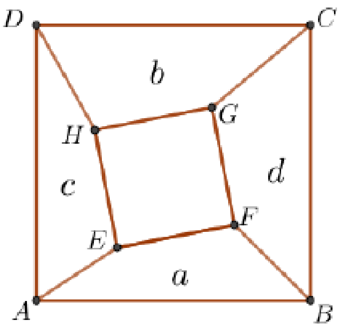
FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema – 7 – 31 gennaio 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Un "piccolo" quadrato $EFGH$ è posto arbitrariamente all'interno di un quadrato $ABCD$ più grande (vedi figura).
Se a è l'area del quadrilatero $ABFE$, b l'area del quadrilatero $CDHG$, c l'area del quadrilatero $ADHE$ e d l'area del quadrilatero $BCGF$, provare che $a+b=c+d$.
Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto 5 risposte, due da classi seconde, due da classi terze e una da una classe prima, tutte di Liceo scientifico.

Il problema poneva un quesito relativo a un quadrato, con un altro quadrato al suo interno. Occorreva dimostrare una relazione tra le aree in cui rimane suddivisa l'area compresa tra i due quadrati.

Le risposte arrivate sono tutte sostanzialmente corrette e utilizzano la suddivisione delle quattro zone comprese tra i due quadrati in opportuni poligoni.

Osserviamo che quando bisogna indicare un quadrilatero tramite i suoi vertici (ma anche pentagoni, esagoni,…) è buona cosa scrivere i suoi vertici sempre in senso orario oppure sempre in senso antiorario.

Sono arrivate risposte da studenti delle seguenti scuole:

-Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento

-Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara

-Liceo "B. Russell"- liceo delle scienze applicate, Cles (TN)

-Istituto Internazionale Agnelli, Liceo scientifico, Torino

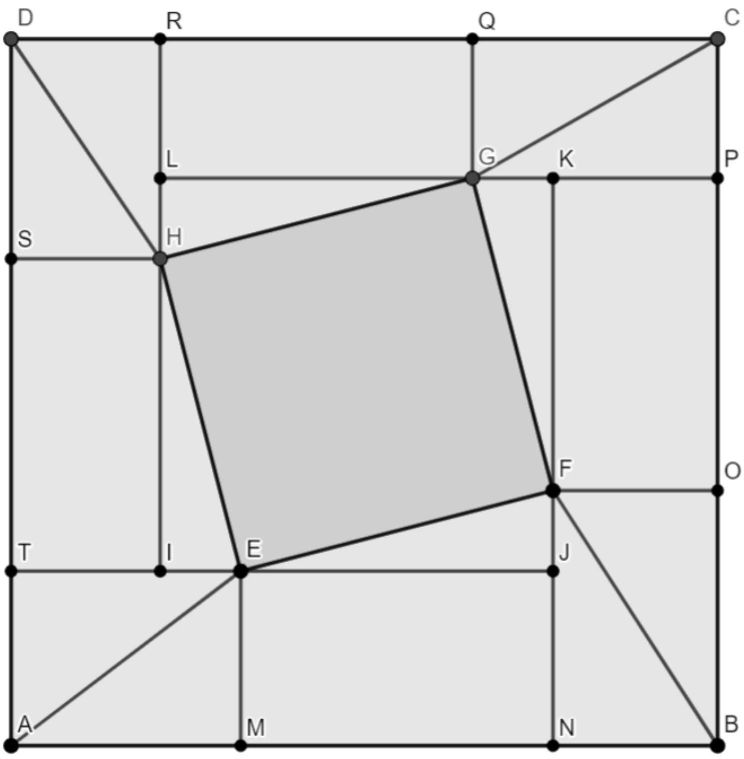
-Liceo Scientifico "A. Roiti", Ferrara

Le riportiamo qui di seguito in ordine di arrivo.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Aldo Coletta, classe 3^C, Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento



Ipotesi:

- ABCD è un quadrato
- EFGH è un quadrato
- Area ABFE = a
- Area CDHG = b
- Area ADHE = c
- Area BCGF = d

Tesi: a + b = c + d

<u>Dimostrazione.</u>

Per prima cosa, scomponiamo i trapezi in figure più semplici.

Tracciamo allora le parallele ai lati del quadrato ABCD passanti per i vertici del quadrato EFGH e individuiamo alcuni interessanti punti di intersezione: M , N , J , O , P , K , Q , R , L, S, T, I

Ne risulta che

a+b= (AEM + NBF + MNJE + EJF) + (GCQ + DRH + RLGQ + HGL)

c+d= (AET + SHD + IEH + STIH) + (BOF + PCG + FOPK + FKG)

Notiamo che nel rettangolo (per costruzione) AMET, la diagonale $\overline{AE}$, lo divide in due triangoli equiestesi [(anche congruenti)]. Lo stesso avviene anche in NBOF, GPCQ e SHRD. Dunque: AEM=AET, NBF=BOF, PCG=CGQ, SHD=DRH.

Osserviamo poi che EJF ≅ IEH ≅ HGL ≅ FKG per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli, siccome hanno l'ipotenusa congruente ($\overline{EF}$=$\overline{FG}$=$\overline{GH}$=$\overline{HE}$) e $\widehat{FEJ}$=$\widehat{EHI}$=$\widehat{HGL}$=$\widehat{GFK}$; questo poiché:

$\widehat{HEI}$ = 180° - $\widehat{HEF}$ – $\widehat{FEJ}$ = 180° - 90° - $\widehat{FEJ}$ = 90° - $\widehat{FEJ}$ e ancora

$\widehat{EHI}$ = 180° - $\widehat{HIE}$ – $\widehat{HEI}$ = 180° - 90° - 90° + $\widehat{FEJ}$ = $\widehat{FEJ}$.

(Lo stesso avviene anche per gli angoli $\widehat{HGL}$ e $\widehat{GFK}$)

Infine, definiamo

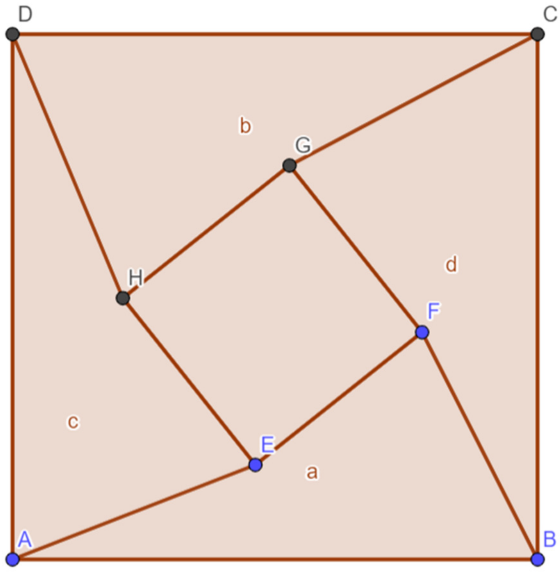
- Area(MNJE)+Area(LGQR)=$\overline{MN}*\overline{EM}$+$\overline{RQ}*\overline{QG}$
- Area(FOPK)+Area(TIHS)=$\overline{FO}*\overline{PO}$+$\overline{TI}*\overline{TS}$

Ma $\overline{MN}$=$\overline{RQ}$=$\overline{ST}$=$\overline{PO}$ e $\overline{TI}$+$\overline{FO}$=$\overline{ME}$+$\overline{RL}$=$\overline{AD}$-$\overline{LH}$-$\overline{HI}$ per dimostrazione precedente.

Di conseguenza, anche MNJE+LGQR=TIHS+FOPK, allora a+b=c+d .

C.V.D.

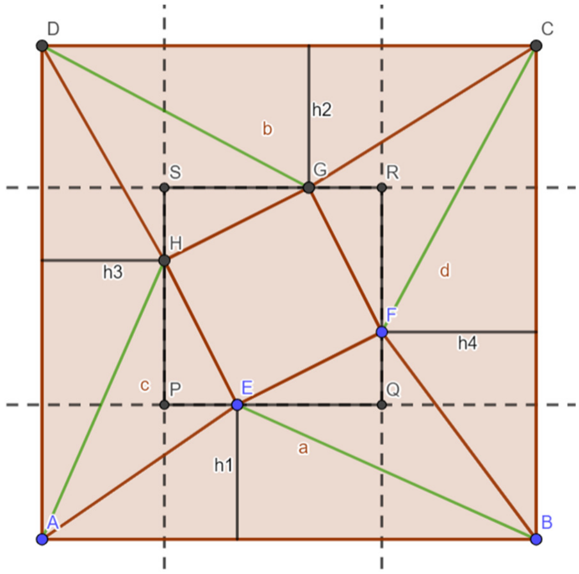
2) Soluzione inviata da Andrea Di Cintio, 2^E, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara



IPOTESI:
ABCD quadrato;
EFGH quadrato;
Area(ABFE) □ a
Area(CDHG) □ b
Area(ADHE) □ c
Area(BCGF) □ d

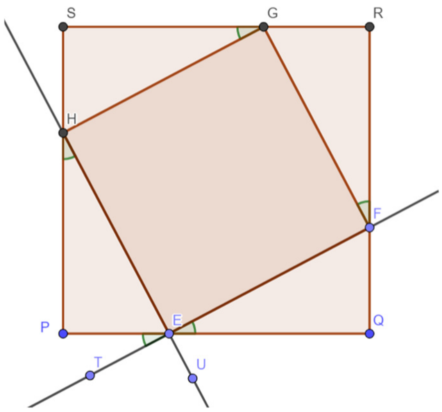
TESI:
a+ b = c + d

DIMOSTRAZIONE



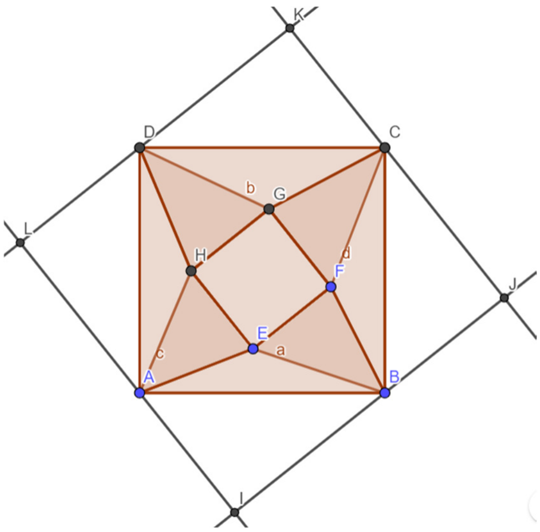
Traccio i segmenti EB, FC, GD e AH e le altezze h1, h2, h3 e h4 rispettivamente dei triangoli ABE, CDG, ADH e BCF. Traccio le rette parallele ai lati del quadrato ABCD e passanti per i vertici del quadrato EFGH. Chiamo i punti di intersezione delle rette P, Q, R e S.
I triangoli ABE, BCF, CDG e DAH hanno tutti la stessa base perché ABCD è un quadrato (per ipotesi).
Prendo in considerazione i triangoli ABE e CDG:
Area(ABE) + Area(CDG) □ (AB*h1)/2 + (CD*h2)/2,
Ma, siccome, AB □ CD per ipotesi:
Area(ABE) + Area(CDG) □ (AB*(h1+h2))/2;
Questo si può applicare anche ai triangoli DAH e BCF, ottenendo che:
Area(AHD) + Area(BCF) □ (BC*(h3+h4))/2;
I punti P, Q, R ed S sono i lati di un quadrilatero che ha quattro angoli uguali, dato che sono paralleli ai lati perpendicolari del quadrato ABCD, quindi PQRS è un rettangolo.

Mi concentro quindi sul rettangolo PQRS;
Mostreremo che si tratta di un quadrato e, in particolare vedremo che i triangoli HSG, GRF, FQE ed EPH sono tutti congruenti.
Osserviamo subito che i triangoli sono tutti retti in S, R, Q e P rispettivamente perché PQRS è un rettangolo (considerazione precedente). Inoltre le rispettive ipotenuse sono tutte congruenti perché EFGH è un quadrato.



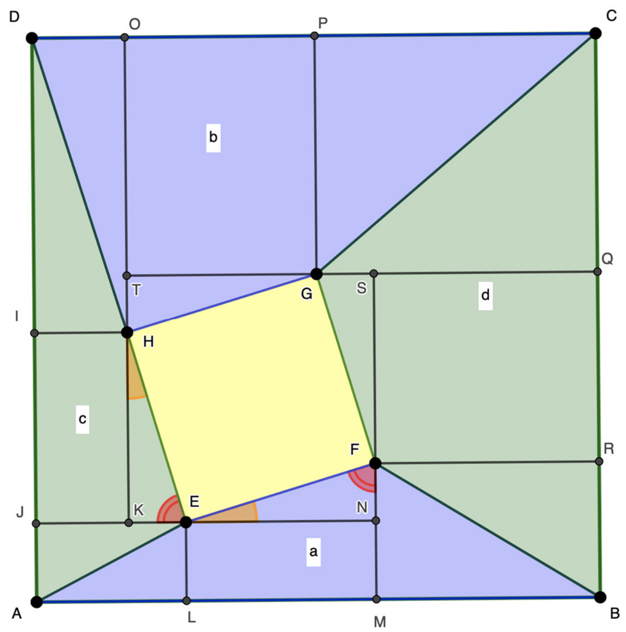
Gli angoli QÊF, RF^G, SĜH e PĤE sono tutti fra loro congruenti.
Infatti:
QÊF è complementare di PÊH,
perché QÊF + FÊH +PÊH □ angolo piatto, e FÊH è retto;
PĤE è complementare di PÊH,
perché sono angoli acuti di un triangolo rettangolo;
quindi QÊF □ PĤE perché complementari dello stesso angolo.
Allo stesso modo si dimostra che PĤE □ RF^G □ SĜH.
Pertanto abbiamo le seguenti congruenze di triangoli
HGS □ FEQ □ PEH □ FGR perché sono triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa e un angolo acuto congruenti;
Ne consegue che:
PE □ FQ per lati corrispondenti in triangoli congruenti;
EQ □ FR per lati corrispondenti in triangoli congruenti , [quindi PQ=QR perché somme di segmenti congruenti].
PQRS quadrato, perché rettangolo con due lati consecutivi congruenti.

Il lato BC del quadrato ABCD è uguale alla somma delle altezze h1 e h2 più la misura del lato del quadrato PQRS (per costruzione), allo stesso modo anche il lato AB del quadrato ABCD è uguale alla somma delle altezze h3 e h4 più la misura del lato del quadrato PQRS (per costruzione).
Poiché PQ □ RS (perché quadrato) allora h1 + h2 = h3 + h4 per differenza di segmenti congruenti;
Posso concludere che Area(ABE) + Area(CDG) = Area(AHD) + Area(BCF).



Posso utilizzare lo stesso principio anche per i triangoli EBF, FCG, GDH e HAE. Essi hanno tutti la base congruente, che equivale al lato del quadrato EFGH. Costruisco le rette parallele ai lati di EFGH e passanti per i vertici del quadrato ABCD. I punti di intersezione delle rette sono i vertici I, J, K, L di un quadrilatero, il quale, per lo stesso motivo della dimostrazione precedente, è un quadrato (ABI □ CDK □ DAL □ BCJ per triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa e un angolo acuto congruenti, quindi IJKL quadrato per somme di lati corrispondenti in triangoli congruenti). Il lato JK del quadrato IJKL è congruente alla somma delle altezze di EBF e di DGH relative al vertice non appartenente al quadrato EFGH, più la misura del lato del quadrato EFGH (per costruzione).
Allo stesso modo, il lato IJ del quadrato IJKL è congruente alla somma delle altezze di AEH e di CGF relative al vertice non appartenente al quadrato EFGH, più la misura del lato del quadrato EFGH (per costruzione).
Pertanto, dato che IJ □ JK (perché IJKL quadrato per dimostrazione precedente), la somma delle altezze dei triangoli EBF e DGH e la somma delle altezze di AEH e CGF sono congruenti per differenza di segmenti congruenti.
Poiché le basi sono congruenti posso concludere che Area(EBF) + Area(DGH) = Area(AEH) + Area(CGF).
Quindi:
Area(ABE) + Area(EBF) + Area(CDG) + Area(DGH) = Area(AHD) + Area(AEH) + Area(BCF) + Area(CGF);
Dunque a + b = c + d.

3) Soluzione inviata da Simone Marinolli e Dino Marinelli, Classe 2^C, Liceo "Russell", Cles (TN)



Hp:
ABCD è un quadrato
EFGH è un quadrato

Th:
a+b □ c+d
a è l'area del poligono ABFE, b area di CDHG, c area di ADHE e d area di BCGF

Dimostrazione:

- AB□BC□CD□AD per Hp;

- Tracciamo LE, MS, RF, QT, PG, OK, IH e JN → perpendicolari ai lati del quadrato ABCD;

- Gli angoli JEL □ RFM □ QGP □ OHI □ LEN □ MNE □ RFS □ QSF □ PGT □ OTG □ JKH □ IHK □ 90° per costruzione;

- I quadrilateri ALEJ, LMNE, MBRF, RFSQ, QCPG, PGTO, OHID, IHKJ sono rettangoli poiché sono parallelogrammi (lati opposti paralleli) con 4 angoli retti;

- AL □ JE, AJ □ EL, MB □ FR, FM □ RB, QG □ CP, QC □ PG, OH □ DI, IH □ DO per proprietà dei rettangoli;

- I triangoli ALE □ AJE, BMF □ BRF, GQC □ GPC, HOD □ HID per primo criterio di congruenza (LAL) e quindi sono anche equivalenti;

- Gli angoli HEF □EFG □ FGH □ GHE □ 90° per Hp;

- Gli angoli HEK + FEN □ 90° [[perché complementari]] [perché HEF è retto];
- Gli angoli HEK + EHK □ 90° perchè la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e l'angolo HKE è retto;
- Gli angoli EFN + FEN □ 90° perchè la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e l'angolo ENF è retto;

- Quindi gli angoli FEN □ EHK e HEK □ EFN per sottrazione di angoli congruenti;;

- Eseguo questo ragionamento per gli altri triangoli;

- EF □ FG □ GH □ HE per Hp;

- Quindi i triangoli EFN □ FGS □ GHT □ HKE per secondo principio di congruenza e in particolare EN □ FS □ GT □ HK perchè cateti corrispondenti di triangoli congruenti. I triangoli sono anche equivalenti essendo congruenti.

- Quindi LM □ RQ □ PO □ IJ perché [[distanze di rette parallele (sono equidistanti)]] [rispettivamente congruenti a segmenti congruenti in quanto lati opposti di rettangoli];

- TK □ KN □ NS □ST per somma di segmenti congruenti;

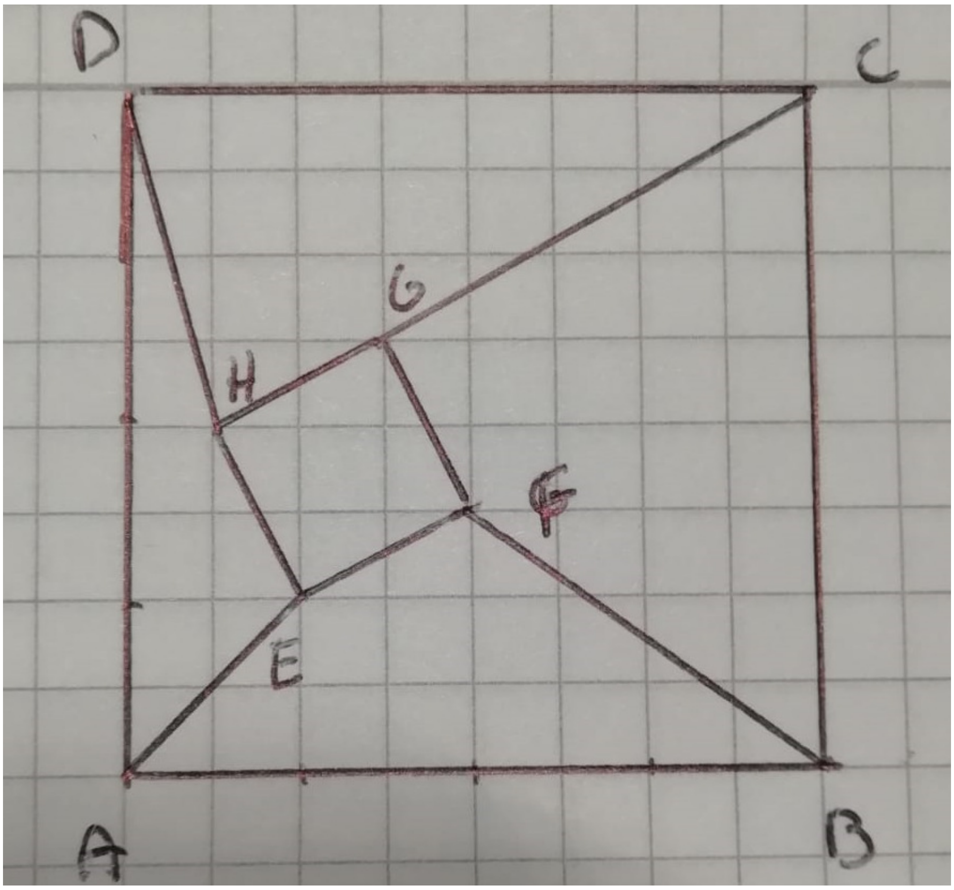
- Quindi OT + EL □ BC - TK e QS + HI □ AB - KN;

- OT + EL □ QS + HI poiché BC □ AB per hp e TK □ KN per dimostrazione precedente;

- Quindi LMNE + OTGP □ RFSQ + JKHI [[per teorema corollario rettangolo rettangolo]] [si doveva spiegare un po’ meglio] (rettangoli con basi e altezze congruenti);

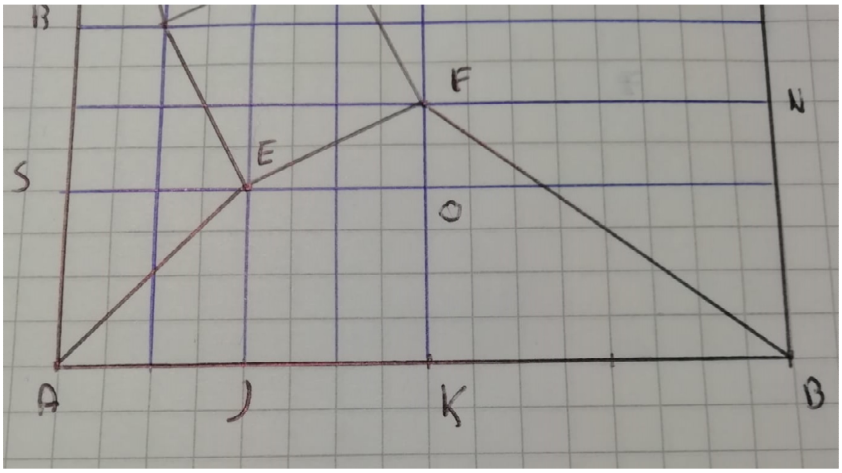
- Di conseguenza **a** + **b** □ **c** + **d** per somma di poligoni equivalenti;

4) Soluzione inviata da Marco-Putetto, Classe 3^A, Liceo Scientifico, Istituto Internazionale Agnelli-Torino



Hip: EFGH è un quadrato qualsiasi ABCD è un altro quadrato generico più grande

Tesi: a+b=c+d

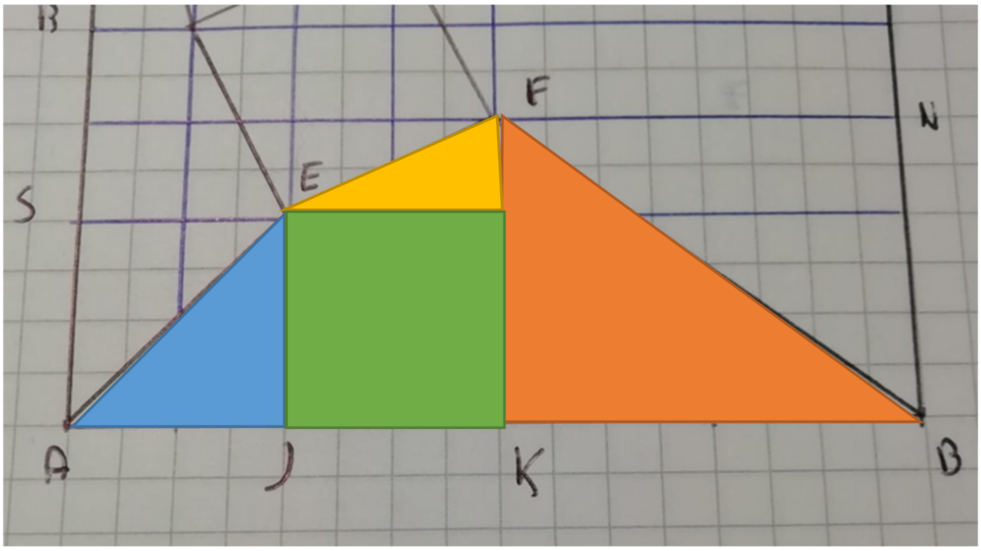


Dimostrazione

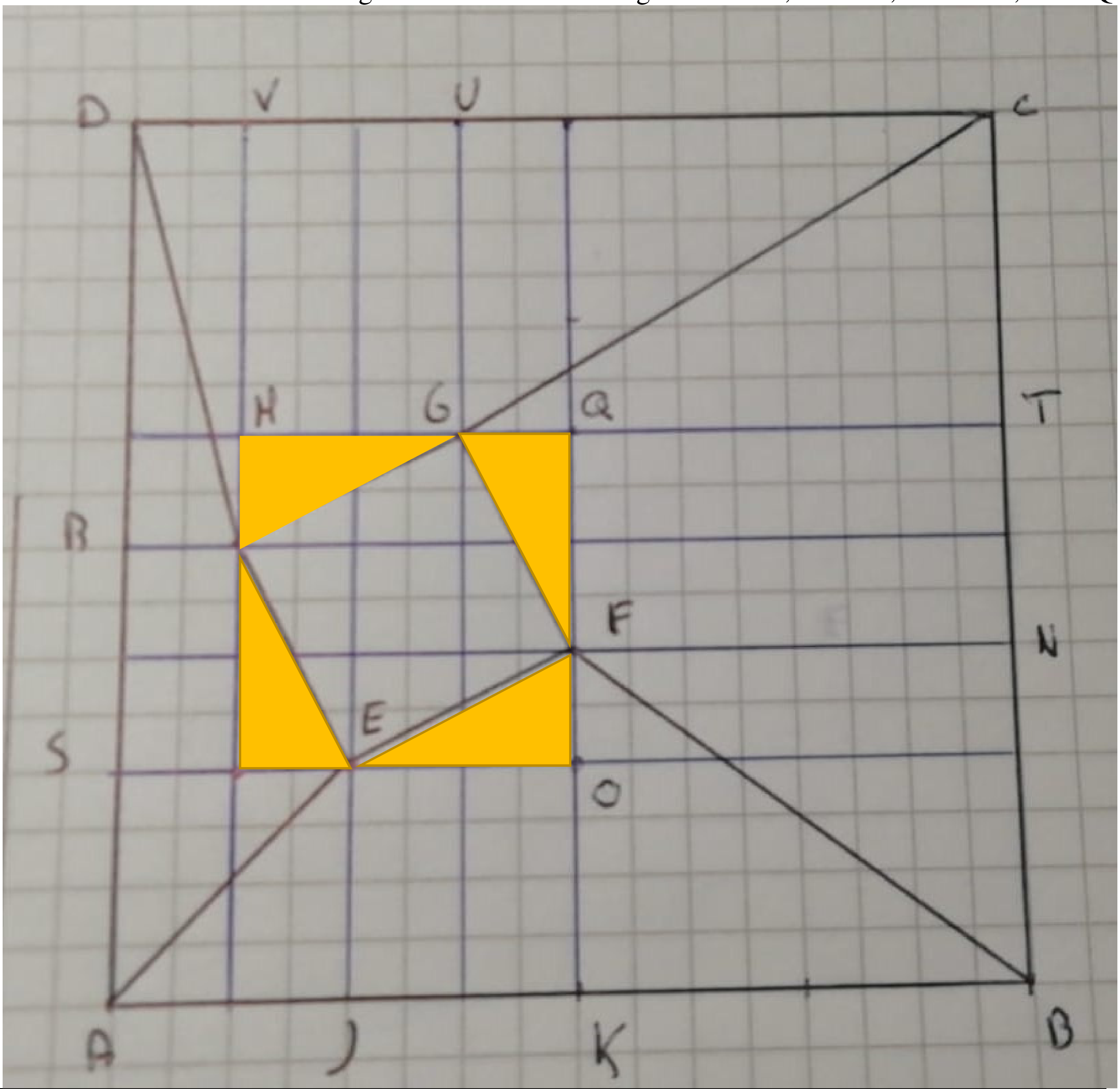
ABFE, CDHG, ADHE, BCGF hanno un lato uguale tra loro, in quanto una delle loro
due basi coincide con un lato

del quadrato.
Per calcolare l'area dei singoli quadrilateri possiamo suddividere ciascun quadrilatero in porzioni diverse. Per comodità [[effettuiamo]] [mandiamo] le linee che suddividono i quadrilateri [e sono] parallele e perpendicolari [[alle basi]] [ai lati] del quadrato più grande.

In tutti e 4 i quadrilateri si creano così 3 triangoli e un rettangolo.
Possiamo così andare a dimostrare prima la congruenza di alcuni di questi
triangoli e rettangoli per poi dimostrare di conseguenza la tesi finale



Iniziamo con la congruenza dei triangoli FOE, EIH, HMG, GQF



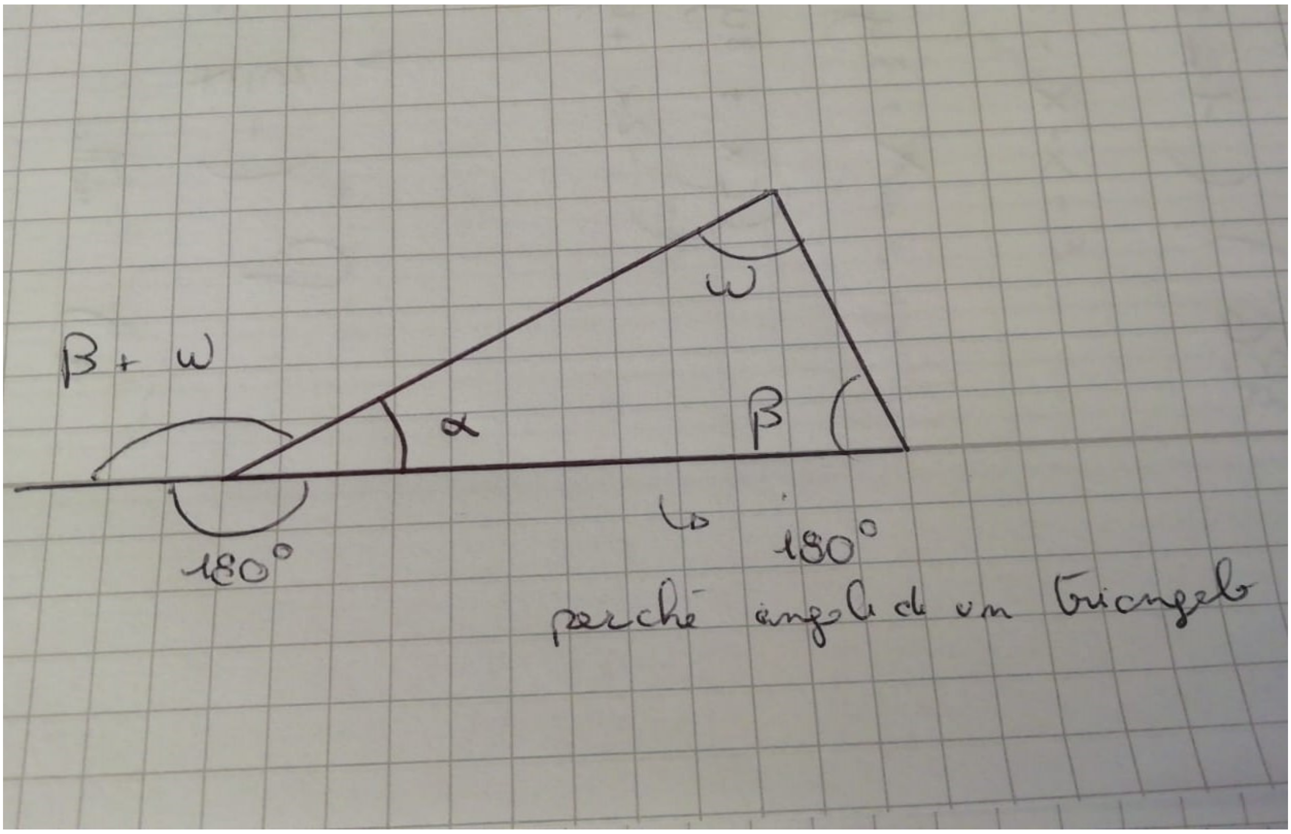
	FOE	EIH	HMG	GQF
1	FE	EH	HG	GF
2	O^	I^	M^	Q^
3	FE^O	EH^I	HG^M	GF^Q
4	EF^O	HE^I	GH^M	FG^Q

1) Perché lati del quadrato piccolo (per hip)
2) Perché angoli creati dall'intersezione di parallele e perpendicolari, quindi tutti angoli di 90°

3/4 Perché essendo EFGH consideriamo il teorema dell'angolo opposto

Secondo teorema dell'angolo esterno: ciascun angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni che non gli sono adiacenti
Quindi, considerando ad esempio il triangolo HIE, l'angolo esterno a HEI [HEO=HEF+FEO] è congruente alla somma dell'angolo EHI e dell'angolo retto HIE.
L'angolo HEF è però anch'esso retto ed è quindi congruente all'angolo HIE.
Di conseguenza, l'angolo IHE deve essere per forza congruente all'angolo FEO.

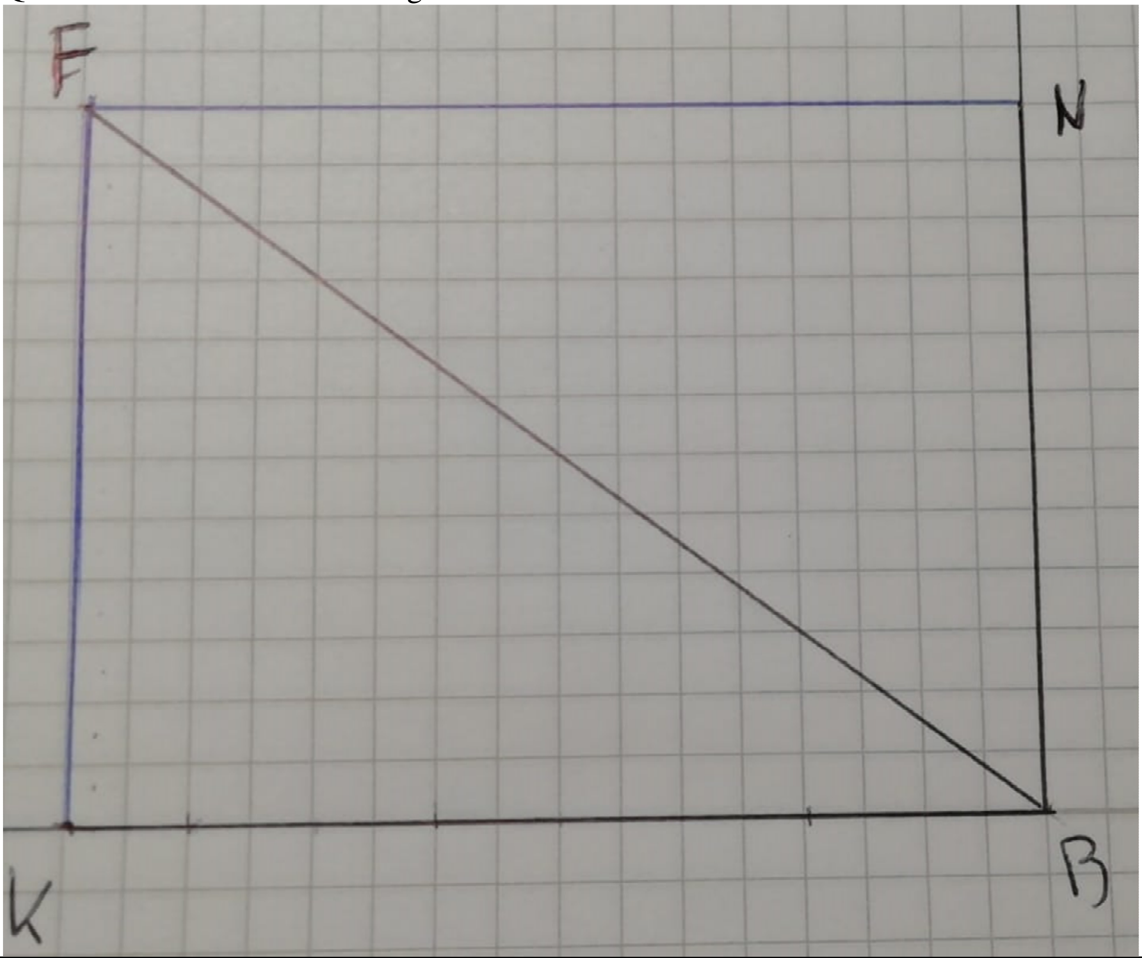
Similmente per tutti gli altri angoli acuti dei triangoli rettangoli.
Sappiamo così che i triangoli hanno tutti gli angoli e l'ipotenusa congruenti e quindi sono tra loro congruenti.



Quindi abbiamo dimostrato la congruenza dei triangoli FOE, EIH, HMG, GQF [e quindi anche la loro equivalenza].

Il secondo passaggio consiste nel dimostrare la congruenza tra loro dei triangoli EJA = ESA, FKB = FNB, GTC = GUC e HRD = HVD
Ne analizziamo uno, infatti tutti questi triangoli hanno misure diverse ma hanno le stesse caratteristiche.
Possiamo ricondurre tutti i casi a quest'unico analizzato.

Quindi dimostriamo FKB è congruente a FNB

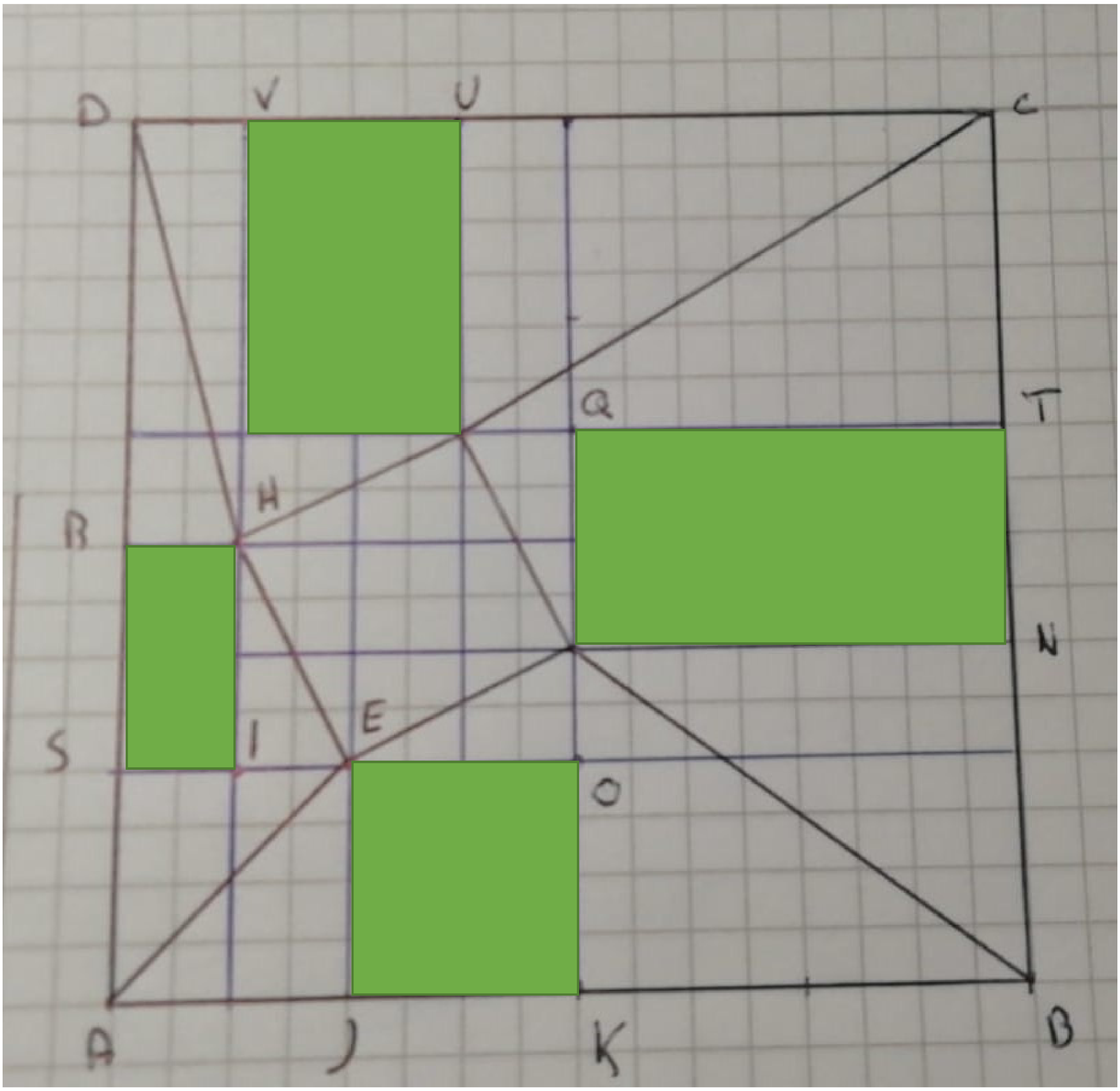


[redacted]	FKB	FNB
[redacted]		
1	FB	FB
2	BF^K	FB^N
3	FB^K	BF^N
4	K^	N^

1) Perché sono lo stesso lato
2) Perché sono angoli alterni interni visto che [[FN è parallela KB]] [FK è parallela a BN]
3) Perché sono angoli alterni interni visto che FN è parallela KB
4) Perché angoli creati dall'intersezione di parallele e perpendicolari, quindi tutti angoli di 90°

Quindi il triangolo FKB è congruente a FNB per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.
Per lo stesso motivo il triangolo EJA è congruente a ESA, il triangolo GTC è congruente a GUC e il triangolo HRD è congruente a HVD. [E di nuovo sono anche tutti equivalenti].

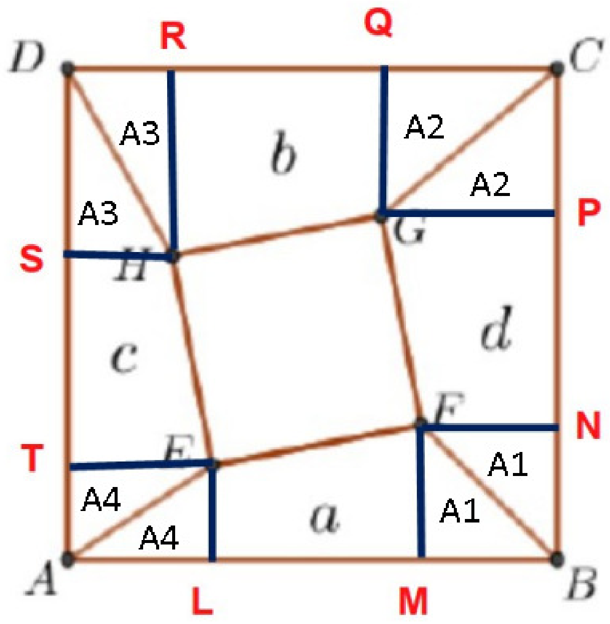
Il terzo passaggio è infine dimostrare che l'area data dalla somma delle aree dei rettangoli MGUV e JKOE sia uguale alla somma delle aree di RHIS e QFNT.
Quindi che MGUV + JKOE = RHIS + QFNT.



Possiamo però notare come tutti questi rettangoli abbiano alcune caratteristiche comuni.
I lati MG, QF, EO, HI sono tutti congruenti in quanto cateti corrispondenti di triangoli rettangoli congruenti (come dimostrato precedentemente). Di conseguenza possiamo affermare che tutti i rettangoli possiedono la stessa base.
Per quanto riguarda l'altezza, invece, possiamo notare come la somma delle altezze dei rettangoli MGUV e JKOE sia uguale alla somma delle altezze dei rettangoli RHIS e QFNT. Questo perché questa somma è in entrambi i casi pari al lato del quadrato grande iniziale meno i due cateti dei triangoli rettangoli dimostrati precedentemente come congruenti tra loro.
Perciò anche la somma delle aree di MGUV e JKOE è uguale alla somma delle aree di RHIS e QFNI perché questi ultimi hanno la stessa base e uguale somma delle altezze.

Avendo perciò dimostrato l’equivalenza di tutte le parti che compongono i quadrilateri possiamo affermare che:
a+b= c+d.
c.v.d

5) Soluzione inviata da Giulio Franzoni, classe I R, Liceo Scientifico A. Roiti -indirizzo scienze applicate – Ferrara



[Spiegare come sono stati ottenuti i punti L,M,N,P,Q,R,S,T]

Per costruzione i triangoli FBM FBN; GCP GCQ; HDR HDS; EAT EAL sono congruenti, ovvero

FBM = FBN
GCP = GCQ
HDR = HDS
EAT = EAL [in un rettangolo una diagonale lo divide in due triangoli congruenti]

quidi la somma delle aree

1.
A1+A4+A2+A3 = A1+A2+A3+A4

è la stessa nei quadrilateri di area ***a*** e ***b*** e nei quadrilateri di area ***c*** e ***d.***

Le aree rimanenti si possono calcolare pensando di avvicinare i trapezi EFML e GHRQ ottenendo un rettangolo ***r***1 di base LM e altezza BC-PN.

Noto che LM è uguale a PN [[in quanto proiezioni del lato del quadrato EFGH]] [non è cosi' semplice].

Quindi, detto ***m*** la proiezione dei lati del quadrato EFGH ed ***l*** il lato del quadrato ABCD ottengo che l'area del rettangolo ***r***1 vale
A***r***1 = ***m****(***l***-***m***)

Allo stesso modo si trova l'area del rettangolo ***r***2 ottenuto avvicinando i trapezi FGPN e HETS è
A***r***2 = ***m****(***l***-***m***)
quindi

2.
A***r***1 = A***r***2

Quindi dai punti **1.** e **2.** si ricava che ***a*+*b*=*c*+*d* .**