FLAT*landia*

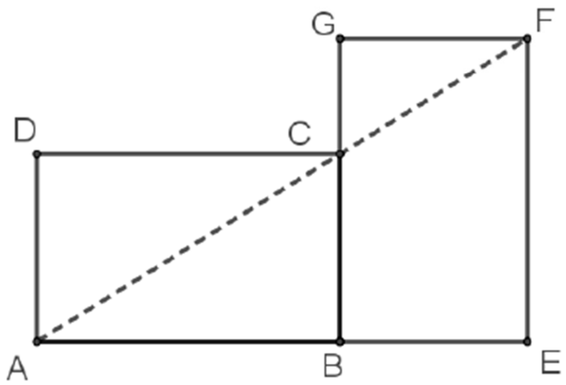
Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di dicembre 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 1 - 22 dicembre 2023

Sono dati due rettangoli congruenti disposti come in figura, in cui il lato BE è posto sul prolungamento del lato AB.
Dimostrare che i punti A, C ed F sono allineati se e solo se i rettangoli sono aurei.



Nota. Un rettangolo si dice aureo se un lato è la sezione aurea dell'altro lato.
Dato un segmento AB e un punto S di AB, AS è la sezione aurea di AB se vale la seguente proporzione

$$AB : AS = AS : (AB - AS).$$

Commento

Il problema poneva un quesito sull'allineamento di tre punti in una figura ottenuta tramite l'unione di due rettangoli (aurei) congruenti. Il problema è forse risultato difficile ed insolito, perché abbiamo ricevuto solo quattro risposte da studenti (con qualche dichiarato suggerimento), tutte provenienti dalla stessa scuola, il Liceo Scientifico "Assteas", di Buccino (SA).

Le risposte arrivate sono tutte corrette a parte un'affermazione, evidentemente errata, riguardante i parallelogrammi. Notiamo che alcuni passaggi andrebbero comunque maggiormente motivati.

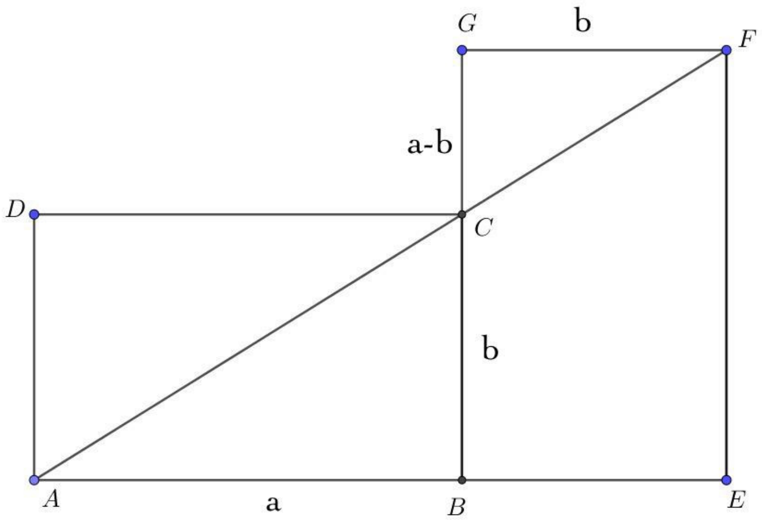
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Problema svolto da: Dell'Orto Filomena, Parisi Mariachiara, Classe 3A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)

I punti A, C e F sono allineati $\Longrightarrow$ *I rettangoli sono aurei.*

I triangoli $\overset{\Delta}{\overbrace{ABC}}$ e $\overset{\Delta}{\overbrace{CGF}}$ sono rettangoli e $\widehat{GCF} \cong \widehat{ACB}$ [perché opposti al vertice], allora sono simili per il I criterio di similitudine.
Per comodità poniamo il segmento $\overline{AB}=a$ e $\overline{BC}=b$, $\overline{GF}=b$ e [quindi] $\overline{CG}=a-b$.



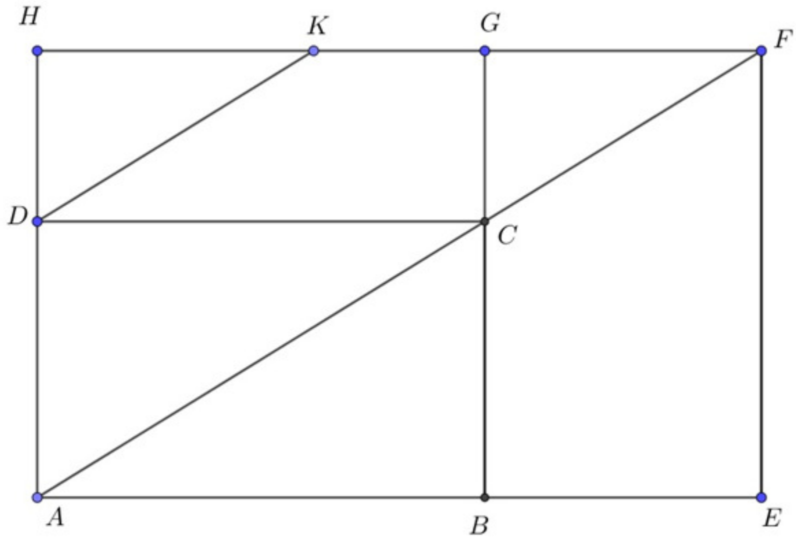
[Dalla similitudine dei due triangoli otteniamo la proporzione:]

$$\overline{AB}:\overline{GF} = \overline{BC}:\overline{CG} \Longrightarrow a : b = b : (a-b)$$

Da questa proporzione possiamo dedurre che b è sezione aurea di a, possiamo concludere che i rettangoli sono aurei.

I rettangoli sono aurei $\Longrightarrow$ *I punti A, C e F sono allineati.*

Seconda parte



Costruiamo il rettangolo $DCGH$ e consideriamo il segmento $\overline{DK}$ parallelo al segmento $\overline{AC}$. I triangoli $\overbrace{DHK}^{\Delta}$ e $\overbrace{ADC}^{\Delta}$ sono rettangoli e $\widehat{HDK} \cong \widehat{DAC}$ [perché?], allora sono simili per il I criterio di similitudine. Possiamo scrivere la proporzione [posto HK=x]

$$\overline{DC}:\overline{AD} = \overline{HK}:\overline{DH} \implies a : b = x : (a-b)$$

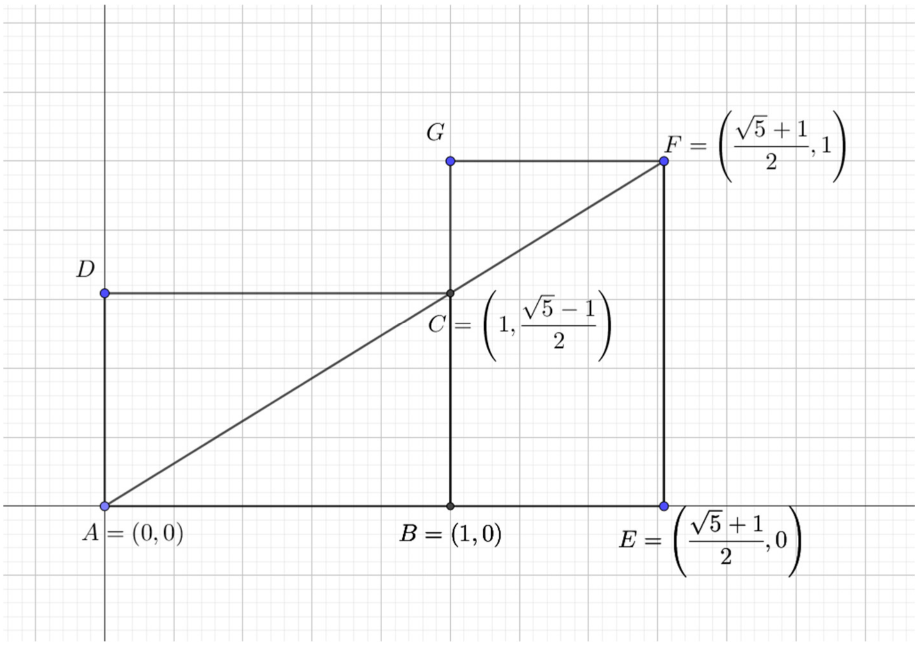
Poiché i rettangoli sono aurei, allora $x = \overline{HK} = b$.

Possiamo dedurre che i triangoli $\widehat{DHK}$ e $\widehat{CGF}$ sono congruenti perché rettangoli con due cateti congruenti, in particolare $\overline{DK} \cong \overline{CF}$

Il quadrilatero $DCFK$ *ha i lati* $\overline{DK} \cong \overline{CF}$, *allora esso è un parallelogramma. [se ha due lati opposti congruenti non è necessariamente un parallelogramma]*

[[… il resto viene omesso]]

2)Soluzione (seconda) inviata da: Dell'Orto Filomena, Parisi Mariachiara, Classe 3A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Dim:

Dimostriamo che vale la seguente equivalenza:

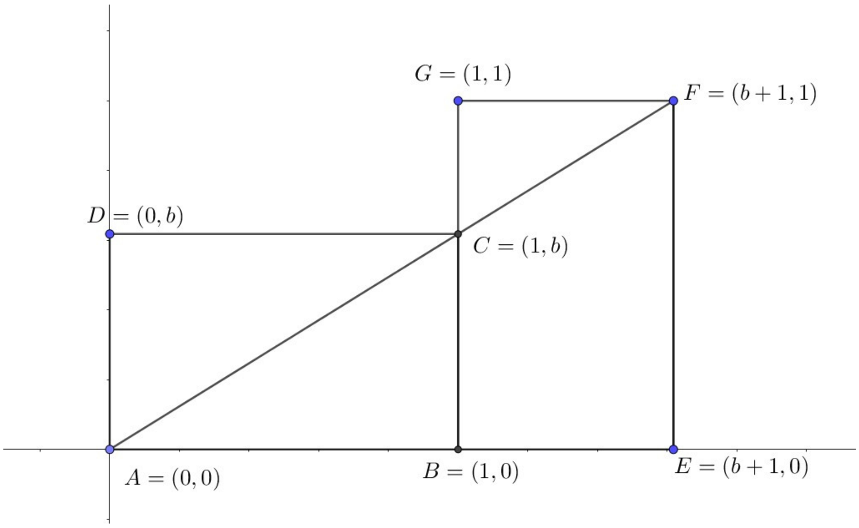
I rettangoli sono aurei $\Longrightarrow$ *I punti A, C e F sono allineati*

Se i rettangoli sono aurei sappiamo che il lato più piccolo è $b = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. Possiamo per comodità prendere $\overline{AB} = a = 1$ e quindi $\overline{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$La\ retta\ \ AC\ ha\ equazione\!:\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$$

Ora proviamo che le coordinate di F [[appartengono a]] [verificano l'equazione di] tale retta:

$F \equiv \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 1\right) \Rightarrow \quad 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4}{4} \Rightarrow 1 = 1$, questo dice che i punti A, C e F sono allineati



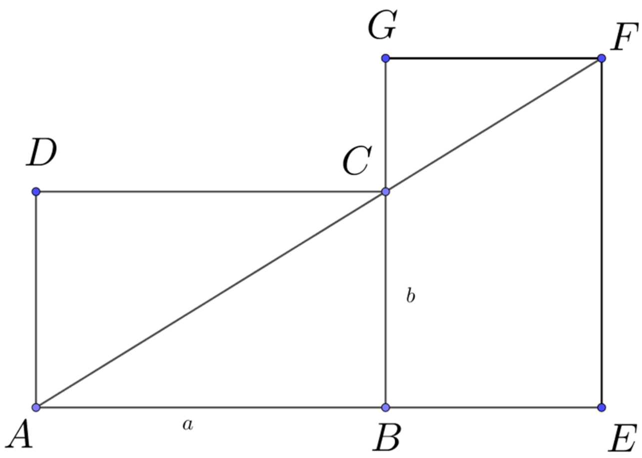
I punti A, C e F sono allineati $\Longrightarrow$ *I rettangoli sono aurei*

$\overline{AB} = 1,\ \overline{BC} = b$ *, questo giustifica le coordinate dei punti in alto. I* triangoli $\overset{\Delta}{\overbrace{ABC}}$ e $\overset{\Delta}{\overbrace{AEF}}$ sono simili per il I criterio di similitudine

$\overline{AB}:\overline{BC} = \overline{AE}:\overline{EF} \Longrightarrow 1: b = (b + 1): 1 \Longrightarrow b^2 + b = 1 \Longrightarrow b^2 + b - 1 = 0$

Risolvendo questa equazione di secondo grado si trova come soluzione accettabile $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e questo dimostra che i rettangoli sono aurei. [[essendo congruenti]]

3)Soluzione inviata da Forlenza Giovanni, Classe 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Premessa: Considerando $\overline{AB}$=a $\wedge$ $\overline{BC}$=b, con a > b per definizione b è sezione aurea di a se vale la seguente relazione:

$$a : b = b : (a-b) \iff a^2 - ba - b^2 = 0 \iff a = \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2} \iff a = \frac{b(\sqrt{5}+1)}{2}$$

Vale la seguente relazione:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

$$\phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \phi+1, \text{ quindi}$$

$$(F) \qquad \phi^2 = \phi+1$$

È conveniente ai fini della dimostrazione porre b=1.

Implicazione 1: Supponiamo che i punti siano allineati e dimostriamo che $a = \phi$.

$A_{AEF} = \frac{a(a+1)}{2}$

$A_{ABC} = \frac{a}{2}$

$A_{BEFC} = \frac{a+1}{2}$

$A_{AEF} = A_{ABC} + A_{BEFC} = \frac{a(a+1)}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a+1}{2}$

$a^2 + a = a + a + 1 \Rightarrow \quad a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow a = \phi$

Implicazione 2

Supponiamo che i due rettangoli siano aurei, dobbiamo provare che A,C, e F sono allineati e per farlo dimostriamo che vale la relazione:

$\overline{AF} = \overline{AC} + \overline{CF} \iff C \in \overline{AF}$

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AE} + \overline{EF}} = \sqrt{(\phi+1)^2 + \phi^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB} + \overline{BC}} = \sqrt{\phi^2 + 1}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{\overline{CG} + \overline{GF}} = \sqrt{(\phi - 1)^2 + 1}$$

[Nelle tre relazioni precedenti mancano i quadrati delle misure dei segmenti]

$$\overline{AF} = \sqrt{(\phi + 1)^2 + \phi^2} = (\mathrm{F}) = \sqrt{\phi^4 + \phi^2} = \sqrt{\phi^2(\phi^2 + 1)} = (\mathrm{F}) = \phi\sqrt{\phi + 2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\phi^2 + 1} = (\mathrm{F}) = \sqrt{\phi + 2}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{(\phi - 1)^2 + 1} = \sqrt{\phi^2 - 2\phi + 1 + 1} = (\mathrm{F}) = \sqrt{\phi + 1 - 2\phi + 2} = \sqrt{3 - \phi}$$

$$\overline{AF} = \overline{AC} + \overline{CF} \iff \phi\sqrt{\phi + 2} = \sqrt{\phi + 2} + \sqrt{3 - \phi} \iff$$

$$\iff \phi\sqrt{\phi + 2} - \sqrt{\phi + 2} = \sqrt{3 - \phi} \iff (\phi - 1)\sqrt{\phi + 2} = \sqrt{3 - \phi}$$

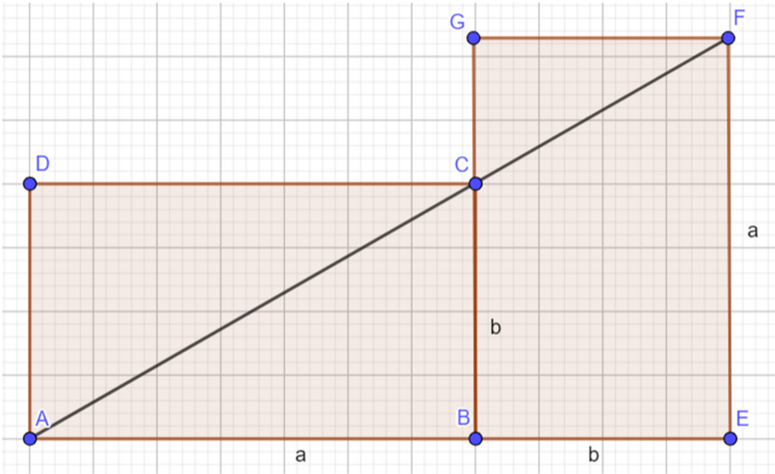
[i due membri sono positivi quindi possiamo elevare al quadrato]

$$\iff (\phi - 1)^2(\phi + 2) = 3 - \phi \iff \left(\phi^2 - 2\phi + 1\right)(\phi + 2) = 3 - \phi \iff$$

$$(\mathrm{F}) \Rightarrow (2 - \phi)(2 + \phi) = 3 - \phi \iff 4 - \phi^2 = 3 - \phi \iff \phi^2 = \phi + 1$$

L'ultima relazione è una identità e questo prova che $\overline{AF} = \overline{AC} + \overline{CF}$ e quindi A, C e F sono allineati.

4) Problema svolto da Fornataro Concetta, Classe 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Dim:

La dimostrazione si ottiene se proviamo la doppia implicazione:
(P) A, C e F sono allineati ⟺ (Q) I due rettangoli sono aurei.

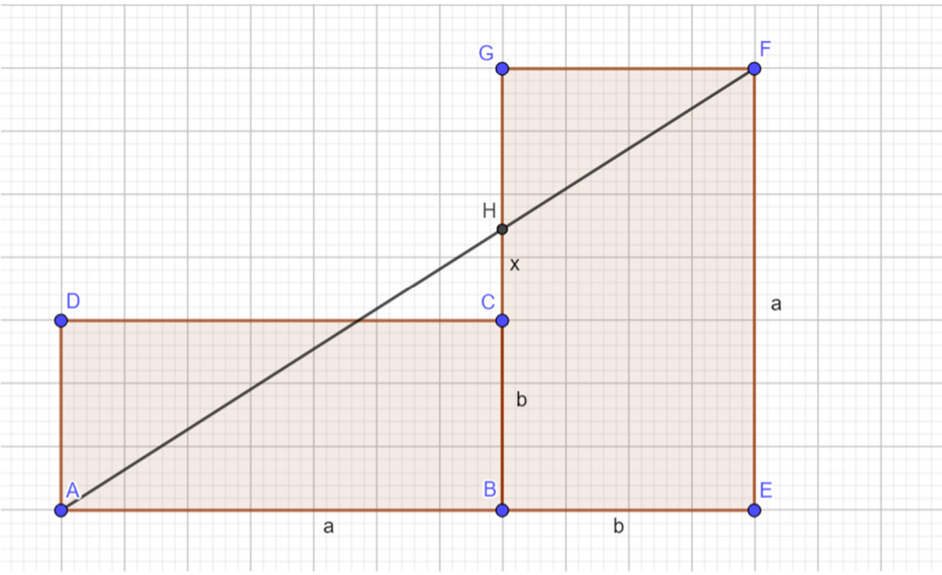
$$(P) \implies (Q)$$

Poniamo $\overline{AB} \cong \overline{EF} = a$ e $\overline{BC} \cong \overline{BE} = b$. I triangoli $\overbrace{ADC}^{\Delta}$ e $\overbrace{CGF}^{\Delta}$ sono simili per il I° Criterio di similitudine in quanto sono due triangoli rettangoli con gli angoli $\widehat{DCA} \cong \widehat{GFC}$ [perché?] . Possiamo quindi scrivere la seguente proporzione:

$\overline{DC}:\overline{GF} = \overline{AD}:\overline{CG} \implies a : b = b : (a-b)$ e quest'ultima relazione ci dice che <u>i due rettangoli sono aurei</u> essendo per ipotesi congruenti.

$$(Q) \implies (P)$$

Implicazione inversa
Consideriamo ora la seguente figura:



Per ipotesi sappiamo che i due rettangoli sono aurei, quindi vale la seguente proporzione:
$a:b = b:(a-b) \Leftrightarrow (a+b):a = a:b$ (si ottiene applicando la proprietà del comporre)

Poniamo il segmento $\overline{HC} = x$

Sappiamo che i triangoli $\overbrace{ABH}^{\Delta}$ e $\overbrace{AEF}^{\Delta}$ sono simili per il I° Criterio di similitudine in quanto trattasi di due triangoli rettangoli con l'angolo $\widehat{EAF}$ in comune e quindi

$$\overline{AE}:\overline{AB} = \overline{EF}:\overline{BH} \implies (a+b):a = a:(b+x)$$

Ma se $(a+b):a = a:b \wedge (a+b):a = a:(b+x) \implies a:b = a:(b+x)$, questa relazione è vera solo se x=0. Da ciò deduciamo che H coincide con C e i punti <u>A, C e F sono allineati</u>.