FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema – 1 - 22 dicembre 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

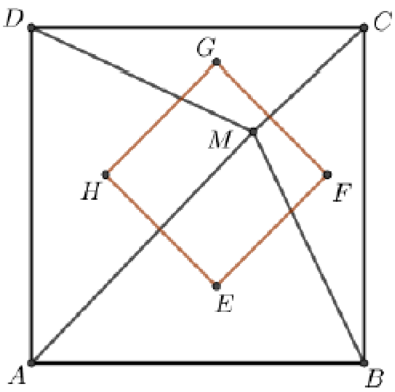
Il testo del problema

$ABCD$ è un quadrato di lato unitario ed M un qualsiasi suo punto interno.

a) Provare che i baricentri dei triangoli ABM, BCM, CDM e ADM sono i vertici di un quadrato.

b) Determinare la misura del lato di tale quadrato..

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto 7 risposte, prevalentemente da classi seconde e terze di Licei Scientifici.

Il problema poneva un quesito relativo a un quadrato, scomposto in quattro triangoli. Occorreva dimostrare che i baricentri di questi triangoli sono a loro volta i vertici di un quadrato e trovare la misura del lato di questo quadrato.

Le risposte giunte sono sostanzialmente corrette, anche se in una delle soluzioni inviate compare un errore, peraltro abbastanza frequente, laddove si afferma che un quadrilatero con le diagonali congruenti e perpendicolari è un quadrato.

Il problema si prestava anche a una dimostrazione per via analitica, come in effetti alcuni studenti hanno proposto. L'utilizzo della geometria analitica ha spesso il vantaggio di trasformare le dimostrazioni in "semplici" calcoli, facendo però talvolta perdere il piacere della risoluzione geometrica.

Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:

-Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento, 2 soluzioni

-Liceo "B. Russell", Cles (TN), 2 soluzioni

-I.I.S.-LSA "A. Badoni", Lecco

-Liceo "Tito Lucrezio Caro", Cittadella (PD)

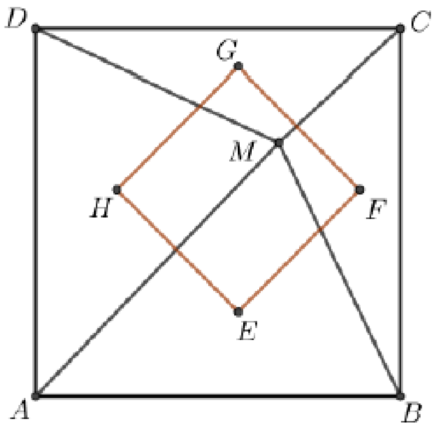
-Liceo Scientifico "A. Roiti", Ferrara

Le riportiamo qui di seguito in ordine di arrivo.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Aldo Coletta, classe 3^C, Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento



Ipotesi:

- ABCD è un quadrato
- $\overline{AB} = 1$
- M è un punto interno ad ABCD
- E è il baricentro del triangolo ABM
- F è il baricentro del triangolo BCM
- G è il baricentro del triangolo CDM
- H è il baricentro del triangolo ADM

Tesi: HEFG è un quadrato
(E' necessario anche calcolarne il lato)

Dimostrazione:
Rappresentiamo la situazione in un piano cartesiano. Definiamo allora:

- A = (0 ; 0)
- B = (1 ; 0)
- C = (1 ; 1)
- D = (0 ; 1)
- M = (Mx ; My)

A questo punto, sfruttando la formula per il calcolo delle coordinate del baricentro di un triangolo qualsiasi, definiamo anche:

- E = $\left(\frac{1+Mx}{3} ; \frac{My}{3} \right)$
- F = $\left(\frac{2+Mx}{3} ; \frac{1+My}{3} \right)$
- G = $\left(\frac{1+Mx}{3} ; \frac{2+My}{3} \right)$
- H = $\left(\frac{Mx}{3} ; \frac{1+My}{3} \right)$

Calcoliamo quindi la lunghezza di $\overline{HE},\ \overline{EF},\ \overline{FG}, \overline{GH}$

$\overline{HE} = \sqrt{(Hx - Ex)^2 + (Hy - Ey)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mx}{3} - \frac{1+Mx}{3}\right)^2 + \left(\frac{1+My}{3} - \frac{My}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\overline{EF} = \sqrt{(Ex - Fx)^2 + (Ey - Fy)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+Mx}{3} - \frac{2+Mx}{3}\right)^2 + \left(\frac{My}{3} - \frac{1+My}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}}$
$= \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\overline{FG} = \sqrt{(Gx - Fx)^2 + (Gy - Fy)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+Mx}{3} - \frac{2+Mx}{3}\right)^2 + \left(\frac{2+My}{3} - \frac{1+My}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}}$
$= \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\overline{GH} = \sqrt{(Gx - Hx)^2 + (Gy - Hy)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+Mx}{3} - \frac{Mx}{3}\right)^2 + \left(\frac{2+My}{3} - \frac{1+My}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Si nota dunque che i lati del poligono HEFG sono congruenti. HEFG è dunque un parallelogramma e in particolare, un rombo.
Perché questo sia un quadrato, deve essere anche un rettangolo. Condizione sufficiente è che le diagonali siano congruenti, cioè: $\overline{HF}=\overline{GE}$

$\overline{HF} = \sqrt{(Hx - Fx)^2 + (Hy - Fy)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mx}{3} - \frac{2+Mx}{3}\right)^2 + \left(\frac{1+My}{3} - \frac{1+My}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

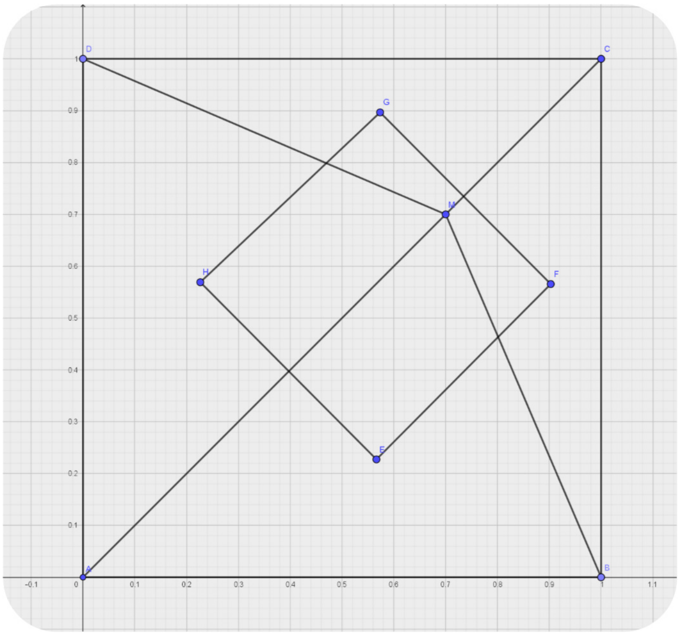
$\overline{GE} = \sqrt{(Gx - Ex)^2 + (Gy - Ey)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+Mx}{3} - \frac{1+Mx}{3}\right)^2 + \left(\frac{2+My}{3} - \frac{My}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

Quindi HEFG è un quadrato.

Il lato di questo quadrato è stato calcolato in precedenza, ed equivale a $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C.V.D.

2) Soluzione inviata da Gabriele Iannelli, 3^B, Liceo Scientifico G. Rummo, Benevento



Dati:

$A(0;\ 0)$
$B(1;\ 0)$
$C(1;\ 1)$
$D(0;\ 1)$
$M(x_M;\ y_M)$
$E(x_E;\ y_E)$
$F(x_F;\ y_F)$
$G(x_G;\ y_G)$
$H(x_H;\ y_H)$

Dimostra che EFGH è $un\ quadrato$;
$\mathrm{EF} = \mathrm{FG} = \mathrm{GH} = \mathrm{HE} = ?$

(Procedimento: Per dimostrare che EFGH è un quadrato, bisogna dimostrare che esso è un parallelogramma, poi che è un rettangolo e un rombo contemporaneamente).

$$E \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A + x_B + x_M}{3} = \dfrac{0 + 1 + x_M}{3} = \dfrac{x_M + 1}{3} \\ \dfrac{y_A + y_B + y_M}{3} = \dfrac{0 + 0 + y_M}{3} = \dfrac{y_M}{3} \end{cases} \Longrightarrow E\left(\frac{x_M + 1}{3}; \frac{y_M}{3}\right)$$

$$F \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_B + x_C + x_M}{3} = \dfrac{1 + 1 + x_M}{3} = \dfrac{x_M + 2}{3} \\ \dfrac{y_B + y_C + y_M}{3} = \dfrac{0 + 1 + y_M}{3} = \dfrac{y_M + 1}{3} \end{cases} \Longrightarrow F\left(\frac{x_M + 2}{3}; \frac{y_M + 1}{3}\right)$$

$$G \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_C + x_D + x_M}{3} = \dfrac{1 + 0 + x_M}{3} = \dfrac{x_M + 1}{3} \\ \dfrac{y_C + y_D + y_M}{3} = \dfrac{1 + 1 + y_M}{3} = \dfrac{y_M + 2}{3} \end{cases} \Longrightarrow G\left(\frac{x_M + 1}{3}; \frac{y_M + 2}{3}\right)$$

$$H \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A + x_D + x_M}{3} = \dfrac{0 + 0 + x_M}{3} = \dfrac{x_M}{3} \\ \dfrac{y_A + y_D + y_M}{3} = \dfrac{0 + 1 + y_M}{3} = \dfrac{y_M + 1}{3} \end{cases} \Longrightarrow H\left(\frac{x_M}{3}; \frac{y_M + 1}{3}\right)$$

$$EF = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_M + 1}{3} - \frac{x_M + 2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{3} - \frac{y_M + 1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cancel{x_M} + 1 \cancel{- x_M} - 2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{y_M} \cancel{- y_M} - 1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$GH = \sqrt{(x_G - x_H)^2 + (y_G - y_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_M + 1}{3} - \frac{x_M}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_M + 2}{3} - \frac{y_M + 1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cancel{x_M} + 1 \cancel{- x_M}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{y_M} + 2 \cancel{- y_M} - 1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$m_{EF} = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{\frac{y_M}{3} - \frac{y_M + 1}{3}}{\frac{x_M + 1}{3} - \frac{x_M + 2}{3}} = \frac{\frac{\cancel{y_M - y_M} - 1}{3}}{\frac{\cancel{x_M} + 1 \cancel{- x_M} - 2}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$m_{GH} = \frac{y_G - y_H}{x_G - x_H} = \frac{\frac{y_M + 2}{3} - \frac{y_M + 1}{3}}{\frac{x_M + 1}{3} - \frac{x_M}{3}} = \frac{\frac{\cancel{y_M} + 2 \cancel{- y_M} - 1}{3}}{\frac{\cancel{x_M} + 1 \cancel{- x_M}}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

Dal momento che EF e GH sono sia congruenti sia paralleli tra loro (coefficienti angolari uguali), EFGH è un parallelogramma.

$$EG = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} = \sqrt{\left(\cancel{\frac{x_M + 1}{3}} - \cancel{\frac{x_M + 1}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{3} - \frac{y_M + 2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\cancel{y_M - y_M} - 2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$FH = \sqrt{(x_F - x_H)^2 + (y_F - y_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_M + 2}{3} - \frac{x_M}{3}\right)^2 + \left(\cancel{\frac{y_M + 1}{3}} - \cancel{\frac{y_M + 1}{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\cancel{x_M} + 2 \cancel{- x_M}}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$m_{EG} = \frac{y_E - y_G}{x_E - x_G} = \frac{\frac{y_M}{3} - \frac{y_M + 2}{3}}{\cancel{\frac{x_M + 1}{3}} - \cancel{\frac{x_M + 1}{3}}} = \frac{\frac{\cancel{y_M - y_M} - 2}{3}}{0} = \frac{-\frac{2}{3}}{0} = \nexists \ (Del\ tipo\ x = n)$ [quindi EG è una retta parallela all'asse y]

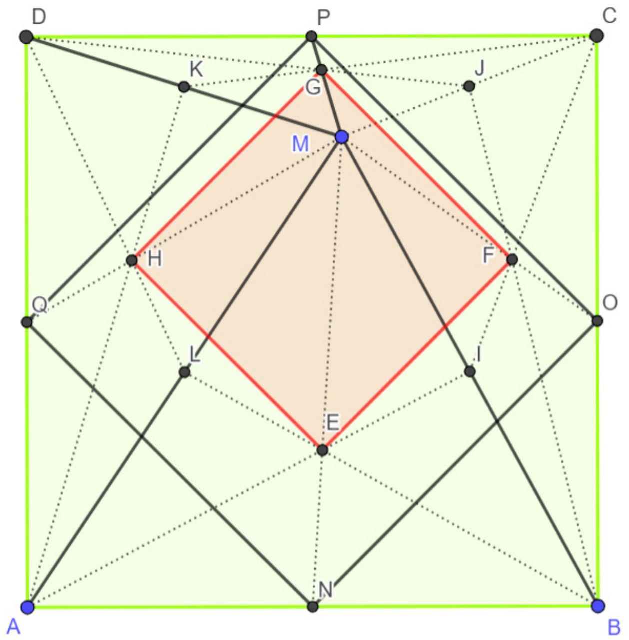
$m_{FH} = \frac{y_F - y_H}{x_F - x_H} = \frac{\cancel{\frac{y_M + 1}{3}} - \cancel{\frac{y_M + 1}{3}}}{\frac{x_M + 2}{3} - \frac{x_M}{3}} = \frac{0}{\frac{\cancel{x_M} + 2 \cancel{- x_M}}{3}} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0 \ (Del\ tipo\ y = n)$ [quindi FH è una retta parallela all'asse x]

Dal momento che EG e FH sono sia congruenti sia perpendicolari tra loro, EFGH è un quadrato.

Conclusione

Il quadrilatero EFGH è un quadrato ed ha i lati pari a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3) Soluzione inviata dalla Classe 2^C, Liceo “Russell”, Cles (TN)



Hp:

- ABCD quadrato
- M ∈ ABCD
- E, F, G, H baricentri dei triangoli ABM, BCM, CDM, ADM

Th:
EFGH quadrato

Dimostrazione:

Per dimostrare che il quadrilatero EFGH è un quadrato, dimostriamo che ha tutti gli angoli retti e tutti i lati congruenti.

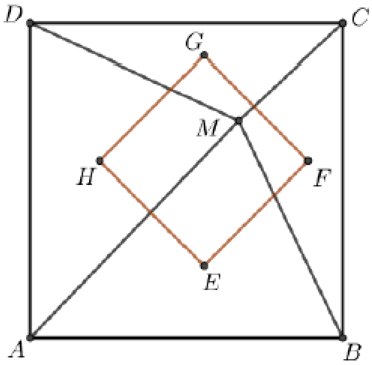
Tracciamo i segmenti NO, OP, PQ e QN [chi sono i punti N,O,P,Q ? Bisognava dirlo e non basta la figura]. Essi sono congruenti essendo i triangoli BNO, OCP, PDQ e ANQ congruenti per il primo criterio di congruenza infatti $N\hat{B}O \cong O\hat{C}P \cong P\hat{D}Q \cong Q\hat{A}N$ perché retti per hp, $NB \cong BO \cong OC \cong CP \cong PD \cong DQ \cong QA \cong AN$ perché N, O, P, Q punti medi di lati congruenti per hp. Applicando il teorema di Pitagora, si ha che $NO = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si ha, inoltre, che $A\hat{N}Q \cong A\hat{Q}N \cong D\hat{Q}P \cong D\hat{P}Q \cong C\hat{P}O \cong C\hat{O}P \cong B\hat{O}N \cong B\hat{N}O \cong 45°$ poiché i triangoli BNO, OCP, PDQ e ANQ sono isosceli (angoli alla base congruenti) e presentano un angolo di 90°. Si ha quindi che $N\hat{O}P \cong O\hat{P}Q \cong P\hat{Q}N \cong Q\hat{N}O \cong 90°$ perché supplementari di somma di angoli congruenti [che danno per somma 90°]. [Quindi NOPQ è un quadrato].

Consideriamo il triangolo NOM. I punti E e F sono due baricentri per hp quindi dividono le mediane MN e MO in due parti, di cui quella che contiene il vertice M doppia rispetto all’altra ovvero $ME \cong 2EN$ e $MF \cong 2FO$. Essendo i segmenti determinati sui lati in proporzione $\frac{ME}{EN} = \frac{MF}{FO}$ allora EF e NO sono paralleli (conseguenza teorema di Talete). Lo stesso ragionamento può essere applicato ai triangoli QNM, QMP e PMO. Si ha pertanto che $FG||OP, PQ||GH, QN||HE$ e per la proprietà transitiva $EF||GH$, $EH||GF$ ed essendo NO perpendicolare a NQ, il quadrilatero EFGH ha quattro angoli retti.

Consideriamo i triangoli MNO e MEF, sono simili poiché hanno 2 lati in proporzione e l'angolo compreso congruente [(in comune)] [[(coincidente)]]. Quindi $\frac{EF}{NO} = \frac{ME}{MN}$ da cui $EF = \frac{2}{3}NO = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Lo stesso ragionamento può essere applicato ai triangoli QNM, QMP e PMO. Quindi il quadrilatero EFGH ha anche quattro lati congruenti ed è quindi un quadrato.

4) Soluzione inviata da Classe 3^A Liceo Scientifico IIS "A. Badoni", Lecco



"ABCD è un quadrato di lato unitario ed M un qualsiasi suo punto interno.
a) Provare che i baricentri dei triangoli ABM, BCM, CDM e ADM sono i vertici di un quadrato.
b) Determinare la misura del lato di tale quadrato."

Poniamo il quadrato in un sistema di assi cartesiani con origine degli assi in A. In questo modo, i punti A, B, C, D hanno le seguenti coordinate:

$$A\ (0;0)$$
$$B\ (1;0)$$
$$C\ (1;1)$$
$$D(0;1)$$

Il punto arbitrario M ha invece coordinate:

$$M(x_M;y_M), 0 \leq x_M \leq 1\ \wedge\ 0 \leq y_M \leq 1$$

I quattro baricentri dei triangoli hanno coordinate:

$$E(\frac{1+x_M}{3};\frac{y_M}{3})$$

$$F(\frac{2+x_M}{3};\frac{1+y_M}{3})$$

$$G(\frac{1+x_M}{3};\frac{2+y_M}{3})$$

$$H(\frac{x_M}{3};\frac{1+y_M}{3})$$

Dimostriamo la tesi a: una condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un quadrato è che le sue diagonali siano congruenti (1) e perpendicolari (2). [Questo non è affatto vero, ad esempio un deltoide potrebbe avere queste caratteristiche, ma non necessariamente è un quadrato]. Il quadrilatero $EFGH$ rispetta questa condizione, infatti:

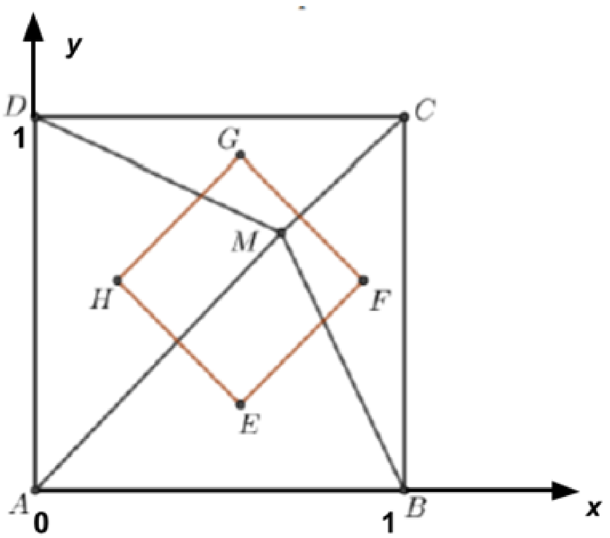
1) $\overline{EG} \cong \overline{HF} \cong \frac{2}{3}$ [mancano i calcoli !]

2) $\overline{EG}$ parallelo ad asse delle ordinate in quanto il punto E e il punto G hanno la stessa ascissa.
$\overline{HF}$ parallelo ad asse delle ascisse in quanto il punto H e il punto F hanno la stessa ordinata.
Si ha quindi che $\overline{EG} \perp \overline{HF}$.

La lunghezza del lato del quadrato $EFGH$, sapendo la misura della diagonale $\overline{EG}$, è pari a:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{EG}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

5) Soluzione inviata da Massimiliano Beraldo-3B SA, Liceo Tito Lucrezio Caro-Cittadella (PD)



Per dimostrare che la figura EFGH è un quadrato bisogna fare due cose:
-trovare le distanze tra i baricentri dei 4 triangoli contenuti nel quadrato ABCD e verificare che siano uguali.
-controllare che tra due lati [consecutivi] di EFGH ci sia un angolo di 90 gradi.

Per fare questa dimostrazione bisogna mettere il quadrato ABCD in un piano cartesiano così da poter assegnare dei valori ai vari punti.

Io ho messo il punto A nell'origine degli assi del piano cartesiano e ho dato il valore di 1 ai quattro lati, facendo cosi ho ottenuto le coordinate dei quattro vertici del quadrato ABCD: **A (0,0), B (1,0), C (1,1), D (0,1)**. Il punto M ha come coordinate x e y perché non conosciamo ancora i valori dell'ascissa e della coordinata di M, quindi **M (x,y)**.

Sappiamo che E, F, G e H sono i rispettivi baricentri dei triangoli AMB, BMC, CMD e DMA. Le coordinate del baricentro di un triangolo si trovano attraverso la seguente formula: $(\frac{xa+xb+xc}{3}, \frac{ya+yb+yc}{3})$, cioè sommando [[le coordinate delle]] [le] ascisse dei 3 vertici del triangolo e dividendole per 3 (per trovare la coordinata x del baricentro) e sommando [[le coordinate delle]] [le] ordinate dei 3 vertici del triangolo e dividendole per 3 (per trovare la coordinata y del baricentro).

E $(\frac{0+1+x}{3}, \frac{0+0+y}{3})$

F $(\frac{1+1+x}{3}, \frac{0+1+y}{3})$

G $(\frac{0+1+x}{3}, \frac{1+1+y}{3})$

H $(\frac{0+0+x}{3}, \frac{1+0+y}{3})$

Punto b) dell'esercizio

Ora che conosco le coordinate dei baricentri dei triangoli posso calcolare la distanza tra i baricentri attraverso la formula della lunghezza di un segmento nel piano cartesiano: $AB = \sqrt{(xB - xA)^2 + (yB - yA)^2}$

$$EF = \sqrt{(\frac{1+1+x}{3} - \frac{0+1+x}{3})^2 + (\frac{0+1+y}{3} - \frac{0+0+y}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$FG = \sqrt{(\frac{0+1+x}{3} - \frac{1+1+x}{3})^2 + (\frac{1+1+y}{3} - \frac{0+1+y}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$GH = \sqrt{(\frac{0+0+x}{3} - \frac{0+1+x}{3})^2 + (\frac{1+0+y}{3} - \frac{1+1+y}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$HE = \sqrt{(\frac{0+1+x}{3} - \frac{0+0+x}{3})^2 + (\frac{0+0+y}{3} - \frac{1+0+y}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Abbiamo dimostrato che il quadrilatero EFGH ha 4 lati uguali perché la distanza tra i baricentri è la stessa.

Ora per dimostrare che EFGH è un quadrato dobbiamo verificare che tra due lati [consecutivi] ci sia un angolo di 90 gradi, per fare ciò dobbiamo verificare che le rette passanti per due lati [consecutivi] di EFGH siano perpendicolari tra loro. Due rette sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei coefficienti angolari delle due rette risulta -1, cioè se $m \cdot mFG = -1$

(m è il coefficiente angolare della retta che passa per EF)

(mFG è il coefficiente angolare della retta che passa per FG)

Per trovare il coefficiente angolare della retta passante per due punti dobbiamo usare la seguente formula: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cioè dividere la differenza delle coordinate y dei due punti e la differenza delle coordinate x dei due punti.

$$mEF = \frac{\frac{0+0+y}{3} - \frac{0+1+y}{3}}{\frac{0+1+x}{3} - \frac{1+1+x}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$mFG = \frac{\frac{0+1+y}{3} - \frac{1+1+y}{3}}{\frac{1+1+x}{3} - \frac{0+1+x}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{+\frac{1}{3}} = -1$$

$$m \cdot mFG = -1$$

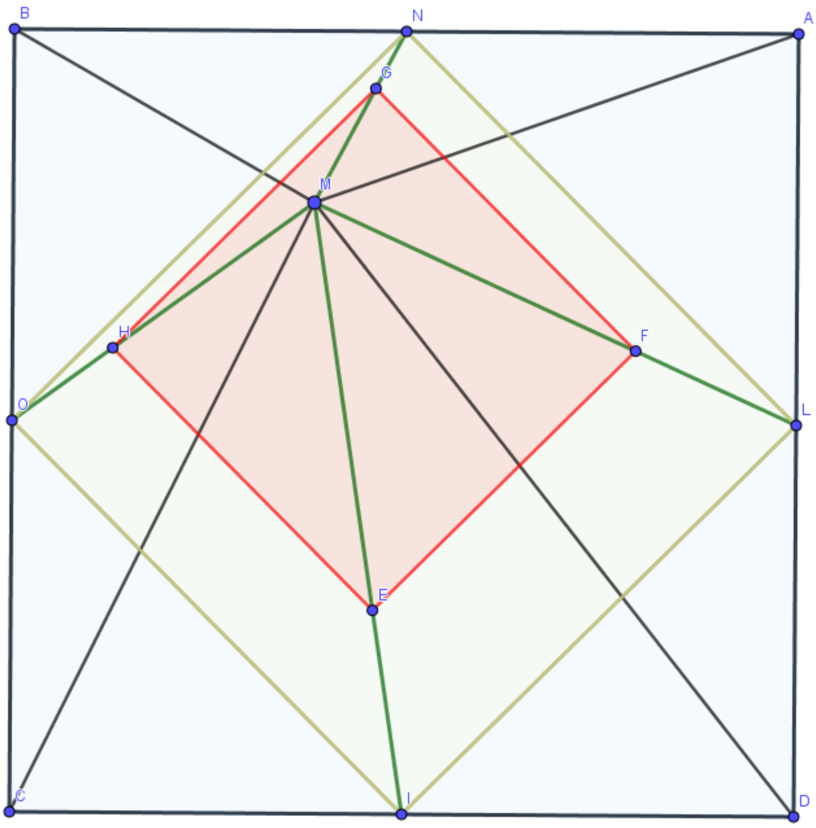
$$1 \cdot (-1) = -1$$

-1 = -1 VERO

Punto a) dell'esercizio

Abbiamo dimostrato che tra due lati [consecutivi] c'è un angolo di 90 gradi e prima abbiamo dimostrato che i lati sono congruenti quindi abbiamo determinato che i baricentri dei triangoli AMB, BMC, CMD e DMA sono i vertici di un quadrato.

6) Soluzione inviata da Lisa Paternoster, classe 2^D liceo scientifico scienze applicate B. Russell, Cles (TN)



Dimostrazione: [chi sono I,L,N,O ?]

a)

Consideriamo BNO e NLA, essi hanno:

- $BO \cong NA \cong BN \cong AL$ per ipotesi [quale ?]
- $O\hat{B}N \cong N\hat{A}L$ per ipotesi [quale ?]

Quindi BNO e NLA sono congruenti e isosceli, inoltre gli angoli $B\hat{O}N, B\hat{N}O, A\hat{N}L\ e\ A\hat{L}N$ sono di conseguenza di 45°, in quanto $(180° - 90°)\backslash 2 = 45°$

consideriamo OCI e IDL, essi hanno:

- $OC \cong CI \cong ID \cong DL$ per ipotesi [quale ?]
- $O\hat{C}I \cong I\hat{D}L$ per ipotesi

Quindi OCI e IDL sono congruenti e isosceli, inoltre gli angoli $C\hat{O}I, O\hat{I}C, I\hat{L}D\ e\ L\hat{I}D$ sono di conseguenza di 45°, in quanto $(180° - 90°)\backslash 2 = 45°$

consideriamo BNO e OCI essi hanno:

- $BO \cong OC \cong BN \cong CI$ per ipotesi [quale ?]
- $O\hat{C}I \cong \left[[I\hat{D}L]\right] [O\hat{B}N]$ per ipotesi

Quindi BNO e [[NLA]] [OCI] sono congruenti e isosceli.

Consideriamo ILNO, è un quadrato perché ha tutti i lati congruenti, per la dimostrazione precedente, e ha tutti gli angoli congruenti di 90°, in quanto:

$$O\hat{N}L = 180° - \left(B\hat{N}O + A\hat{N}L\right) = 180° - 2 * 45° = 90°$$
$$N\hat{O}I = 180° - \left(B\hat{O}N + C\hat{O}I\right) = 180° - 2 * 45° = 90°$$
$$O\hat{I}L = 180° - \left(C\hat{I}O + L\hat{I}D\right) = 180° - 2 * 45° = 90°$$
$$N\hat{L}I = 180° - \left(A\hat{L}N + I\hat{L}D\right) = 180° - 2 * 45° = 90°$$

Considerando GH e NO, essi sono segmenti paralleli in quanto GN = $\frac{1}{2}$ GM e OH = $\frac{1}{2}$ MH perché il baricentro (H e G) di un triangolo (rispettivamente BMC e BMA) divide le sue mediane in due segmenti che sono uno il doppio dell'altro. Quindi essendo $\frac{GM}{GN} = \frac{MH}{OH}$ di conseguenza, per il Teorema di Talete, GH è parallelo a NO.

Considerando HE e OI, essi sono segmenti paralleli in quanto EI = $\frac{1}{2}$ EM e OH = $\frac{1}{2}$ MH perché il baricentro (H e E) di un triangolo (rispettivamente BMC e CMD) divide le sue mediane in due segmenti che sono uno il doppio dell'altro. Quindi essendo $\frac{EM}{EI} = \frac{MH}{OH}$ di conseguenza, per il Teorema di Talete, HE è parallelo a OI.

Considerando EF e IL, essi sono segmenti paralleli in quanto EI = $\frac{1}{2}$ EM e LF = $\frac{1}{2}$ FM perché il baricentro (E e F) di un triangolo (rispettivamente CMD e DMA) divide le sue mediane in due segmenti che sono uno il doppio dell'altro. Quindi essendo $\frac{EM}{EI} = \frac{FM}{LF}$ di conseguenza, per il Teorema di Talete, EF è parallelo a IL.

Considerando GF e NL, essi sono segmenti paralleli in quanto GN = $\frac{1}{2}$ GM e LF = $\frac{1}{2}$ FM perché il baricentro (F e G) di un triangolo (rispettivamente DMA e BMA) divide le sue mediane in due segmenti che sono uno il doppio dell'altro. Quindi essendo $\frac{GM}{GN} = \frac{FM}{LF}$ di conseguenza, per il Teorema di Talete, GF è parallelo a NL.

Quindi EFGH rettangolo, in quanto formato da lati paralleli ai lati di un quadrato. Quindi avente angoli di 90°.

[Non ci sono errori ma invece di ripetere 4 volte lo stesso ragionamento si poteva, come di solito si fa, scrivere, dopo la prima dimostrazione, "in modo analogo si prova che ….”]

Considerando OMI e HME, essi hanno:

- $O\hat{M}I$ in comune
- $M\hat{O}I \cong M\hat{H}E$ perché angoli corrispondenti
- $M\hat{I}O \cong M\hat{E}H$ perché angoli corrispondenti

Quindi i due triangoli sono fra loro [simili] [[direttamente proporzionali]] in quanto hanno [gli] angoli congruenti.

Quindi essendo MH = $\frac{2}{3}$ MO e ME = $\frac{2}{3}$ MI di conseguenza anche HE = $\frac{2}{3}$ OI

Considerando IML e EMF, essi hanno:

- $I\hat{M}L$ in comune
- $M\hat{E}F \cong M\hat{I}L$ perché angoli corrispondenti
- $M\hat{F}E \cong M\hat{L}I$ perché angoli corrispondenti

Quindi i due triangoli sono fra loro loro [simili] [[direttamente proporzionali]] in quanto hanno [gli] angoli congruenti.

Quindi essendo ME = $\frac{2}{3}$ MI e MF = $\frac{2}{3}$ ML di conseguenza anche EF = $\frac{2}{3}$ IL

Considerando NML e [[LMI]] [GMF], essi hanno:

- $N\widehat{M}L$ in comune
- $M\hat{F}G \cong M\hat{L}N$ perché angoli corrispondenti
- $M\hat{G}F \cong M\hat{N}L$ perché angoli corrispondenti

Quindi i due triangoli sono fra loro [simili] [[direttamente proporzionali]] in quanto hanno [gli] angoli congruenti.
Quindi essendo MF = $\frac{2}{3}$ ML e MG = $\frac{2}{3}$ MN di conseguenza anche GF = $\frac{2}{3}$ NL

Considerando NMO e GMH, essi hanno:

- $N\widehat{M}O$ in comune
- $M\hat{G}H \cong M\hat{N}O$ perché angoli corrispondenti
- $M\hat{H}G \cong M\hat{O}N$ perché angoli corrispondenti

Quindi i due triangoli sono fra loro loro [simili] [[direttamente proporzionali]] in quanto hanno [gli] angoli congruenti.
Quindi essendo MG = $\frac{2}{3}$ MN e MH = $\frac{2}{3}$ MO di conseguenza anche GH = $\frac{2}{3}$ NO

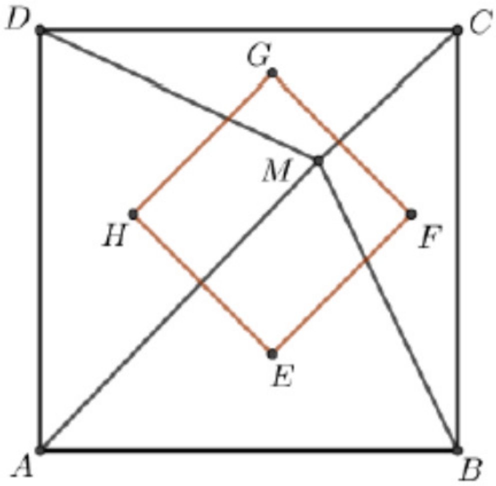
Quindi EFGH è un quadrato perché ha tutti i lati congruenti, in quanto $\frac{2}{3}$ di lati congruenti, e tutti gli angoli congruenti di 90°.

[Anche qui non era necessario ripetere 4 volte lo stesso ragionamento ma procedere per analogia]

b)
Considerando i triangoli OIC, IDL, LAN, NBO essi sono isosceli. Quindi tenendo in considerazione che i due lati congruenti dei triangoli sono la metà del lato del quadrato di partenza (l), possiamo affermare, attraverso il teorema di Pitagora, che i segmenti HE, EF, FG, GH [misurano tutti $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}l}$ = ????]

7) Soluzione inviata da Giulio Franzoni, Classe 1^R, Liceo scientifico A. Roiti indirizzo scienze applicate – Ferrara

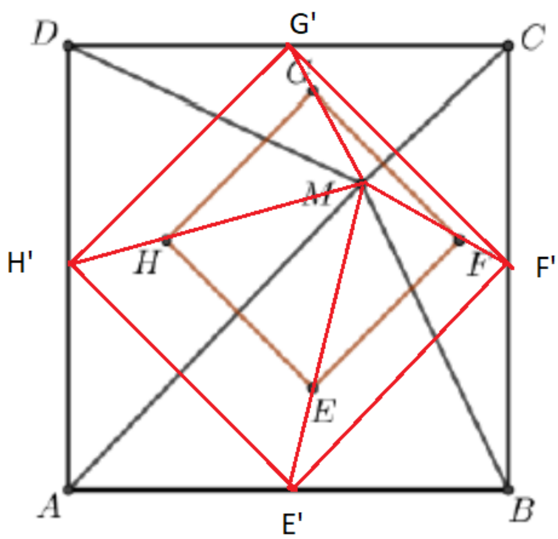
$ABCD$ è un quadrato di lato unitario ed M un qualsiasi suo punto interno.
a) Provare che i baricentri dei triangoli ABM, BCM, CDM e ADM sono i vertici di un quadrato.
b) Determinare la misura del lato di tale quadrato..
Motivare le risposte.



Innanzitutto si tracciano le mediane da M fino ai punti medi dei lati del quadrato ABCD. Uniamo tra di loro i punti E', F', G', H'.

1) I segmenti AH', H'D, DG', G'C, CF', F'B, BE', E'A sono tutti uguali, in quanto ottenuti dividendo i lati del quadrato ABCD in due parti uguali.
I quattro triangoli H'DG', G'CF', F'E'B, E'H'A sono rettangoli, isosceli e congruenti e identificano il poligono H'G'F'E' che risulta essere un quadrato in quanto ha i lati e gli angoli congruenti [perché ?].
Il lato Lq del quadrato H'G'F'E' si calcola come

Lq = $\sqrt{(L/2)^2 + (L/2)^2} = L/2 * \sqrt{2}$



2)Per la proprietà del baricentro, punto di incontro delle mediane, ME = 2 * EE' ovvero ME'/ME = 3/2 e così per le altre mediane.

3)Ricordo che per il teorema di Talete, applicato ai triangoli:
3a)Una retta parallela al lato di un triangolo taglia gli altri due lati in segmenti proporzionali tra di loro.
E viceversa.
3b)Se una retta determina su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, allora è parallela al terzo lato.

Per la 2) ME'/ME = 3/2 ma anche MF'/MF = 3/2 questo implica ME'/ME = MF'/MF quindi [[ME'/ME = MF'/MF = 3/2]] [questa sembra una ripetizione di quanto appena scritto] e così per gli altri segmenti.

Per la 3b) le due rette EF ed E'F' sono parallele e allo stesso modo EH e E'H', ecc..
Questo dimostra che il poligono EFGH è un parallelogramma.

Le due rette EF ed E'F' identificano due triangoli simili MEF e ME'F' come gli altri triangoli MHE e MH'E', ecc. Dalla similitudine otteniamo che EFGH è un quadrato [occorreva spiegare un po' meglio !].

Per ottenere il lato del quadrato EFGH applichiamo la formula ME'/ME = E'F'/EF = 3/2 quindi otteniamo il lato del quadrato:
EF = E'F' * 2/3 = Lq *2/3 = L/2 * $\sqrt{2}$ * 2/3 = L/3 * $\sqrt{2}$
e infine, posto L = 1, (lato unitario), otteniamo EF = 1/3 * $\sqrt{2} \approx 0.47$