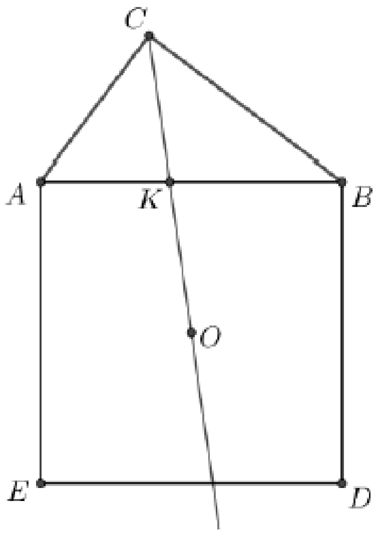
FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria online (per studenti della scuola secondaria)

Flatlandia – Problema 10 – 31 maggio 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo rettangolo in C i cui cateti AC e BC misurano rispettivamente 21 e 28 (vedi figura). Considerato il quadrato di lato AB esterno al triangolo, sia O il suo centro. Detto K il punto in cui CO interseca AB, determinare le misure dei segmenti AK, BK e CK.
Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto 8 risposte, tutte provenienti da classi di Licei Scientifici.
Il problema poneva un quesito relativo a un triangolo rettangolo e alla semiretta ottenuta congiungendo il vertice dell'angolo retto con il centro del quadrato costruito sull'ipotenusa. Nello specifico si chiedevano le misure delle distanze del punto di intersezione di tale semiretta con l'ipotenusa dai tre vertici del triangolo.
Le risposte arrivate sono tutte sostanzialmente corrette, salvo un piccolo errore di conto in una di esse. È però opportuno notare che sarebbe meglio utilizzare strumenti più semplici (che ci sono!) invece di risultati più "raffinati" che spesso neppure vengono svolti nei programmi scolastici.

Abbiamo ricevuto soluzioni (elencate nell'ordine in cui sono arrivate) da studenti delle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "A. Pacinotti", Cagliari
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "P. Bottoni", Milano
- IIS Badoni, Lecco, 2 soluzioni
- ISIS "Arturo Malignani", Udine
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara
- Liceo "Giorgione", Liceo Scientifico, Castelfranco Veneto (TV)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

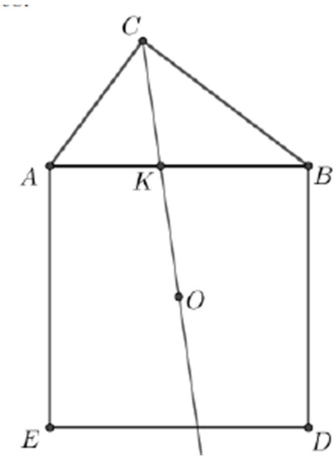
Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Leo Cazzaniga, 3^I, Liceo Scientifico "Antonio Pacinotti", Cagliari

Risposte: $\overline{BK} = 20$ $\overline{AK} = 15$ $\overline{CK} = 12 \cdot \sqrt{2}$

L'angolo $A\hat{O}B$ è un angolo retto, poiché è formato dall'intersezione delle diagonali di un quadrato.

Dunque il quadrilatero $A\hat{O}B$ è inscrivibile in una circonferenza, perché la somma dei due angoli opposti in C e in O è un angolo piatto (quindi gli angoli opposti del quadrilatero sono supplementari tra loro).



Gli angoli alla circonferenza $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}O$ sono congruenti, perché insistono sugli archi congruenti AO e OB. Le corde $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, infatti, sono congruenti, perché sono la metà delle diagonali di $ABDE$, siccome le diagonali di un quadrato sono congruenti tra loro, e si incontrano nel loro punto medio, il punto O.

Allora possiamo affermare che la retta CO è la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.

Applichiamo dunque il teorema della bisettrice, secondo cui la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in segmenti proporzionali agli altri due lati.

Dunque impostiamo la seguente proporzione: $\overline{AC}/\overline{AK} = \overline{CB}/\overline{BK}$. Sostituendo ad $\overline{AC}$ e a $\overline{BC}$ i loro valori, otteniamo $21/\overline{AK} = 28/\overline{BK}$. Applicando il secondo principio delle equazioni, moltiplichiamo entrambi i membri per $\overline{AK}$ e $\overline{BK}$, e arriviamo all'uguaglianza $21 \cdot \overline{BK} = 28 \cdot \overline{AK}$. Semplificando, otteniamo $3 \cdot \overline{BK} = 4 \cdot \overline{AK}$, e quindi $\overline{AK} = 3/4 \cdot \overline{BK}$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC: ABC: $\overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \overline{AB^2}$. Dunque $\overline{AB} = 35$

Siccome $\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{BK}$, possiamo impostare il seguente sistema $\begin{cases} \overline{AK} + \overline{BK} = 35 \\ \overline{AK} = 3/4 \cdot \overline{BK} \end{cases}$

Sostituendo $\overline{AK}$ nella prima equazione, otteniamo $\overline{BK} + 3/4 \cdot \overline{BK} = 35$, da cui si ricava che$\overline{BK} = 20$. Allora, siccome $\overline{BK} + \overline{AK} = 35$, $\overline{AK} = 15$.

Nella circonferenza circoscritta al quadrilatero $ACBO$, gli angoli alla circonferenza $O\hat{C}B$ e $O\hat{A}B$ sono congruenti, perché insistono sullo stesso arco OB.

Allora i triangoli AKO e CKB sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli, perché hanno due angoli rispettivamente congruenti:

- $O\hat{C}B \cong O\hat{A}B$ per precedente dimostrazione,
- $A\hat{K}O \cong C\hat{K}B$ perché opposti al vertice.

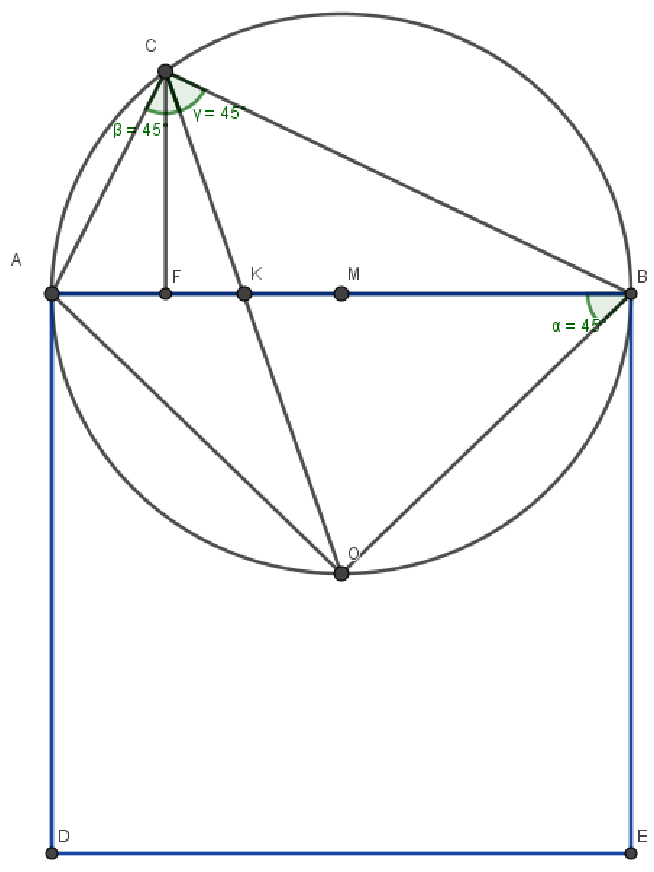
Allora possiamo impostare la proporzione $\overline{AK}/\overline{CK} = \overline{AO}/\overline{CB}$.

Siccome $\overline{AO}$ è meta della diagonale del quadrato $ABDE$, pari a $\sqrt{2} \cdot l$, possiamo ricavare il valore di $\overline{AO}$, che è pari a $\sqrt{2} \cdot 35/2$ (il lato del quadrato è pari al valore di $\overline{AB}$, precedentemente calcolato).

Se sostituiamo i valori di $\overline{AK}$, $\overline{AO}$ e $\overline{CB}$, otteniamo $15/\overline{CK} = \frac{\sqrt{2} \cdot 35}{2}/28$.

Di conseguenza, ricaviamo che $\overline{CK} = \frac{24}{\sqrt{2}}$. Razionalizziamo, e otteniamo $\overline{CK} = 12 \cdot \sqrt{2}$.

2) Soluzione proposta dalla classe 3^B del Liceo Scientifico internazionale "Aristosseno" di Taranto



Costruita la figura, notiamo che i triangoli rettangoli ABC e AOB hanno l'ipotenusa AB in comune; esse è quindi il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero AOBC.

La misura di AB la otteniamo attraverso il teorema di Pitagora : $\overline{AB} = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$ .Osserviamo inoltre che nella circonferenza suddetta le corde AO e OB sono lati del quadrato inscritto (il triangolo AOB è rettangolo e isoscele) e quindi gli angoli che insistono su queste due corde sono congruenti ed hanno ampiezza 45°:

[$A\hat{B}O = A\hat{C}O = B\hat{C}O$=45°.]

Dalla congruenza degli angoli [$A\hat{C}O$] e $B\hat{C}O$ si deduce che il segmento CK è bisettrice dell'angolo retto del triangolo ABC. Per il teorema della bisettrice si ha che:

AK: KB = AC: CB ma AC: CB=21:28 e quindi AK: KB=21:28 e perciò AK=3/4KB . Essendo però anche AK+KB=AB=35 ricaviamo le misure di AK=15 e di KB=20.

Per determinare la misura del segmento CK possiamo utilizzare il teorema di Pitagora applicandolo al triangolo CFK , dove F è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa nel triangolo ABC. Essendo $\overline{CF} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{21\cdot 28}{35} = \frac{84}{5}$ ed $\overline{AF} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \frac{21^2}{35} = \frac{63}{5}$ (per il primo teorema di Euclide) ricaviamo la misura di FK :

$$\overline{FK} = \overline{AK} - \overline{AF} = 15 - \frac{63}{5} = \frac{12}{5}.$$

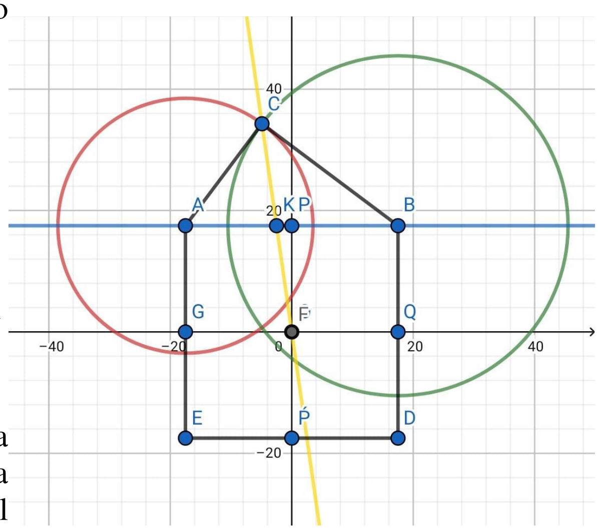
e infine quella di CK:

$$\overline{CK} = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{\left(\frac{84}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{12}{5}\cdot\sqrt{50} = \frac{12}{5}\cdot 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

3) Soluzione proposta da Ludovico Giovanni Hopes, Classe 3^C, Liceo Bottoni di Milano

Soluzione

Inserisco il problema in un Piano Cartesiano Ortogonale con origine nel centro del quadrato



Dati:

AC=21

BC=28

Calcolo la lunghezza del segmento AB

AB=$\sqrt{21^2 + 28^2}$ = 35

Le coordinate degli estremi del segmento sono quindi A($-\frac{35}{2}$,$\frac{35}{2}$) e B($\frac{35}{2}$,$\frac{35}{2}$)

Per trovare le coordinate del punto C interseco la circonferenza avente il centro in A e il raggio pari alla lunghezza del segmento AC con un'altra avente il centro B e il raggio uguale alla lunghezza del segmento BC.

Circonferenza Γ_1: $\left(x + \frac{35}{2}\right)^2 + (y - \frac{35}{2})^2 = 21^2$

Circonferenza Γ_2: $\left(x-\frac{35}{2}\right)^2+(y-\frac{35}{2})^2=28^2$

Determino le coordinate del punto C

$$\begin{cases} x^2+y^2+35x-35y+\dfrac{343}{2}=0 \\ x^2+y^2-35x-35y-\dfrac{343}{2}=0 \end{cases}$$

Risolvo sottraendo la seconda equazione dalla prima ed ottenendo l'equazione di primo grado in x

$70x=-343$ da cui $x=-\frac{49}{10}$

Sostituisco $-\frac{49}{10}$ in una delle equazioni: $(-\frac{49}{10})^2+y^2+35(-\frac{49}{10})-35y+\frac{343}{2}=0$ da cui ottengo l'equazione di secondo grado in y

$$y^2-35y+\frac{2401}{100}=0$$

Che rende le due soluzioni:

$y=\frac{343}{10}$ accettabile

$y=\frac{7}{10}$, non accettabile perché la y del punto C non può essere inferiore a $\frac{35}{2}$

Le coordinate del punto C risultano quindi:

$$C(-\frac{49}{10},\frac{343}{10})$$

Calcolo la retta passante per C e O

Coefficiente angolare della retta $m=\frac{(343/10)}{(-49/10)}=-7$ da cui ottengo la retta r: $y=-7x$

Che interseco con la retta sostegno del segmento AB y=$\frac{35}{2}$

$$\begin{cases} y=-7x \\ y=\dfrac{35}{2} \end{cases}$$

Da cui ottengo le coordinate del punto K

$$K(-\frac{5}{2},\frac{35}{2})$$

Calcolo le lunghezze dei segmenti richiesti AK, BK E CK

$$AK=\left|-\frac{5}{2}+\frac{35}{2}\right|=15$$

$$BK=\left|-\frac{5}{2}-\frac{35}{2}\right|=20$$

$$CK=\sqrt{(-\frac{5}{2}+\frac{49}{10})^2+(\frac{35}{2}-\frac{343}{10})^2}=12\sqrt{2}$$

Pertanto:

$$AK = 15$$
$$BK = 20$$
$$CK = 12\sqrt{2}\,.$$

4) Soluzione proposta da Marianna Arrigoni, Matilde Chiappa e Lucia Rosa, IIS A. Badoni, Lecco

Trovo AB con il teorema di Pitagora nel triangolo ABC:
$AB^2=AC^2+BC^2$
AB= $\sqrt{21^2 + 28^2}$=35
Traccio l'altezza CH relativa ad AB
Trovo AH con il [primo] teorema di Euclide nel triangolo ABC:
$CA^2=AH*AB$
AH=12.6
Trovo HB per differenza di AH da AB
HB=35-12.6=22.4
Trovo l'altezza CH con il [secondo] teorema di Euclide nel triangolo ABC:
CH=$\sqrt{AH * HB}$=$\sqrt{12.6 * 22.4}$=16.8
Traccio il segmento perpendicolare ad AB partendo dal punto O:
Chiamo H' la sua intersezione con AB:
considero i triangoli rettangoli AOH' e BOH' :

- OH' in comune
- OB e OA congruenti perché metà delle diagonali di un quadrato

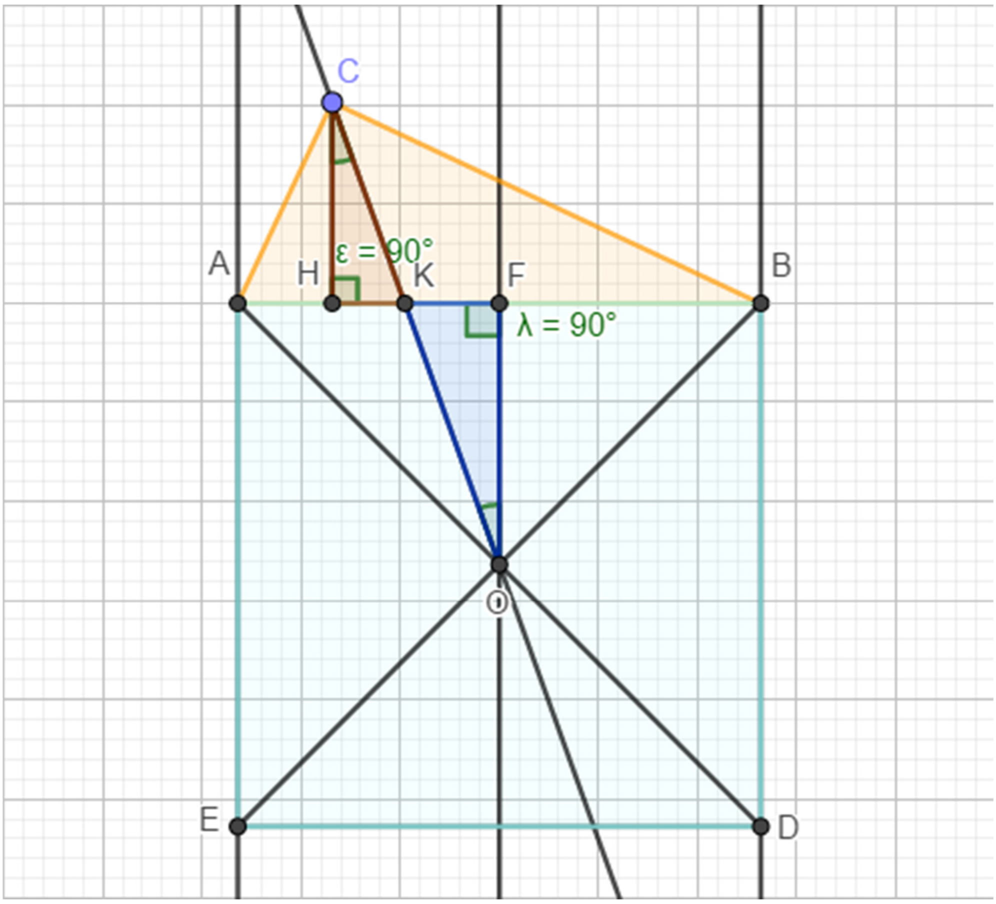
Allora i triangoli AOH' e BOH' sono congruenti per il quarto teorema di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare AH' sarà congruente a BH'.
I triangoli CKH e KOH' sono simili:

- Sono rettangoli
- Hanno angoli opposti al vertice CKH e H'KO congruenti

Calcolo il rapporto di similitudine k come $\frac{CH}{OH'}$=0.96[=$\frac{24}{25}$]
Ricavo KH' in funzione di KH dalla seguente relazione:
HB-H'B=KH+KH'
22.4-$\frac{35}{2}$=KH+KH'
KH'=4.9-KH
Trovo KH con il rapporto di similitudine tra i triangoli CKH e KOH':
KH:KH'=CH:OH'
KH=$\frac{24}{25}$(4.9-KH)
Chiamo KH ''x'' e trovo il suo valore:
x=2.4=KH
Trovo AK come somma di AH e KH:
AH=15
Trovo CK tramite il teorema di Pitagora nel triangolo CHK:
$CK^2=CH^2+HK^2$
CK=$12\sqrt{2}$
Trovo KH' come differenza tra [[BH]] [HH'] e KH:

KH’=2.5
Trovo BK come somma tra BH’ e KH’:
BK=20
[Si potevano anche far vedere i semplici conti !!!]

5) Soluzione proposta da Civillini Sveva e Crippa Camilla, Istituto di Istruzione Superiore “A. Badoni” - Lecco (LC) - Classe: 2^A Liceo Scientifico delle Scienze Applicate



Costruzione realizzata dalle alunne tramite l’applicazione “Geogebra”

Ipotesi:
- $\triangle ABC$ triangolo rettangolo;
- $\overline{AC}$ ⍰ 21 cm;
- $\overline{BC}$ ⍰ 28 cm;
- K = CO ∩ AB.

Tesi:
- $\overline{AK}$;
- $\overline{BK}$;
- $\overline{CK}$.

Risoluzione

Considerando il triangolo $\triangle ABC$rettangolo per ipotesi e conoscendo le misure dei cateti$\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ tramite il teorema di Pitagora ricaviamo la misura dell'ipotenusa $\overline{AB}$che coincide, per ipotesi e per costruzione, con il lato del quadrato $ABDE$:

$\overline{AB} \cong \overline{AE} \cong \overline{ED} \cong \overline{DB} = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = \sqrt{144 + 784} = \sqrt{1225} = 35\ cm$

[Nella prima radice quadrata va AC al posto di AB e nella terza è 441 e non 144]

Quindi, conoscendo il lato del quadrato $ABDE$ possiamo calcolare la lunghezza delle sue diagonali applicando la formula inversa per il calcolo dell'area del quadrato: $\overline{AD} \cong \overline{EB} = \sqrt{2A} = \sqrt{2(35)^2} = \sqrt{2450} = 35\sqrt{2}\ cm$

Conoscendo la misura dell'ipotenusa e dei cateti del triangolo $\triangle ABC$ rettangolo per ipotesi, mediante il primo teorema di Euclide ricaviamo la misura del segmento AH.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \frac{21^2}{35} = \frac{441}{35} = 12,6\ cm$$

Considerando ancora il triangolo $\triangle ABC$, applichiamo su esso il secondo teorema di Euclide.

Per costruzione $\overline{CH}$ è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo $\triangle ABC$; conoscendo la misura di $\overline{AH}$ e di $\overline{AB}$ possiamo ricavare per differenza la misura del segmento $\overline{HB}$ e poi applicare sul triangolo $\triangle ABC$ il secondo teorema di Euclide.

$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 35 - 12,6 = 22,4\ cm$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide:

$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH} = 12,6 \cdot 22,4 = 282,24\ cm$

$\overline{CH} = \pm\sqrt{282,24} = \pm\ 16,8\ cm$

Dalle soluzioni di $\overline{CH}$ escludiamo il valore negativo siccome, essendo $\overline{CH}$ [la misura di] un segmento, esso deve [essere un numero positivo] [[avere una lunghezza positiva]], quindi: $\overline{CH} = 16,8\ cm$

Ora consideriamo il triangolo$\triangle ABO$, isoscele in quanto O è il centro del quadrato, quindi è punto medio delle due diagonali del quadrato stesso, di conseguenza, $\overline{AO} \cong \overline{AB}$.

Tracciamo l'altezza del triangolo isoscele $\triangle ABO$, appena preso in considerazione; riflettendo sulle proprietà del triangolo isoscele possiamo affermare che l'altezza $\overline{OF}$ relativa alla base è anche mediana relativa alla base, quindi $\overline{AF} \cong \overline{FB}$, di conseguenza conoscendo la misura della lunghezza di $\overline{AB}$ possiamo ricavare la misura di questi due segmenti:

$$\overline{AF} \cong \overline{FB} \cong \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{35}{2} = 17,5\ cm$$

Ora prendiamo in considerazione i due triangoli $\triangle KFO$ e $\triangle HKC$ rettangoli per costruzione, essi sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli, infatti essi hanno i tre angoli congruenti:

- $C\widehat{H}K \cong K\widehat{F}O \cong \frac{\pi}{2} \cong 90°$;
- $F\widehat{K}O \cong C\widehat{K}H$ in quanto angoli opposti al vertice rispetto ai segmenti $\overline{CO}$ e $\overline{HF}$;

- $H\widehat{C}K \cong K\widehat{O}F$ in quanto angoli interni interni rispetto alle rette $CH \parallel FO$ e alla trasversale CO (dove $CH \parallel FO$ in quante rette perpendicolari ad una stessa retta, ovvero rispetto alla retta AB);

Essendo $\triangle CHK \sim \triangle KFO$ e conoscendo le dimensioni di $\overline{CH}$ e $\overline{FO}$ (per le dimostrazioni precedenti), possiamo ricavare il rapporto di similitudine, nonché k:

$k = \frac{CH}{FO} = \frac{16,8}{17,5} = \frac{24}{25}$, in quanto $FO \cong \frac{AB}{2} \cong \frac{35}{2} = 17,5\ cn$

Poniamo l'incognita x sul segmento $\overline{KF}$, quindi ricaviamo per differenza il segmento $\overline{HK}$ in funzione dell'incognita x (con la lunghezza di $\overline{AB},\ \overline{AH}\ e\ \overline{FB}$ ricavata in precedenza):

$\overline{HK} \cong \overline{AB} - \overline{AH} - \overline{FB} - x = 35 - 12,6 - 17,5 - x = 4,9 - x$

Essendo $\triangle CHK \sim \triangle KFO$, ricaviamo il valore dell'incognita tramite la seguente equazione:

$$\overline{HK} = \frac{24}{25}x$$

$$4,9 - x = \frac{24}{25}x$$

$$4,9 = \frac{49}{25}x$$

$$x = 4,9\left(\frac{25}{49}\right)$$

$x = 2,5\ cm$ [da cui HK=2,4 cm.]

Dopo aver ricavato il valore dell'incognita x e quindi del segmento $\overline{KF}$, ricaviamo la lunghezza del segmento $\overline{\text{AK}}$ tramite una somma e quella del segmento $\overline{BK}$ per differenza:

[[

$AK \cong AH + x = 12,6 + 2,5 = 12,1\ cm$

$BK \cong AB - AK = 35 - 15,1 = 19,9\ cm$]]

[Risulta AK=AH+HK=12,6+2,4=15 cm e BK=AB-AK=35-15=20 cm.]

Ora ricaviamo la lunghezza del segmento $\overline{HK}$ sostituendo il valore attribuito all'incognita x nell'equazione: $\overline{HK} = 4,9 - x$

$$\overline{HK} = 4.9 - 2,5 = 2,4\ cm$$

Conoscendo la lunghezza dei segmenti $\overline{HK}$ e $\overline{CH}$ ricavati in precedenza, applichiamo il teorema di Pitagora sul triangolo $\triangle HKC$ per trovare la lunghezza del segmento $\overline{CK}$:

$$\overline{CK} = \sqrt{CH^2 + HK^2} = \sqrt{16,8^2 + 2,4^2} = \sqrt{282,24 + 5,76} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}\ cm$$

Conclusioni

Risolvendo il problema abbiamo ottenuto le seguenti soluzioni:

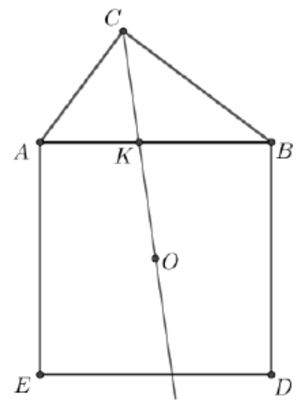
[[
$\overline{CK} = 12\sqrt{2}\ cm$

$\overline{BK} = 19,9\ cm$

$\overline{AK} = 12,1\ cm$]]

[CK=12$\sqrt{2}$, BK=20 cm , AK=15 cm]

6) Soluzione proposta da Gaia Padrini, Liceo Scientifico Scienze Applicate, classe 2^ sez. D, ISIS "Artuto Malignani", Udine



Con il teorema di Pitagora calcolo l'ipotenusa AB.

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{28^2 + 21^2} = 35$$

Dimostro che la semiretta CO è bisettrice geometrica dell'angolo retto $\hat{C}$.

Considero il punto medio del segmento AB e lo chiamo M:

- ABC è un triangolo rettangolo quindi esso è sempre inscrivibile in una circonferenza *c* avente centro nel punto medio della ipotenusa M e raggio congruente alla metà dell'ipotenusa stessa; ciò implica che i punti A, B e C appartengono alla circonferenza *c*.
- Considero il triangolo ABE: in esso O è punto medio del lato BE (essendo BE diagonale e O centro del quadrato ABDE) e M è punto medio del lato AB per costruzione, quindi il segmento MO è parallelo e congruente alla metà di AE (per il primo corollario del teorema di Talete).
- OM è congruente a MA.
- MA è un raggio della circonferenza *c*, quindi lo è anche OM essendogli congruente e con un estremo in comune, questo implica che O appartiene a *c*.
- Considerando le diagonali del quadrato BE e AD, esse si intersecano nel punto O perché esso è il centro del quadrato ABDE ciò implica che BO è congruente a AO.
- BO e AO sono anche corde della circonferenza *c*, perché i punti A e B le appartengono. Esse sono congruenti, di conseguenza lo sono anche gli archi che sottendono e in particolare gli

angoli alla circonferenza che, a loro volta, sottendono tali archi ciò implica che B$\hat{C}$O e O$\hat{C}$A angoli sono congruenti quindi ho dimostrato che CO biseca l'angolo A$\hat{C}$B.

Per calcolare la misura della bisettrice CK ricorro all'espressione che lega la bisettrice in funzione dell'angolo a cui essa si riferisce e dei lati che lo formano.

$$CH = \frac{2 * CB * AC}{AC + CB} * cos\frac{\hat{C}}{2} = \frac{2 * 28 * 21}{21 + 28} * cos\ \frac{\hat{C}}{2} = \frac{1176}{49} * cos\ \frac{90°}{2}\ =\ 16{,}97$$

[Sarebbe stato meglio calcolare la lunghezza della bisettrice senza ricorrere alla trigonometria, usando tra l'altro una formula ben poco nota e utilizzata. Si ha tutto sommato a che fare con angoli retti e di 45 gradi e l'uso della trigonometria sembra un po' esagerato]

Applico il teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo che recita:
"La bisettrice dell'angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in segmenti proporzionali agli altri due lati".

BK : AK = BC : AC

risolvo:

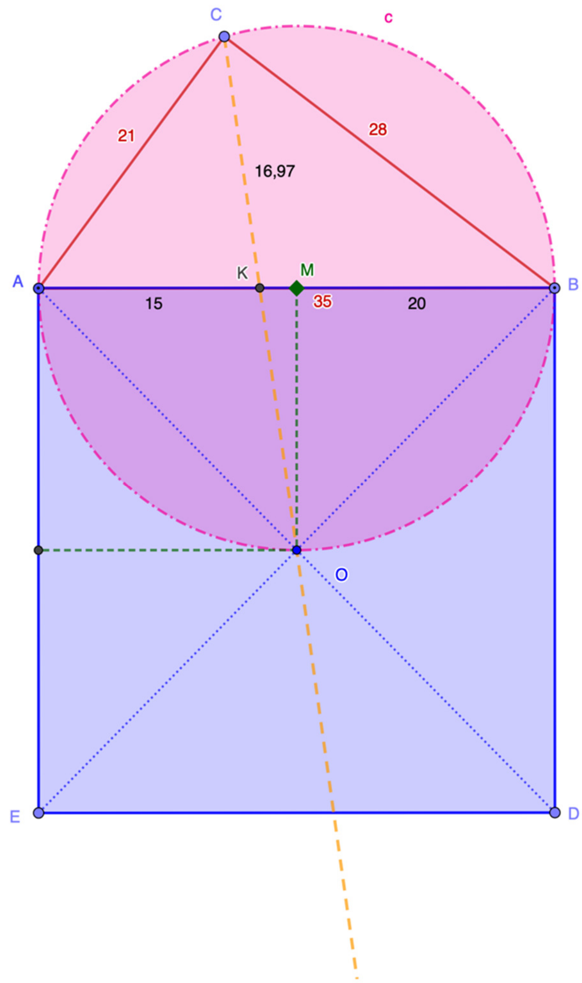
$$BK = \frac{AK * BC}{AC} = \frac{AK * 28}{21}$$

ma so che AB = AK + BK= 35

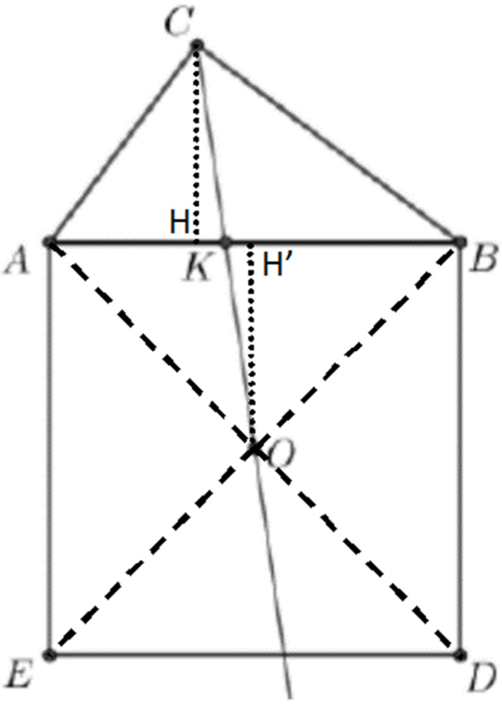
allora: $AB\ =\ AK + \frac{AK*28}{21}\ =\ 35$

risolvo:

AK = 15 di conseguenza BK = AB - AK = 20



7) Soluzione proposta da Emanuele Cavuta, Liceo Scientifico Galilei, Pescara, classe 3^F



DATI

$\overline{AC} = 21$

$\overline{CB} = 28$

$\hat{C} = 90°$

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OE}$

Traccio le perpendicolari al segmento $\overline{AB}$ da C e O, rispettivamente.

Per costruzione e per le proprietà del quadrato si ha: $\overline{AH'} = \overline{H'B} = \overline{OH'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Inoltre, i due triangoli CHK e OH'K sono simili, avendo i due angoli in $\hat{K}$ uguali, perché opposti al vertice ed essendo entrambi rettangoli in $\hat{H}$ e $\hat{H'}$, rispettivamente.

Ottengo i seguenti risultati:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$$

$$\overline{AH'} = \overline{H'B} = \overline{OH'} = \frac{1}{2} \times 35 = 17.5$$

$$\overline{CH} = \frac{\overline{AC} \times \overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{21 \times 28}{35} = 16.8$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{21^2 - (16.8)^2} = 12.6$$

$\overline{HK} + \overline{KH'} = \overline{AH'} - \overline{AH} = 17.5 - 12.6 = 4.9$

Indico la misura di $\overline{HK}$ con x (con x›0)

Ottengo: $\overline{KH'} = 4.9 - x$

Ora ho tutti gli elementi per impostare un'equazione nell'incognita x, derivante dalla considerazione della similitudine tra i triangoli CHK e OH'K.

$\overline{CH} : \overline{HK} = \overline{OH'} : \overline{KH'}$

$16.8 : x = 17.5 : (4.9 - x)$

$17.5x = 16.8\,(4.9 - x)$

$17.5x = 82.32 - 16.8x$

$34.3x = 82.32$

$x = 2.4 = \overline{HK}$

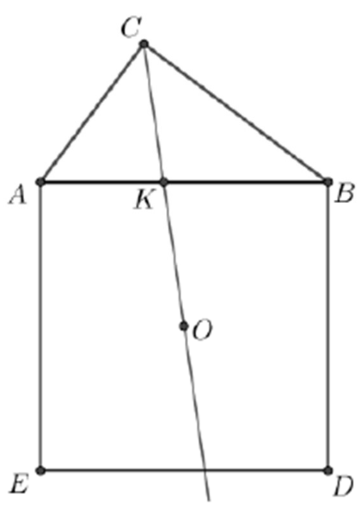
Ottengo quindi:

$\overline{AK} = \overline{AH} + \overline{HK} = 12.6 + 2.4 = 15$

$\overline{BK} = \overline{AB} - \overline{AK} = 35 - 15 = 20$

$\overline{CK} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HK}^2} = \sqrt{16.8^2 + 2.4^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

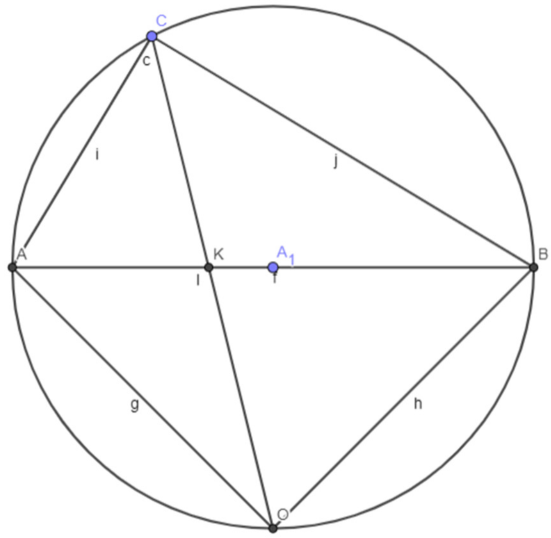
8) Soluzione proposta da Francesco Salvalaggio, classe 3^A Liceo Scientifico ordinario "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)



Considero il triangolo AOB. Esso è un triangolo rettangolo isoscele: i suoi lati AO e BO giacciono sulle diagonali del quadrato AEDB, perpendicolari tra loro e che si dividono scambievolmente a metà. In particolare, AO e BO sono metà delle diagonali.

Consideriamo ora il triangolo rettangolo ABC. Esso, come ogni triangolo, è inscrivibile in una circonferenza. Esso però, essendo un triangolo rettangolo, può essere inscritto nella semicirconferenza di diametro AB (coincidente con la sua ipotenusa). Anche il triangolo AOB può essere inscritto nella semicirconferenza di diametro AB che si trova dalla parte opposta della precedente (è rettangolo e ha l'ipotenusa coincidente con l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC).

Quindi il quadrilatero AOBC può essere inscritto nella circonferenza di diametro AB.



(A_1 è il centro della circonferenza di raggio AB)
L'angolo $A\widehat{A_1}O$ è retto. L'altezza di AOB (isoscele) riferita ad AB è anche mediana (passa quindi per il punto medio del diametro AB. Per questi due motivi (altezza e mediana rispetto ad AB) il diametro verticale giace sulla retta passante per O e A_1).
L'angolo $A\widehat{A_1}O$ è inoltre un angolo al centro (vertice in A_1) che insiste sull'arco AO. Anche l'angolo $A\hat{C}O$ (angolo alla circonferenza) insiste sull'arco AO.
Quando abbiamo un angolo alla circonferenza e un angolo al centro che insistono sullo stesso arco, allora l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza è la metà di quella dell'angolo al centro. Quindi:

$$A\hat{C}O \cong \frac{1}{2} A\widehat{A_1}O$$

L'angolo $A\widehat{A_1}O$ è retto, quindi $A\hat{C}O = \frac{\pi}{4}$ rad = 45°.
Siccome $A\hat{C}B$ è retto per ipotesi, allora CK è bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.
Per il teorema della bisettrice:

$$AC : BC = AK : BK$$

Quindi:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

($\frac{3}{4}$ è il rapporto tra AK e BK)

Possiamo utilizzare il teorema di Pitagora per trovare la lunghezza del segmento AB:

$$AB = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$$

Dunque:

$$AK : BK = 3 : 4$$

Utilizziamo la proprietà del comporre delle proporzioni:

$$(AK + BK) : AK = (3 + 4) : 3$$

Possiamo osservare che $AK + BK = AB = 35$. Quindi:

$$35 : AK = 7 : 3$$

$$AK = \frac{35 * 3}{7} = 15$$

Di conseguenza, $BK = AB - AK = 35 - 15 = 20$.
Infine, per determinare la lunghezza del segmento CK, possiamo utilizzare il teorema di Stewart, che ci permette di trovare la lunghezza di qualsiasi ceviana (segmento che, da un vertice di un triangolo, va al lato opposto). La bisettrice è una ceviana, quindi è possibile utilizzare questo teorema.

$$AC^2 * BK + BC^2 * AK = AB(CK^2 + AK * BK)$$

Da cui

$$\frac{AC^2 * BK + BC^2 * AK}{AB} = CK^2 + AK * BK$$

E quindi.

$$CK = \sqrt{\frac{AC^2 * BK + BC^2 * AK}{AB} - AK * BK}$$

$$CK = \sqrt{\frac{21^2 * 20 + 28^2 * 15}{35} - 15 * 20} = \sqrt{\frac{8820 + 11760}{35} - 300} = \sqrt{588 - 300} = 12\sqrt{2}\,.$$

[Penso che il teorema di Stewart non faccia parte del bagaglio normale di uno studente del liceo, anche se non richiede nessun particolare prerequisito per poter essere insegnato e appreso. Sarebbe stato comunque meglio calcolare il valore della lunghezza della bisettrice utilizzando strumenti meno sofisticati ma più diretti].