FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di aprile 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 11 - 29 aprile 2023

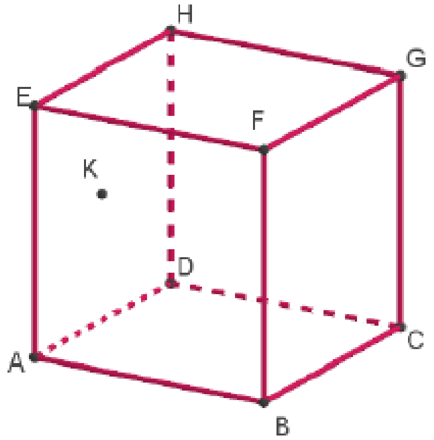
Nel cubo $ABCDEFGH$ il punto K è il centro della faccia $ADHE$ (vedi figura).

a) Dimostrare che il triangolo ACK è rettangolo.

b) Supposto che lo spigolo del cubo sia unitario, determinare la superficie del tetraedro $ACKF$.

c) Nella stessa ipotesi precedente, determinare il volume del tetraedro $ACKF$.

Motivare le risposte.



Commento

Il problema poneva un quesito relativo a un cubo e al centro di una sua faccia. La prima domanda chiedeva di dimostrare che un certo triangolo era rettangolo. Nelle domande successive si chiedeva di calcolare la superficie totale e il volume di un tetraedro ottenuto nel cubo (che risultava essere la metà di un tetraedro regolare inscritto nel dato cubo).

Le due soluzioni arrivate sono complessivamente corrette e ben motivate, anche se alcuni passaggi avrebbero dovuto essere meglio approfonditi.

Abbiamo ricevuto solo due risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
- Liceo Scientifico "Calini", Brescia
- Liceo Scientifico "Euclide", Cagliari.

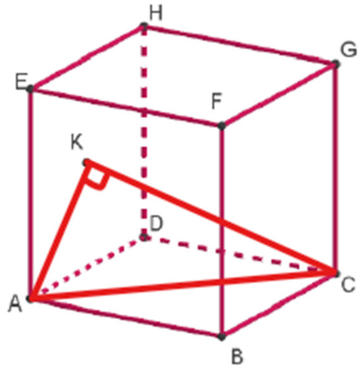
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

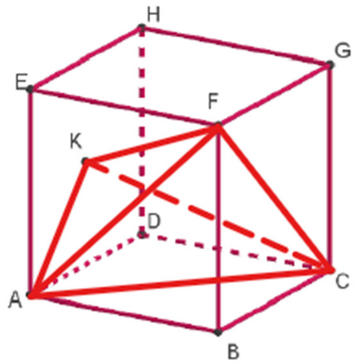
1) **Soluzione inviata da Davide Averoldi, classe 4a Liceo Scientifico Calini Brescia**

a) Si può dimostrare che il triangolo ACK è rettangolo verificando che CK è altezza del triangolo ACH.

Essendo AK = KH, CK è la mediana di ACH dal punto C, ed essendo inoltre AC = CH [perché diagonali di due facce del cubo] e dunque ACH isoscele su base AH, tale mediana è anche altezza relativa alla base AH.
ACK è quindi rettangolo.



b) La superficie del tetraedro ACFK è la somma delle superfici dei triangoli AFK; ACF; ACK; CFK:



La superficie di ACK, avendo comodamente appena dimostrato che è rettangolo risulta, trovando base AK e altezza KC con Pitagora: [andava spiegato meglio il calcolo della misura di KC, ottenuta applicando il teor. di Pitagora nel triangolo rettangolo CDK].

$$S_{ACK} = \frac{AK \cdot KC}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{4+1+1}{4}}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Per simmetria [occorreva spiegare meglio], la superficie di AFK è uguale.

Riguardo l'area di AFC, essa è per simmetria la stessa del triangolo AFH, quindi il doppio di AFK poiché K è il punto medio di AH [i triangoli AFC, AFH sono equilateri].

Infine, per quella di CFK prendo come base FC e come altezza la distanza di K da FC:

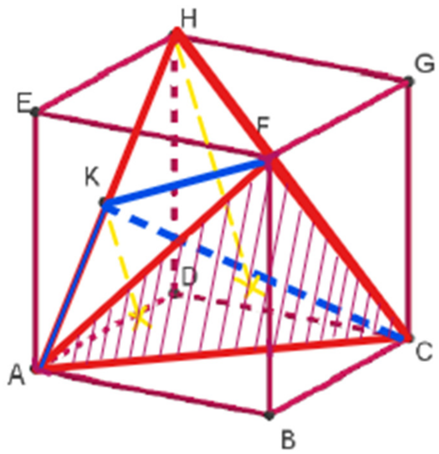
$$S_{CFK} = \frac{CF \cdot h_K}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[Perché $h_K = 1$? Occorreva spiegarlo.]

Sommando per ottenere la superficie totale:

$$S_{ACK} + S_{AFK} + S_{AFC} + S_{CFK} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Considero il tetraedro regolare ACFH, che condividendo con ACFK la base ACF e avendo altezza doppia (essendo K punto medio di AH e applicando Talete alle altezze relative) occupa il doppio del volume.



Calcolando il volume di ciascuno dei quattro tetraedri congruenti ABCF = AEFH = CFHG = ACDH = 1/6 , sommandoli e sottraendoli al volume del cubo si ottiene che il volume di ACFH è:

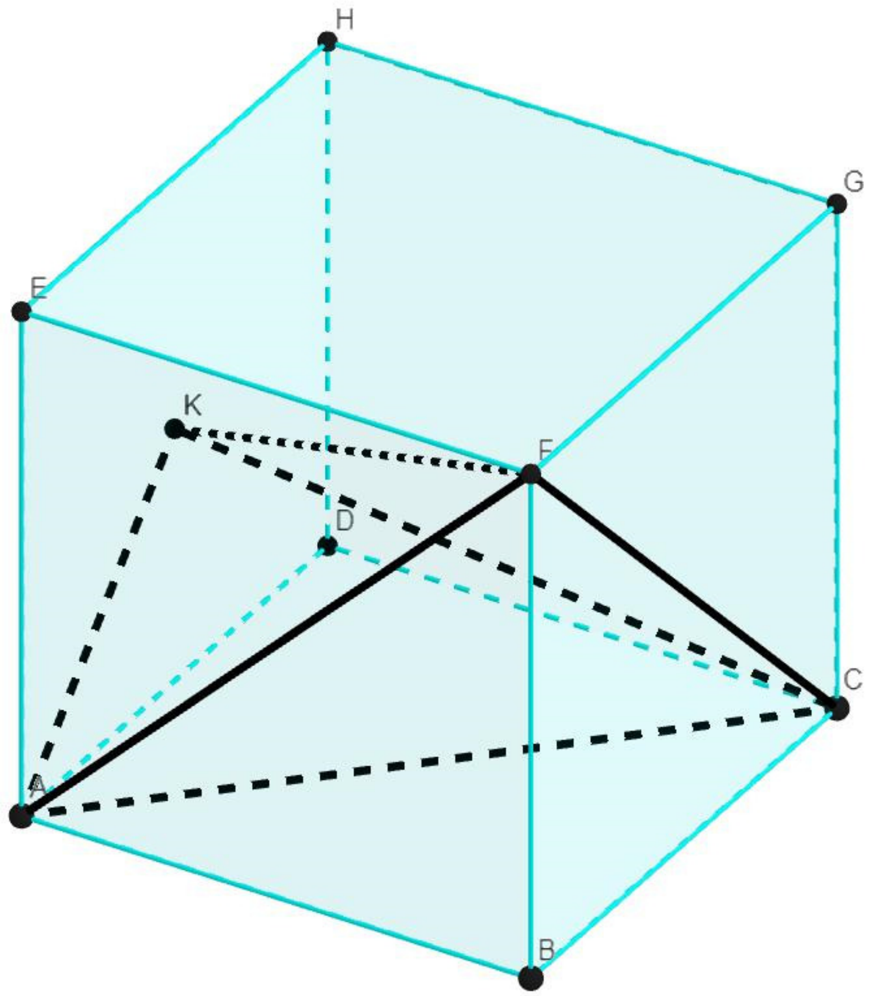
$$V_{ACFH} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

quindi un terzo del volume del cubo.

Il volume di ACFK è quindi:

$$V_{ACFK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(1 \cdot 1 \cdot 1)\right) = \frac{1}{6}$$

2) Soluzione inviata da classe Lorenzo Onnis, Sebastiano Murgia e Luca Sanna, 2a B del Liceo Scientifico Euclide di Cagliari.



Ipotesi

- ABCDEFGH è un cubo
- Il punto K è il centro della faccia [ADHE] [[ADEH]]
- Lo spigolo del cubo è unitario

Tesi

a) Il triangolo ACK è rettangolo
b) Determinare la superficie laterale del tetraedro ACKF
c) Determinare il volume del tetraedro ACKF

Punto a)

Per dimostrare che il triangolo ACK è rettangolo osserviamo che il triangolo ACH è un triangolo equilatero perché i tre lati sono tutti diagonali delle facce del cubo. Osserviamo anche che il punto K - il centro della faccia ADHE - è anche punto medio di AH, perciò CK è una mediana del triangolo ACH e quindi anche altezza del triangolo. Essendo CK altezza del triangolo ACH, l'angolo CKA è retto e il triangolo ACK è rettangolo in K.

Punto b)

Per calcolare l'area del tetraedro ACKF bisogna calcolare le aree delle sue facce triangolari.
Per calcolare l'area del triangolo ACK abbiamo bisogno della misura di CK. Sapendo che AC è la diagonale di un quadrato unitario e AK è metà di questa otteniamo che $\overline{AC} = \sqrt{2}$ e $\overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ACK otteniamo che $\overline{CK} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Calcolando quindi l'area del triangolo ACK otteniamo $A_{ACK} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Possiamo poi osservare che il triangolo AFK è congruente al triangolo ACK perché hanno il lato AK in comune, i lati AF e AC congruenti perché entrambi sono diagonali di facce del cubo e i lati KF e CK [congruenti] perché sono entrambi le distanze del centro di una faccia [da due] vertici di quella opposta. Quindi AFK e ACK sono congruenti, e quindi $A_{AFK} = A_{ACK} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Per calcolare l'area del triangolo ACF notiamo che il triangolo è equilatero perché i lati sono tutti diagonali delle facce del cubo, quindi [$\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FA} = \sqrt{2}$] e l'altezza sarà $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Calcolando l'area del triangolo ACF otteniamo $A_{ACF} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per calcolare l'area del triangolo KFC notiamo che il triangolo è isoscele perché $\overline{FK} \cong \overline{CK}$, l'altezza relativa a $\overline{CF}$ è uguale alla distanza tra le facce opposte del cubo e $\overline{CF} = \sqrt{2}$ perché è una diagonale di una faccia del cubo.

Calcolando l'area del triangolo KFC otteniamo $A_{KFC} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sommando le aree delle facce del tetraedro ACKF otteniamo quindi
$A_{ACKF} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

Punto c)

Per calcolare il volume, come dimostrato nel punto a, possiamo notare che AK è perpendicolare a KC. I due segmenti KC e CF individuano un piano, su cui giace il triangolo KFC, perpendicolare ad AK.
A questo punto essendo AK l'altezza e KFC la base del tetraedro possiamo calcolare il volume del tetraedro ACKF:
$V_{ACKF} = \overline{AK} \cdot A_{KFC} \cdot \frac{1}{3}$, quindi $V_{ACKF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.