengo $\sqrt{(1+1)}=\sqrt{2}$. Quindi in fine $A_{rombo}=(\sqrt{3}*\sqrt{2})/2=$**$(\sqrt{6})/2$.**

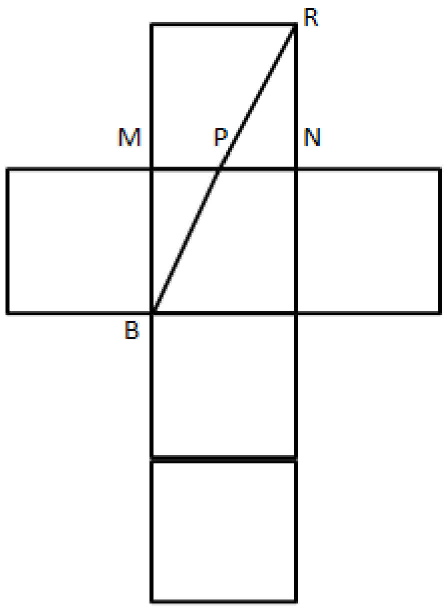
2) Problema svolto da:

PASQUALE MARIA D'A.; ALESSIO N., CLASSE 2^ Sezione I Liceo Scientifico Statale "Francesco Severi" Castellamare di Stabia (NA)



Un percorso per andare dal vertice B al vertice R, sulla superficie di un cubo di spigolo unitario, è formato dai segmenti BP e PR, dove P è un punto dello spigolo MN.

a) **Determinare la posizione del punto P sullo spigolo MN in modo che BPR sia minimo e la misura di questo percorso minimo.**



DIMOSTRAZIONE:

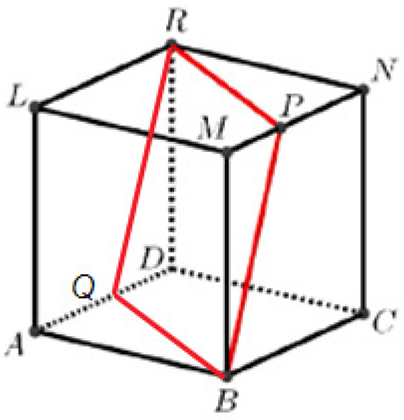
u = Spigolo unitario

Sviluppando il cubo sul piano notiamo che [la spezzata] [[il segmento]] BPR ha una distanza minima quando il punto P [e' allineato con B e R cioe'] coincide con il punto medio di MN, per la disuguaglianza triangolare: in un triangolo la lunghezza di un lato è sempre minore della somma degli altri due. Di conseguenza il punto P deve appartenere al segmento BR e la sua misura equivale a:

$$\text{BPR} = \sqrt{(2u)^2 + u^2}$$

$$\text{BPR} = \sqrt{5u^2}$$

b) **Se BPR è il percorso minimo, considerare il piano per B, P ed R e la sua intersezione con il cubo. Che tipo di poligono si ottiene? Determinare il perimetro e l'area di questo poligono.**



Q = punto medio di AD

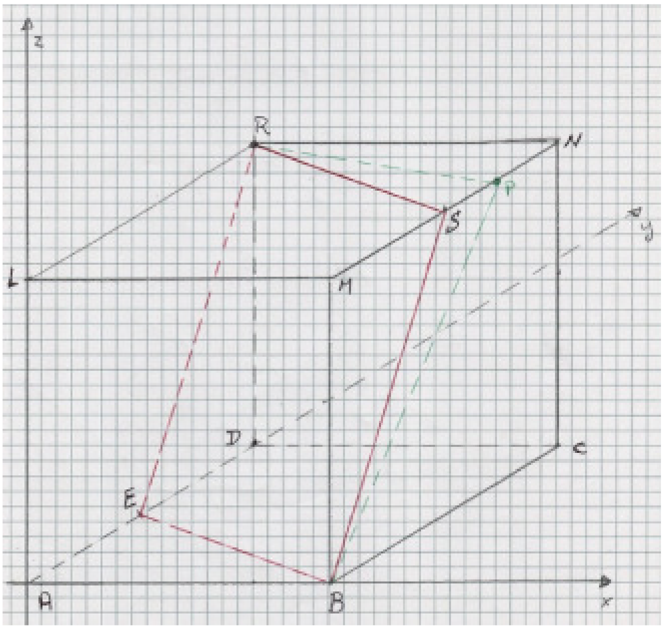
Considerando il piano per i punti B, P ed R e la sua intersezione con il cubo si ottiene un [rombo che non e' un quadrato] dai lati uguali a BP, PR, RQ, QB.

$$BP^2 = MP^2 + BM^2$$

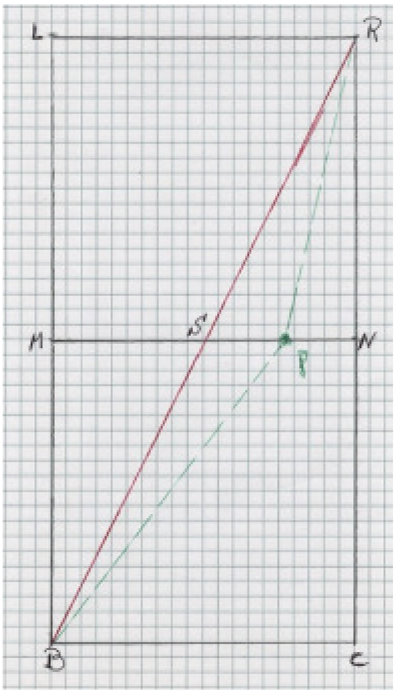
$$BP = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + u^2} \Rightarrow BP = \sqrt{\frac{u^2}{4} + u^2}$$

$$BP = \sqrt{\frac{5}{4}u^2} \Rightarrow BP = \frac{\sqrt{5}}{2}u$$

3)Soluzione inviata da Ettore C. - Terzo anno Liceo Classico "Don Mazza" – Verona



Determinare il minimo percorso da B ad R equivale a determinare i segmenti BP e PR, la somma delle cui lunghezze è minima.
Detta analisi è più semplice se rendiamo complanari le facce BCNM e MNRL del cubo. Appare così evidente che il percorso più breve fra B ed R è il segmento di Retta BR, che incrocia il lato MN nel punto di mezzo S.



Ogni punto generico P, sul lato MN, individua con il segmento BR, passante per S, un triangolo di lati BP, PR e BR.
In un triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due lati:

$$BR < BP + PR$$

Nello spazio assumiamo un sistema di coordinate cartesiane di origine A, con assi lungo gli spigoli AB, AD, AL.
Poiché lo spigolo del cubo è unitario, i vertici del cubo hanno le seguenti coordinate:
A(0,0,0); B(1,0,0); C(1,1,0); D(0,1,0);
L(0,0,1); M(1,0,1); N(1,1,1); R(0,1,1). Il punto S è di coordinate: S(1, $\frac{1}{2}$,1).

E' ora possibile determinare l' equazione del piano, che passa per i tre punti B, S, R.

L' equazione del piano generico è: $ax + by + cz = d$.
Imponiamo che i tre punti B, S, R appartengano al piano:

$a = d$
$a + \frac{1}{2}b + c = d$
$b + c = d$.

Posto $d = 1$, si ottiene l' equazione del piano: $x + 2y - z = 1$.

Per determinare l' intersezione del piano ottenuto con la retta AD risolviamo il sistema:

$x + 2y - z = 1$
$z = 0$
$x = 0$.
Ricaviamo il punto E(0, $\frac{1}{2}$, 0).
Il quadrilatero B, S, R, E ha tutti i lati eguali, perché essi sono ipotenuse di triangoli rettangoli formati da lati e semilati delle facce di un cubo.

Determiniamo il lato BS osservando il triangolo rettangolo BMS: $\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Il perimetro del quadrilatero è $2\sqrt{5}$.

Per stabilire se BSRE è un quadrato o un rombo, determiniamo la lunghezza delle diagonali BR ed SE:

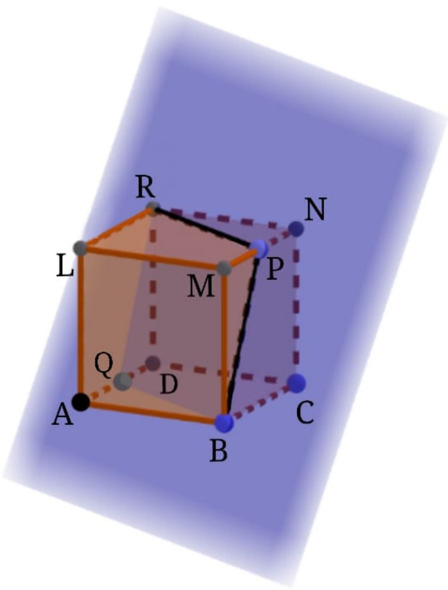
B(1,0,0) ; R(0,1,1)
BR = $\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{3}$

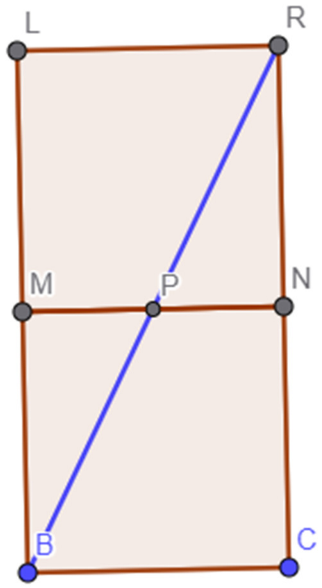
S(1, $\frac{1}{2}$,1) ; E(0, $\frac{1}{2}$,0)

SE = $\sqrt{(1-0)^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

Concludiamo che il quadrilatero è un rombo e l' area è: $\frac{\sqrt{2}\bullet\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4)Soluzione inviata dalla Classe 1^G, Liceo Scientifico Nomentano, Roma





a) Il percorso BPR è minimo se è la diagonale del rettangolo BCRL, quindi deve tagliare a metà MN, di cui P è il punto medio.

   BPR = $\sqrt{(1+4)} = \sqrt{5}$

b) La figura che si forma è un quadrato [no!] perché:
   - In un cubo l'angolo [diedro] tra due facce è retto, [[quindi tutti gli angoli sono retti]] [quali ?] e la figura è un rettangolo [no!].
   - In un rettangolo i lati sono uguali a due a due, e poiché due lati consecutivi sono uguali, tutti i lati del rettangolo sono uguali e quindi è un quadrato [no!].

   $2P=2\sqrt{5}$
   A = $[(\sqrt{5})/2]^2 = 5/4$ [no! perché non è un quadrato].