FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" [*(Edwin A. Abbott)*]

Flatlandia – Problema – 7 - 28 gennaio 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

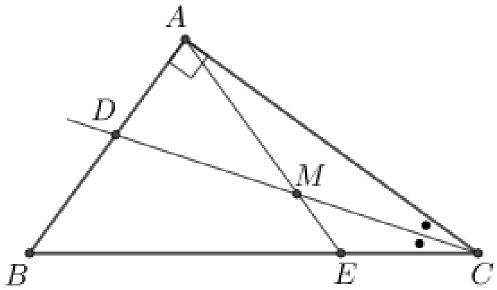
Il testo del problema

Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $\bar{AB}$ cateto minore, ed E il punto di BC tale che AB sia congruente a AE. Supponiamo inoltre che AE dimezzi la bisettrice CD dell'angolo in C.

a) Determinare le misure degli angoli acuti del triangolo ABC.

b) Quali proprietà ha il triangolo ADM?

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto 15 risposte, tutte da diverse classi (dalle seconde alle quinte) di Licei Scientifici.

Il problema poneva un quesito relativo a un triangolo rettangolo in cui una delle bisettrici degli angoli acuti è bisecata da una particolare ceviana del triangolo (ossia un segmento che congiunge un vertice del triangolo con un punto interno del lato opposto).

Occorreva poi descrivere le proprietà di un particolare triangolo isoscele ("triangolo aureo" del primo tipo).

La quasi totalità delle risposte giunte risolve correttamente il primo quesito, ricordando la proprietà della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo (essa stessa è congruente a metà ipotenusa).

Relativamente al secondo quesito, molti riconoscono il "triangolo aureo", molti invece si limitano a notare che tale triangolo è isoscele (probabilmente perché non conoscono il "triangolo aureo").

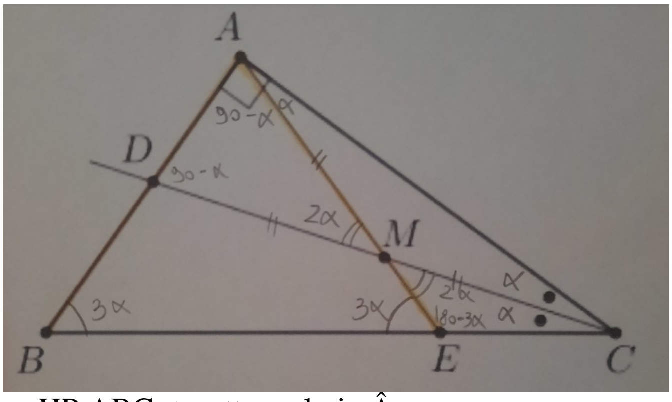
Abbiamo ricevuto soluzioni da studenti delle seguenti scuole (nell'ordine in cui sono arrivate):

- Liceo "Barsanti-Matteucci", Viareggio (LU)
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo "Giorgione" di Castelfranco Veneto (TV), 3 soluzioni
- Liceo Scientifico Vasco Beccaria Govone, Mondovì (CN)
- Liceo scientifico "Tullio Levi-Civita", Roma, 2 soluzioni
- ISIS "Arturo Malignani", Udine
- Liceo Scientifico "G.Alessi" Perugia.
- Liceo Scientifico Carlo Cafiero Barletta (BT), 2 soluzioni
- Liceo scientifico "C. Pisacane", Padula (SA), 2 soluzioni
- Liceo Scientifico "A. Rosmini", Rovereto (TN)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Sofia Scala, Classe 2D, Liceo "Barsanti-Matteucci", Viareggio (Lucca)



- HP:ABC=tr.rettangolo in Â

  E ∈ BC
  AE=AB
  ACD(ang.)=DCB(ang.)
  AE ∩ DC=M
  DM=MC

- TH:ABC(ang.)=?
  ACB(ang.)=?
  Tr.ADM proprietà

(premessa: a seguito di impossibilità tecniche, mi limiterò a indicare con un accento circonflesso gli angoli, dove è possibile, o da un insieme di lettere maiuscole seguite da(ang.) o precedute dalla parola "angolo"). [Perché non imparare a usare l'equation editor di Word?].

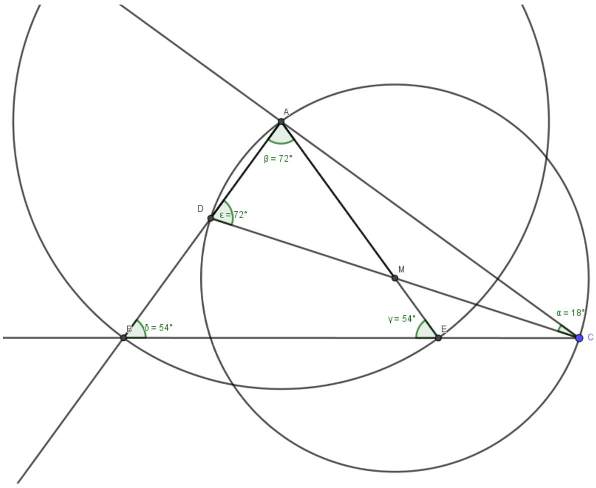
Dim:Indichiamo con α l'ampiezza degli angoli ACD e DCB(l'ampiezza di tali angoli è la stessa per hp)
Consideriamo il triangolo DAC=rettangolo perché l'angolo DÂC=90°per hp
Osserviamo poi che M=punto medio di DC per hp, segue che AM=mediana relativa a DC(ipotenusa)
In base alla proprietà della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo:
DM=MC=AM
Da questa relazione possiamo dedurre che il tr CMA=isoscele, segue che gli angoli MÂC=α perché ang. alla base di un tr. isoscele
A questo punto consideriamo il tr. ADM =isoscele perché DM=AM per precedente dimostrazione; esso ha:
DÂM=DÂC-MÂC
Cioè DÂM=90°-α
Essendo gli angoli alla base di un tr.iso. congruenti, segue che DÂM=MDA(ang.)=90-α
La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo deve essere 180°, quindi:

AMD(ang.)=180°-180°+2α=2α
Notiamo inoltre che gli angoli AMD e EMC sono congruenti perché opposti al vertice
A questo punto consideriamo il tr.EMC; esso ha:
EMC(ang)=2α per quanto dimostrato al passo precedente
MCE(ang.)=α
Da ciò segue che l'angolo CÊM=180°-3α(somma ang int.tr)
Prendo in considerazione l'angolo BÊC=180°,di conseguenza AÊB=180°-180°+3α=3α
Poiché il tr.ABE è isoscele(BA=AE per hp),gli angoli AÊB e ABE sono congruenti perché ang.alla base di un tr.iso.
Per il teorema dell'angolo esterno, applicato all'angolo esterno di vertice E del triangolo ABE, vale la relazione:
AÊC=EBA(ang.)+BÂE
180-3α=3α+90-α
180-3α=90+2α
5α=90
α =18
Pertanto:
L'angolo CBA=3α=3×18=54°
L'angolo ACB=2α=2×18=36°

[Manca la risposta alla domanda b)]

2) Soluzione proposta dalla classe 3^B del Liceo Scientifico internazionale “Aristosseno” di Taranto

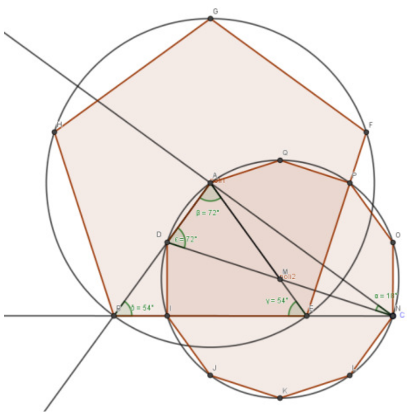
Soluzione proposta dalla classe 3 B liceo scientifico internazionale Aristosseno Taranto



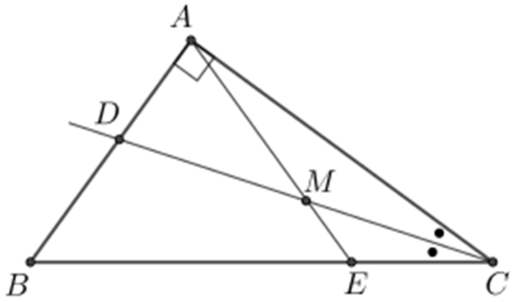
1- Indicata con α l'ampiezza dell'angolo $A\hat{C}D$,essendo il triangolo DAC rettangolo in A ed essendo AM la mediana relativa alla sua ipotenusa DC ,per un noto teorema si ha che MA=MD=MC (ovvero M è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo DAC) .Il triangolo AMD e il triangolo AMC sono allora isosceli e i loro angoli alla base sono complementari ; ovvero si ha che $M\hat{A}C = M\hat{C}$A = α e $M\hat{A}D = M\widehat{D}A$ = 90°-α. L'angolo B$\widehat{D}C$ ha ampiezza 90°+α per il teorema dell'angolo esterno, essendo esterno al triangolo DAC. Nel triangolo DBC poi , essendo il segmento CD la bisettrice dell'angolo ACB, $B\hat{C}D$= α e allora :

- nel triangolo BDC si ha : $A\hat{B}C$= 180°-($B\hat{C}D$ + $B\widehat{D}C$)= 180°-(α+90°+α)=90°-2α ,
- poiché il triangolo BAE è isoscele , $2A\hat{B}C$ = 180°- $B\hat{A}E$ =180°-(90°-α)=[90°+α][[90°-α]]

perché la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180°.
Si ha allora : 180°-4α = [90°+α] [[90°-α]] , da cui : 5α=90° e quindi : α=18° .
Possiamo infine concludere , trovata l'ampiezza dell'angolo α , che l'angolo $A\hat{C}B$ ha ampiezza 36° e l'angolo $A\hat{B}C$ ha ampiezza 54°.
2- Il triangolo ADM ,come già osservato, è isoscele ; i suoi angoli alla base sono $M\widehat{D}A = M\hat{A}D$ = 90°-α =72° e il suo angolo al vertice è $D\widehat{M}A$ = 36°. Da ciò deduciamo che ADM è un triangolo aureo , la sua base AD è sezione aurea del lato MA(= MD) e AD è anche il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro M e raggio MA .Nel triangolo isoscele ABE la base BE è il lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio AB (=AE) [e centro A].



3) Soluzione proposta da Alessio Ballan, Giorgia Galvan, Sophia Tibaldo, della classe 3a ASO del Liceo "Giorgione" di Castelfranco Veneto (TV)



Ipotesi

1. ABC triangolo rettangolo in $\hat{A}$

2. AB ≅ AE

3. DM ≅ MC

4. CD bisettrice di angolo $\hat{C}$($A\hat{C}D$ ≅ $D\widehat{C}B$)

Tesi

a) misure di:

- angolo $A\hat{B}C$
- angolo $A\hat{C}B$

b)proprietà triangolo ADM

Dimostrazione

a) Poniamo:

- $A\hat{B}C = \beta$
- $A\hat{C}D = \alpha$
- $B\hat{A}E = \gamma$

Il triangolo ABC è rettangolo in $\hat{A}$ per ipotesi 1.

Per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa, deduciamo che AM ≅ DM ≅ MC ⇒i triangoli AMC e ADM sono isosceli per definizione; in particolare, per proprietà gli angoli alla base del triangolo AMC sono congruenti ($M\hat{A}C$ ≅ $A\hat{C}M \cong \propto$)

- $\hat{C}$= 2α per ipotesi 4
- γ= 90°-α per differenza di angoli, considerando che il triangolo ABC è rettangolo in $\hat{A}$ e che $M\hat{A}C$ ≅ α per dimostrazione precedente
- Il triangolo ABE è isoscele per definizione (ipotesi 2), quindi gli angoli alla base sono congruenti ⇒ γ+ 2β= 180° per somma angoli interni di un triangolo ⇒ 90°-α+ 2β= 180° ⇒ α= 2β- 90°
- 2α+β=90° perché angoli complementari di un triangolo rettangolo ⇒ β= 90°- 2α
- α= 2(90°- 2α)-90° ⇒ 5α= 90° ⇒ α=18°
- β= 90° - 36°= 54°

[[Errata: ⇒ $\widehat{ABC} = ⍰⍰°$ **e** $A\hat{C}B = ⍰⍰°$]]

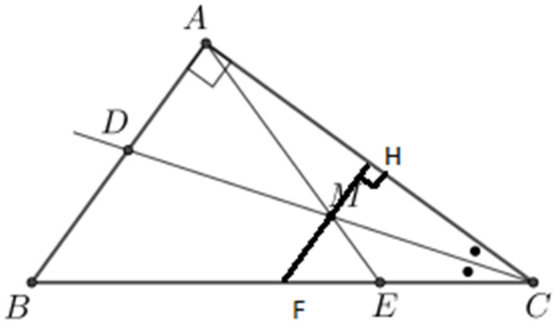
[Corrige: ⇒ $A\widehat{B}C = 54°$ e $A\hat{C}B = 36°$]

b) Il triangolo ADM è isoscele per dimostrazione precedente, quindi gli angoli alla base sono congruenti per proprietà:
$A\widehat{D}M$ ▯ $D\hat{A}M$= 90°- α = 72°
$A\widehat{M}D$ = 180°- (2·72°)=36°
Poiché il triangolo è isoscele, per proprietà la bisettrice, la mediana e l'altezza (quindi anche l'asse) relative alla base coincidono. [Non era questa la proprietà che interessava]

c.v.d

4) Soluzione proposta da Francesco Salvalaggio, classe 3^A Liceo Scientifico Ordinario di Castelfranco Veneto (TV)

a)
Cominciamo subito tracciando la perpendicolare ad AC passante per M, che interseca AC nel punto H e BC nel punto F.



Per il teorema di Talete il rapporto tra DM e MC coincide con il rapporto tra AH e HC (fascio di segmenti paralleli (AD e HM) tagliate da due trasversali (AC e DC)).
Siccome il rapporto tra DM e MC è 1 (sono congruenti per ipotesi), anche il rapporto tra AH e HC sarà uguale a 1. Ciò significa che AH ≅ HC.
Considero i triangoli AMH e MHC. Essi hanno un lato in comune (MH), l'angolo MHC ≅ MHA e AH ≅ HC.
I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza.
In particolare, essi hanno AM ≅ MC. Quindi per definizione il triangolo AMC è isoscele. Inoltre, essi hanno l'angolo AMH ≅ CMH.
L'angolo DAM ≅ AMH (angoli alterni interni di segmenti paralleli (AD e MH) tagliati da una trasversale (AM))
Siccome l'angolo DAM ≅ AMH (per dimostrazione precedente) e AMH ≅ CMH, allora (proprietà transitiva),

$$DAM \cong AMH \cong CMH$$

Calcolo della misura degli angoli acuti del triangolo ABC:
Indichiamo l'angolo ABC come x e l'angolo ACB come y.
Sappiamo per ipotesi che il triangolo ABE è isoscele. Impostiamo quindi la seguente uguaglianza:

$$2x = 180 - (90 - \frac{1}{2}y)$$

Questa però è un'equazione che non possiamo ancora risolvere, poiché sono presenti due incognite, Abbiamo bisogno di un'altra equazione.

$$y = 180 - 90 - x$$

Che diventa:

$$y = 90 - x$$

Mettiamo a sistema le due equazioni e, dopo aver svolto i conti, il risultato che otteniamo è il seguente:

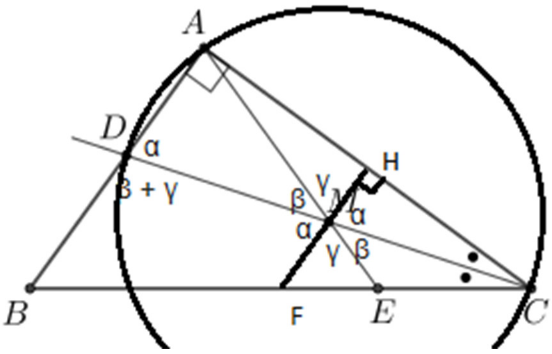
$$[[x = 54$$
$$y = 36]]$$

[Corrige: $x = 54°$, $y = 36°$]

La prima parte del problema è così risolta.

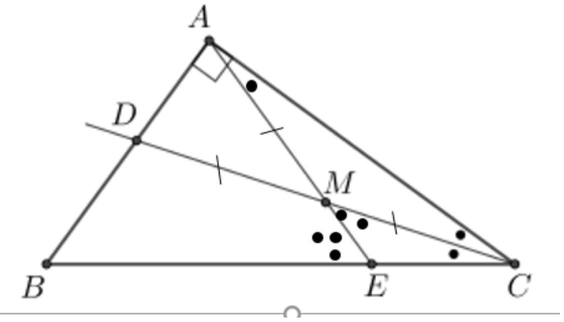
b)
Proprietà del triangolo ADM:

1) Il triangolo ADM è isoscele. Siccome per dimostrazione precedente AM ≅ MC e DM ≅ MC (per ipotesi), possiamo dedurre per la proprietà transitiva che AM ≅ DM. Per definizione, quindi, il triangolo ADM è isoscele.
2) La seconda proprietà è, a mio parere, più interessante. MD e MC sono congruenti per ipotesi. È quindi possibile pensarli come raggi della circonferenza di centro M. AM interseca la circonferenza in A (AM è congruente, come già dimostrato, ai due raggi, quindi è anch'esso un raggio della circonferenza di centro M).



Possiamo considerare l'angolo DMA come un angolo al centro e l'angolo ACD come angolo alla circonferenza corrispondente.
Per il teorema che mette in correlazione gli angoli al centro e i corrispondenti angoli alla circonferenza, l'angolo DMA ≅ 2(DCA).
Essendo per ipotesi l'angolo ACD ≅ DCB (e ACD + DCB ≅ ACB), deduciamo che l'angolo DMA ≅ ACB.
[Tutto corretto, ma non era questa la proprietà cercata].

5) Soluzione proposta da Araghi Chiara 4^ Liceo Scientifico "Vasco Beccaria Govone", Mondovì (CN)



SVOLGIMENTO

ACD=DCB=x

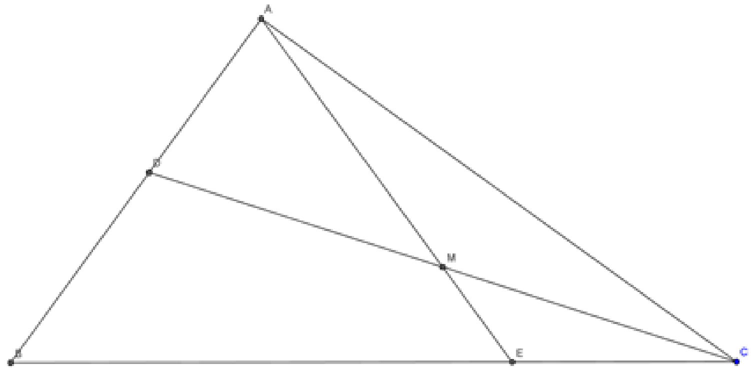
Prendiamo in considerazione i triangoli ACE e MCE

Angoli CME e CAE sono uno il doppio dell'altro perché nei 2 triangoli esaminati l'angolo AEC è in comune e ACE è il doppio dell'angolo MCE (siccome determinato dalla bisettrice dell'angolo ACE) e la somma degli angoli interni di un triangolo è costante (180°) [affermazioni non vere senza sapere che il triangolo AMC è isoscele sulla base AC, anzi questo viene dedotto in seguito da quanto affermato ora]

Si omette il resto, perché errato, nonostante la conclusione sia corretta.

[[…]]

6) Soluzione proposta da Francesca Polignano 4°A liceo scientifico "Tullio Levi-Civita", Roma



Hp: ABC triangolo rettangolo; ABE triangolo isoscele, CD bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$, M punto medio segmento [DC] [[Errata: BC]].

Richieste: trovare il valore degli angoli interni del triangolo ABC e le proprietà del triangolo [ADM] [[Errata: AMC]].

Procedimento:
Il mio obiettivo è trovare il valore degli angoli $A\hat{C}B$ e $A\hat{B}C$.
Trovo il valore degli angoli in funzione di α che serviranno alla dimostrazione:

- $B\hat{A}C$= 90° (per Hp)
- $A\hat{C}B = \alpha$
- $A\hat{C}M = \frac{1}{2}\alpha$ (per Hp)
- $A\hat{B}E = A\hat{E}B$ = 90°- α (l'ipotesi ci dice che il triangolo BAE è isoscele, perciò ha due lati e due angoli uguali)
- $B\hat{A}E$= 2 α ($B\hat{A}E$= 180°-($A\hat{B}E$ + $A\hat{E}B$)= 180°- 2(90°- α)= 2 α)
- $M\hat{A}C$= 90°- 2 α ($M\hat{A}C$= $B\hat{A}C$ - $B\hat{A}E$)

Detto questo considero il triangolo rettangolo DAC:

- per ipotesi sappiamo che DM≅MC, perciò AM è mediana dell'ipotenusa del triangolo DAC.

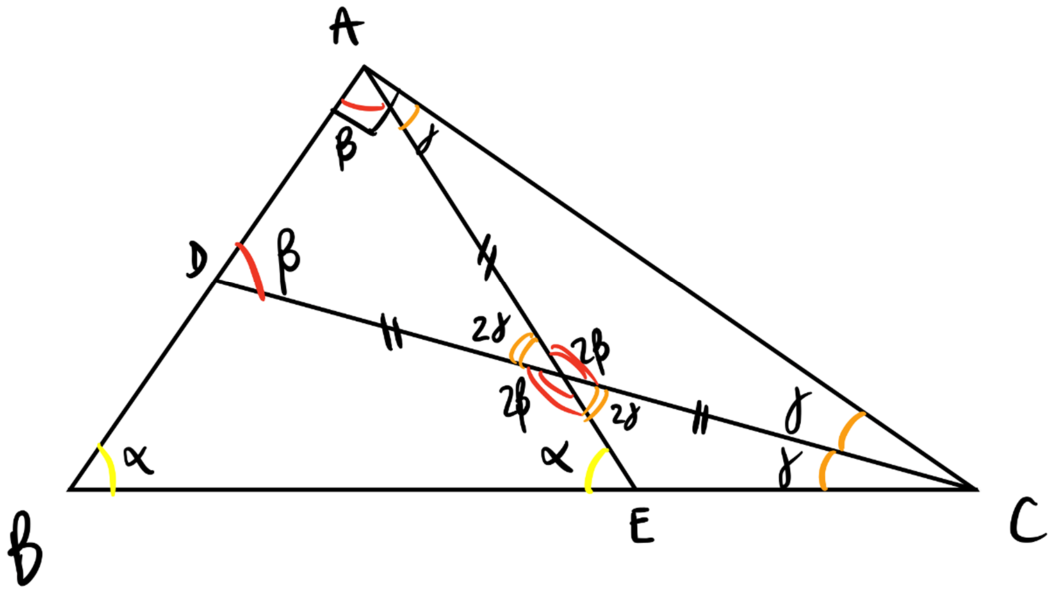
→ per il **teorema della mediana relativa all'ipotenusa**, scopriamo che AM≅DM≅MC. Grazie a questa uguaglianza deduciamo che il triangolo AMC è isoscele e attraverso una uguaglianza di angoli ricavare il valore numerico di α e β [chi è β?] .

$$A\hat{C}M = M\hat{A}C$$
$$\frac{1}{2}\alpha = 90° - 2\alpha$$
$$\alpha = \frac{180°}{5} = 36° \rightarrow \beta = 90° - \alpha = 90° - 36° = 54°$$

Ricapitolando:

α= 36°; β= 54°
Proprietà triangolo AMC: **triangolo isoscele**.
[Non è questa la proprietà che interessava].

7) Soluzione proposta da Matilde Del Pra, 3ASO, Liceo “Giorgione”, Castelfranco Veneto (TV)



IPOTESI

1) $B\hat{A}C \cong \frac{\pi}{2}$
2) $DM \cong MC$
3) $AB < AC$
4) $AB \cong AE$
5) $A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$

DIMOSTRAZIONE

Il triangolo ABE è isoscele per ipotesi 4, quindi $A\hat{B}E \cong A\hat{E}D$

Considerando il triangolo rettangolo ADC, poiché $MD \cong MC$ per ipotesi 2 e $D\hat{A}C \cong \frac{\pi}{2}$ per ipotesi 1

$\Rightarrow DM \cong AM \cong MC$, per il teorema della mediana

$\Rightarrow$ il triangolo AMC è isoscele e $A\hat{C}M \cong C\hat{A}M$

$A\widehat{M}D \cong E\widehat{M}C \cong 2\gamma$ per il teorema dell’angolo esterno

$A\widehat{M}C \cong E\widehat{M}D \cong 2\beta$ per il teorema dell’angolo esterno

$\Rightarrow 2\beta + 2\gamma \cong \pi$

$\Rightarrow$ $\beta + \gamma \cong \frac{\pi}{2}$ [evidente !]

Considerando il triangolo EMC,

$\alpha \cong 3\gamma$ per il teorema dell’angolo esterno

Considerando il triangolo ABE,

$\pi \cong 2\alpha + \beta$ per somma degli angoli interni di un triangolo

CREO UN SISTEMA CON LE TRE EQUAZIONI CHE HO RICAVATO:

$$\begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \beta + \gamma \cong \frac{\pi}{2} \\ \pi \cong 2\alpha + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \beta + \gamma \cong \frac{\pi}{2} \\ \pi \cong 6\gamma + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \beta \cong \frac{\pi}{2} - \gamma \\ \pi - 6\gamma \cong \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \pi - 6\gamma \cong \frac{\pi}{2} - \gamma \\ \pi - 6\gamma \cong \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \pi - 6\gamma \cong \frac{\pi}{2} - \gamma \\ \beta \cong \frac{\pi}{2} - \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \pi - \frac{\pi}{2} \cong 6\gamma - \gamma \\ \beta \cong \frac{\pi}{2} - \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \cong 3\gamma \\ \gamma \cong \frac{\pi}{10} \\ \beta \cong \frac{\pi}{2} - \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \cong 3\frac{\pi}{10} \\ \gamma \cong \frac{\pi}{10} \\ \beta \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \cong \frac{3\pi}{10} \\ \gamma \cong \frac{\pi}{10} \\ \beta \cong \frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

IN CONCLUSIONE

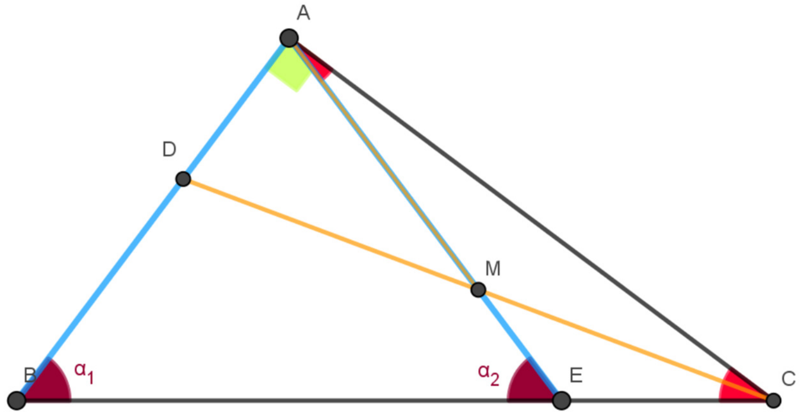
$A\hat{B}C \cong \frac{3\pi}{10}$

$A\hat{C}B \cong \frac{2\pi}{10} \cong \frac{\pi}{5}$

$B\hat{A}C \cong \frac{\pi}{2}$

[Un po' laborioso ma corretto. Manca il punto b)]

8) Soluzione proposta da Colonnelli Carola 4A – Liceo Scientifico "Tullio Levi Civita", Roma



Considero il triangolo $\triangle BAE$:

$\overline{AE} \cong \overline{AB}$ per ipotesi → $\triangle BAE$ è un triangolo isoscele → $\alpha_1 \cong \alpha_2 = \alpha$ → $B\hat{A}E = 180° - 2\alpha$

Considero ora il triangolo $\triangle DAC$:

è un triangolo rettangolo retto in A;

per ipotesi $\overline{DM} \cong \overline{MC}$ → AM è la mediana dell'ipotenusa;

per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{DC}$ → $\overline{CM} \cong \overline{DM} \cong \overline{AM}$

Considero ora gli angoli α, $B\hat{A}E$ e $E\hat{A}C$

$B\hat{A}C = B\hat{A}E + E\hat{A}C = 90°$ → $E\hat{A}C = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$

Essendo $\overline{CM} \cong \overline{AM}$ il triangolo $\triangle AMC$ è isoscele quindi:

$E\hat{A}C \cong D\hat{C}A = 2\alpha - 90°$ → per ipotesi $D\hat{C}B \cong D\hat{C}A$ allora $E\hat{A}C \cong D\hat{C}A \cong D\hat{C}B$

Quindi $A\hat{C}B = 2(2\alpha - 90°) = 4\alpha - 180°$

ma posso scriverlo anche come $A\hat{C}B = 90° - \alpha$

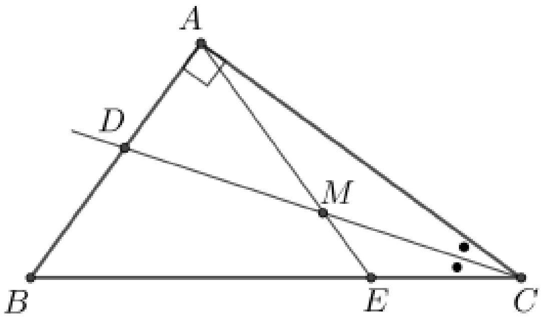
allora $4\alpha - 180° = 90° - \alpha$ → $\alpha = 54°$ da ciò $A\hat{C}B = 90° - \alpha = 36°$

Considero ora il triangolo isoscele $\overset{\triangle}{AMD}$

$D\hat{A}M \cong A\hat{D}M = 180 - 2\alpha = 72°$ ne consegue che $A\hat{M}D = 36°$

Alla luce di ciò possiamo quindi definire il triangolo $\overset{\triangle}{AMD}$ come un triangolo aureo

9) Soluzione proposta da Gaia Padrini, 2^ Liceo Scientifico Scienze Applicate sez.D, ISIS "Arturo Malignani", Udine.



Costruiamo il triangolo rettangolo ABC rettangolo in A e tracciamo la bisettrice dell'angolo in C, CD.
Il problema ci chiede di ipotizzare che il triangolo isoscele BAE abbia il lato AE passante per M dove M è il punto medio del segmento CD.

Procedimento:

- Traccio la retta per i punti B e C.
- Traccio la semicirconferenza per i punti B e C. [di diametro BC]
- Posiziono il punto A sulla semicirconferenza
- Traccio la retta che passa per i punti A e B e A e C realizzando così il triangolo rettangolo in A.
- Traccio la bisettrice dell'angolo C e trovo il punto di intersezione D tra la bisettrice e il lato AB generando il segmento CD.
- Traccio il punto medio M del segmento CD.
- Traccio il segmento AE congruente ad AB e passante per M.

a) Determinare le misure degli angoli acuti del triangolo ABC.

Procedimento:

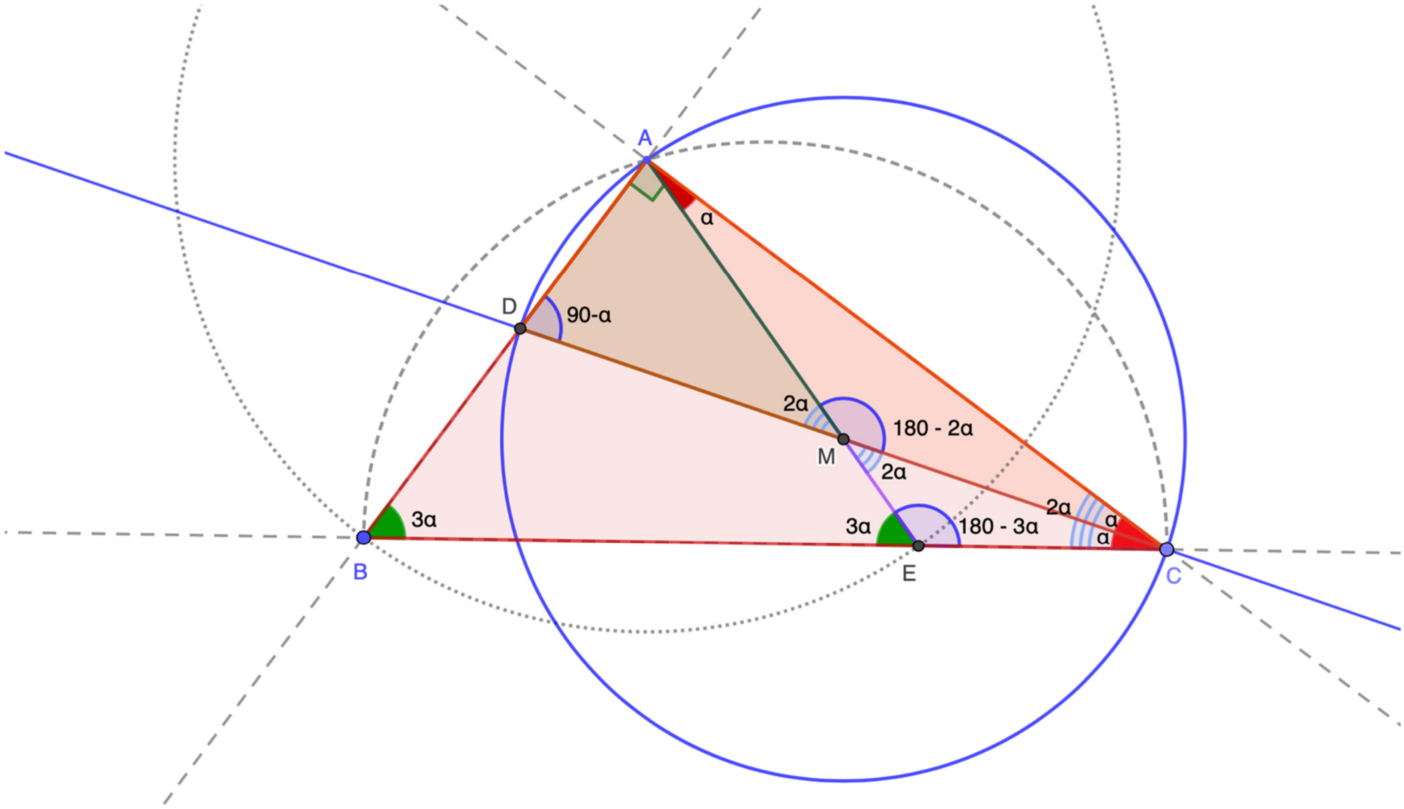
- Si traccia la circonferenza con centro in M e raggio MD. Possiamo osservare che detta circonferenza passa per il punto A in quanto CD rappresenta il diametro della circonferenza stessa ed essendo A rettangolo per costruzione, può cadere solo sulla circonferenza; questo identifica il triangolo ADM come isoscele (il segmento MA è raggio della circonferenza). [giustificazione molto debole!]
- Chiamato α l'angolo $\widehat{ACD}$ notiamo che, per il teorema degli angoli al centro e alla circonferenza, l'angolo $\widehat{AMD}$ è 2α. Per contro l'angolo $\widehat{CMA}$ è pari a $180°-2\alpha$. A questo punto abbiamo individuato l'angolo $\widehat{MAC}$ che è pari a [$180°-(180°-2\alpha)-\alpha=\alpha$] [[$180°-2\alpha+\alpha$ cioè α]] e questo determina che il triangolo ACM è isoscele con il lato CM congruente al lato MA. Ne consegue anche che MA è congruente a MD e pertanto il triangolo AMD è isoscele. [già osservato in precedenza]

- In considerazione di ciò, l'angolo $\widehat{ADM}$ è uguale a 90°– α e l'angolo $\widehat{DAM}$ è congruente all'angolo ADM.
- Per la proprietà degli angoli opposti al vertice l'angolo $\widehat{EMC}$ vale 2α. A questo punto possiamo dire che l'angolo CEM vale 180°– 3α, ne consegue che l'angolo AEB vale 3α e che l'angolo EBA
  vale anch'esso 3α in quanto è congruente ad AEB.

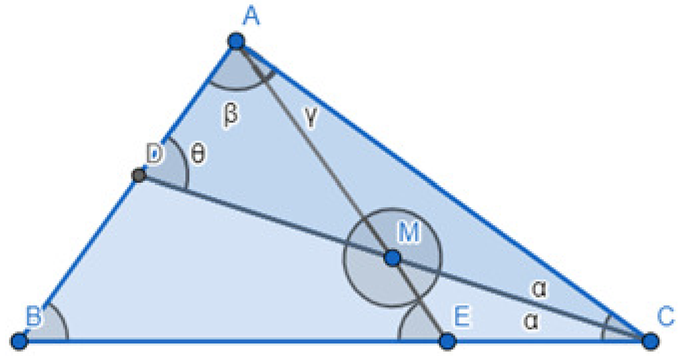
Abbiamo determinato in questa maniera il valore degli angoli acuti del triangolo rettangolo ABC riferiti ad α e possiamo scrivere 180° = 90° + 3α + 2α.
Ricaviamo α che è pari a: 90°: 5 = 18°
A questo punto l'angolo $\widehat{ACB}$ è pari a: 2α = 18°x 2 = 36°.
L'angolo $\widehat{CBA}$ è pari a: 3α = 18° x 3 = 54°.

b) Quali proprietà ha il triangolo ADM?

Il triangolo ADM è isoscele come abbiamo dimostrato: il valore dell'angolo al vertice è 36° mentre i valori degli angoli alla base sono di 72°. Questo triangolo è un triangolo "aureo" di primo tipo.
Il triangolo aureo di primo tipo è così chiamato quando gli angoli alla base hanno misura doppia rispetto alla misura dell'angolo al vertice.



10) Soluzione proposta da Francesca De Nigris,
classe 5A, Liceo scientifico Carlo Pisacane, Padula (SA)

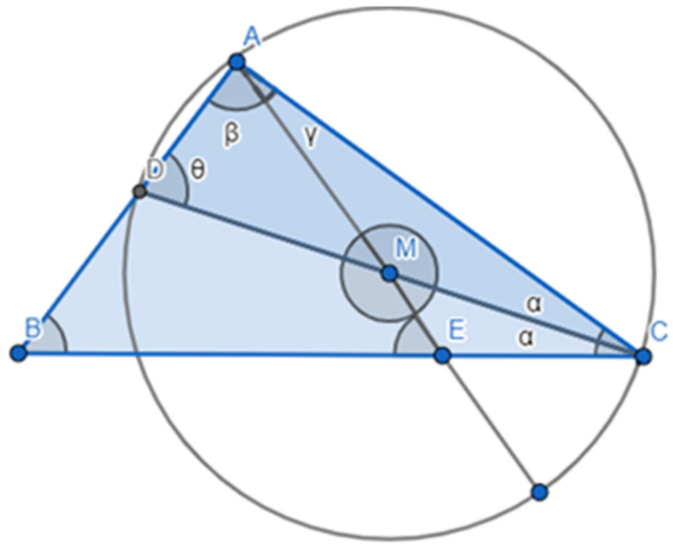


$DATI$:

BAC *triangolo rettangolo in* A;
AB *cateto minore* $\left(A\hat{B}C > A\hat{C}B\right)$;
$AB \cong AE$;
M *Punto medio di* CD;
$DM \cong MC$.

$RICHIESTA$: *misura angoli interni del triangolo rettangolo*; *proprietà triangolo* ADM.

$SVOLGIMENTO$:



BAE *triangolo isoscele poiché* $AB \cong AE$; *quindi* $A\hat{B}E \cong A\hat{E}B$.

Avremo che $2A\hat{B}E + \beta = 180$ *e* $A\hat{B}E = \frac{180-\beta}{2}$.

Consideriamo il triangolo DAC *iscritto nella circonferenza con raggio* DM *e centro in* M. [quindi AM=DM=CM perché raggi]

L'angolo α insiste sull'arco $\widehat{DA}$ e il suo angolo al centro corrispondente è $D\widehat{M}A$;
Per la proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti sappiamo che $D\widehat{M}A = 2\alpha$;
per la stessa propritrà possiamo dire che $E\widehat{M}C = 2\gamma$.
$E\widehat{M}C \cong D\widehat{M}A$ (essendo due angoli opposti al vertice) e di conseguenza $\gamma \cong \alpha$
$A\widehat{C}B = 2\alpha = 2\gamma$.
Per la stessa proprietà considerata in precedenza avremo che:
$D\widehat{M}E = 2\beta$ e $A\widehat{M}C = 2\theta$;
$D\widehat{M}E \cong A\widehat{M}C$ (essendo due angoli opposti al vertice) e di conseguenza $\beta \cong \theta$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\ ;\ \hat{A} = \beta + \gamma = 90;\ \hat{B} = A\hat{B}E = \frac{180-\beta}{2};$$

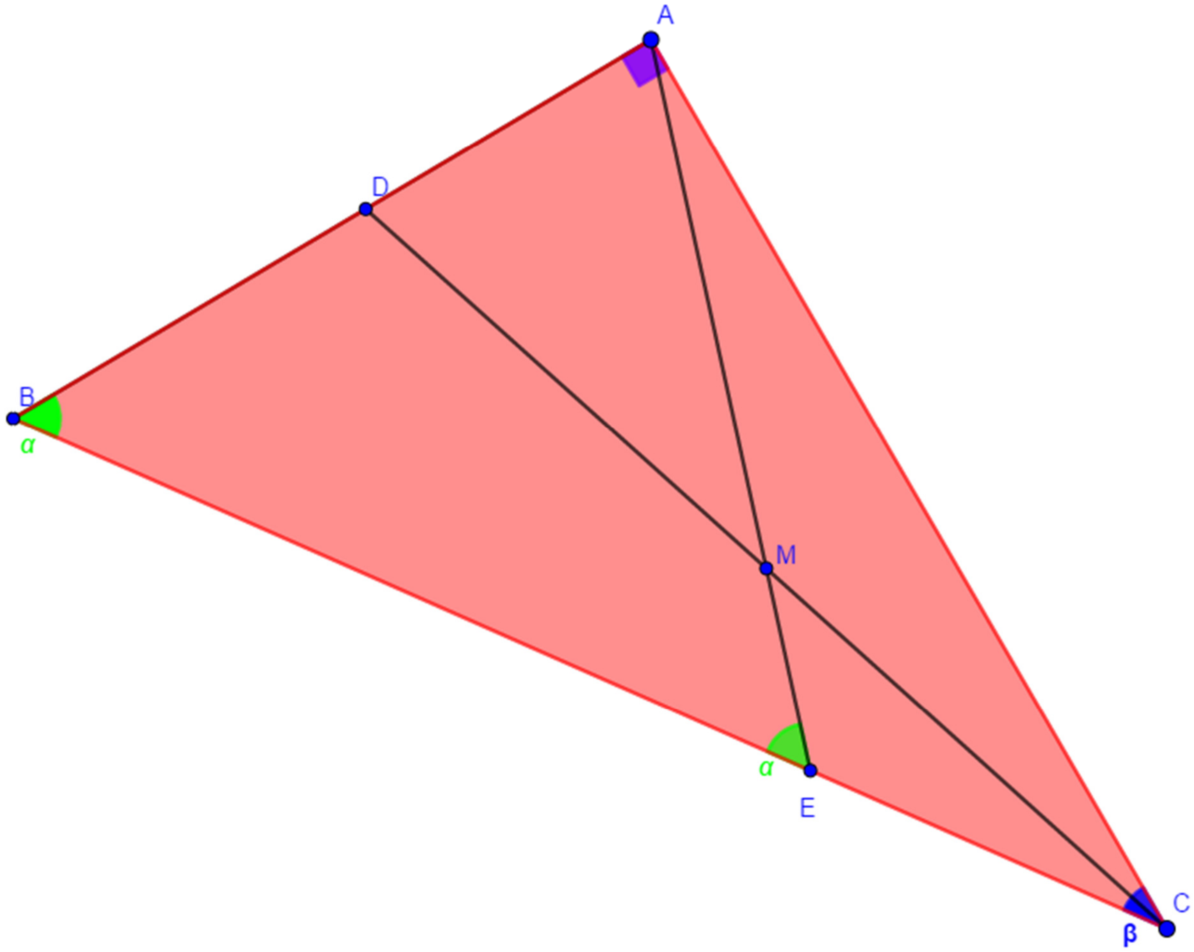
$$\hat{C} = E\widehat{M}C = 2\gamma.$$

$$\begin{cases} 90 + \dfrac{180-\beta}{2} + 2\gamma = 180 \\ \beta + \gamma = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{180-\beta}{2} + 2\gamma = 90 \\ \gamma = 90 - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} 180 - \beta + 4\gamma = 180 \\ \gamma = 90 - \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\beta + 360 - 4\beta = 0 \\ \gamma = 90 - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{360}{5} = 72 \\ \gamma = 90 - 72 = 18 \end{cases} \qquad \hat{C} = 36;\ \hat{A} = 90;\ \hat{B} = 54.$$

$\hat{B} > \hat{C}$ $54 > 36$
Il triangolo ADM ha:
gli angoli alla base congruenti ($\theta \cong \beta$);
è un triangolo isoscele e per il teorema dei triangoli isosceli avremo che $DM \cong AM$;
è un triangolo isoscele aureo poichè gli angoli alla base hanno misura doppia rispetto alla misura dell'angolo al vertice $\theta = 2D\widehat{M}A = 2(36) = 72$;
ha i due lati uguali in rapporto aureo con la base.

11) Soluzione proposta da Mario Solinas , Classe 3 L , Liceo Scientifico "G.Alessi" Perugia.



Ipotesi:

- ABC è un triangolo rettangolo in A.
- AB<AC.
- E ∈ BC.
- AB≅AE.
- CD è la bisettrice dell'angolo in C.
- M è il punto medio di DC.
- AE ∩ DC =M.

Richieste:

a) Determinare le misure degli angoli acuti del triangolo ABC.
b) Individuare le proprietà del triangolo ADM.

Risoluzione:

a) Anzitutto indichiamo , per convenzione , con $\boldsymbol{\alpha}$ **e** $\boldsymbol{\beta}$ rispettivamente gli angoli acuti **$A\hat{B}C$** e **$A\hat{C}B$ del triangolo ABC** (come illustrato in figura). Sappiamo inizialmente che , per ipotesi, AB≅AE e perciò il triangolo ABE risulta essere isoscele su base EB.
Da ciò segue che **$A\hat{B}E$ ($A\hat{B}C$)≅ $A\hat{E}B$ ≅ $\boldsymbol{\alpha}$** e **$B\hat{A}E$≅180-2$\boldsymbol{\alpha}$.**

Sappiamo inoltre che , sempre per ipotesi, CD è la bisettrice dell'angolo in C (**$A\hat{C}B$≅ $\boldsymbol{\beta}$**) e pertanto **$A\hat{C}D$≅$B\hat{C}D$≅ $\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}$.** Consideriamo ora il triangolo ADC : per ipotesi **$D\hat{A}C$≅90°**(ABC triangolo rettangolo in A) e AM è la mediana relativa ad DC (AE ∩ DC =M e M è il punto medio di DC). Il segmento DC è l'ipotenusa di tale triangolo (DC opposto a $D\hat{A}C$≅90°) , perciò per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo segue che **AM≅ $\frac{DC}{2}$ ≅ DM ≅MC.** Notiamo inoltre che il triangolo AMC risulta essere isoscele su base AC (AM≅MC per quanto detto precedentemente) e dunque otterremo **$M\hat{A}C$≅$A\hat{C}M$($A\hat{C}D$)≅ $\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}$.** Possiamo scrivere l'angolo **$B\hat{A}C$** sia come somma tra **$A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$** , sia come somma tra **$B\hat{A}E$ e $M\hat{A}C$**. Otteniamo perciò la seguente uguaglianza:

$$A\hat{B}C + A\hat{C}B \cong B\hat{A}E + M\hat{A}C \rightarrow \alpha+\beta \cong 180-2\alpha +\frac{\beta}{2} \rightarrow 3\alpha \cong 180-\frac{\beta}{2} \rightarrow \alpha \cong 60-\frac{\beta}{6}$$

Sapendo inoltre che $\alpha+\beta$ ≅ 90°($A\hat{B}C$+$A\hat{C}B$≅90°) , utilizzando l'uguaglianza precedente sostituiamo il valore di α ricavato e otteniamo:

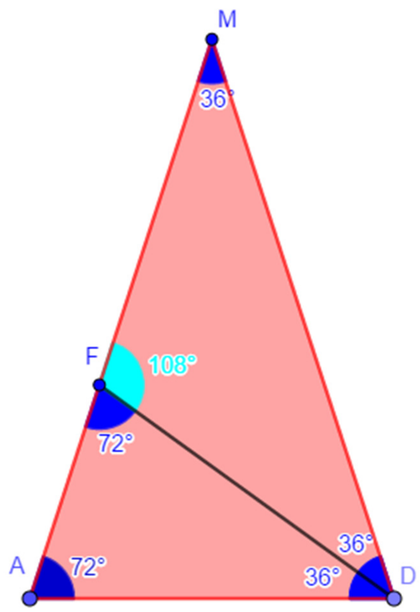
$$\alpha+\beta \cong 90° \rightarrow 60-\frac{\beta}{6}+\beta \cong 90 \rightarrow \frac{5}{6}\beta \cong 30 \rightarrow \beta \cong 36°$$

Ricaviamo infine il valore di α : $\alpha+\beta \cong 90° \rightarrow \alpha \cong 90°-\beta \rightarrow \alpha \cong 90°-36°\cong 54°$

<u>Gli angoli acuti $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ del triangolo ABC misurano dunque rispettivamente 54° e 36°.</u>

b) Dal punto a) segue che **M$\hat{A}$C≅ $\boldsymbol{\frac{\beta}{2}}$ ≅18° e D$\hat{A}$M ≅ D$\hat{A}$C- M$\hat{A}$C→ D$\hat{A}$M ≅90°-18°≅72°. Essendo inoltre il triangolo ADM isoscele su base AD** (**AM≅ DM per dimostrazione precedente**) otteniamo che **M$\hat{D}$A≅ D$\hat{A}$M ≅72° e A$\hat{M}$D ≅ 36°.** **<u>Un triangolo di questo tipo è detto aureo:</u>**

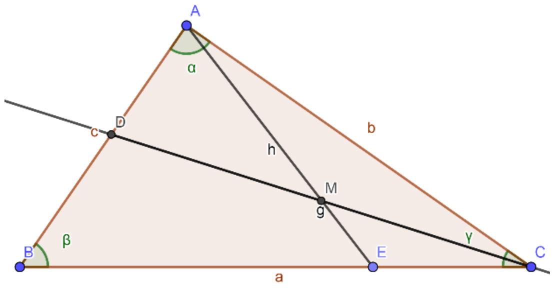
Triangolo aureo



[Quel che segue non era richiesto e viene omesso] [[…]]

12) Soluzione proposta da Giuseppe Pio Barbaro 2A, Liceo Scientifico Carlo Cafiero Barletta

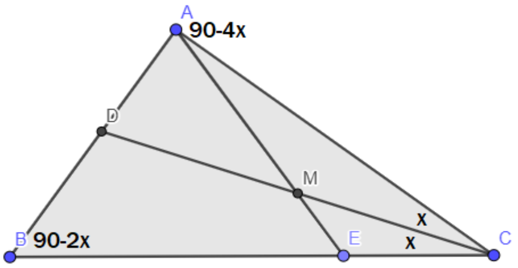
IPOTESI
ABC è un triangolo
$\alpha = 90°$
AE≅AB
$B\hat{C}D = A\hat{C}D$
DM≅CM



TESI
$\beta = ?$
$\gamma = ?$

DIMOSTRAZIONE
-Se ADC è un triangolo rettangolo e AM è la sua mediana allora $AM \cong \frac{1}{2}CD \cong DM \cong MC$
-Se $MC \cong AM$ $allora$ $M\hat{A}C \cong A\hat{C}M$
-se $AB \cong AE$ $allora$ gli $angoli$ $alla$ $base$ $sono$ $congruenti$
-se $\alpha = \beta + \gamma$ $quindi$ $\alpha + \beta + \gamma = 180 \circ$
$perch$è $somma$ di $angoli$ di un $triangolo$ $quindi$ $2\beta + 2\gamma = 180 \circ$ $poich$è $\alpha \cong \beta + \gamma$ lo $possiamo$ $ricavare$ $dalla$ $prima$ $equazione$
-$Impostiamo$ $l'equazione$ $B\hat{A}E = 180 - 2\beta$ $oppure$ $B\hat{A}E = 2\beta + 2\gamma - 2\beta = 2\gamma$
-Se $indichiamo$ $M\hat{C}A$ con $\frac{\gamma}{2}$ $allora$ $B\hat{A}C = 2\gamma + \frac{\gamma}{2}$
-$Impostiamo$ $l'equazione$ $90 \circ = \frac{5}{2}\gamma$ da cui $ricaviamo$ $\gamma = 36 \circ$
-$Impostiamo$ $l'equazione$ $\beta = \alpha - \gamma$ $quindi$ $\beta = 90 \circ - 36 \circ = 54 \circ$
-$MD \cong MA$ $quindi$ il $triangolo$ ADM è $isoscele$. [non era quello che interessava !]
C.V.D

13) Soluzione proposta da Pascuzzo Natalia,
classe 5A, Liceo Scientifico "C. Pisacane" di Padula (SA)



$Dati$:
BAC è $triangolo\ rettangolo\ in\ A$;
AB è $cateto\ minore$;
$AB \cong AE$;
$M\ punto\ medio\ di\ CD$;
$DM \cong\ MC$.
CD bisettrice dell'angolo in C.

$Richiesta$: $misura\ angoli\ interni\ del\ triangolo\ rettangolo\ BAC\ e\ propriet$à $del\ triangolo\ ADM$.

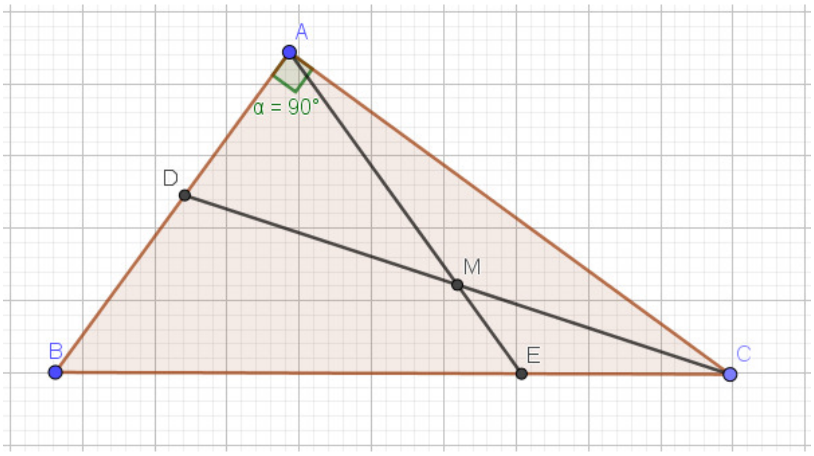
$$Svolgimento:$$
$$BAC = 90°$$
$$DAC = 90°$$
$$ABC = 180° - 90° - 2x$$
$$la\ mediana\ di\ un\ triangolo\ rettangolo\ \text{è}\ la\ met\text{à}\ dell'ipotenusa\ quindi\ in\ ADC$$
$$AM = \frac{1}{2}DC \qquad AM = DM = MC$$
$$il\ triangolo\ AMC\ \text{è}\ isoscele\ con\ base\ AC\ M\hat{A}C = M\hat{C}A = x$$
$$calcoliamo\ M\hat{A}C$$
$$ABE = AEB\ perch\text{è}\ isoscele = 90° - 2x$$
$$BAE = 180° - (90° - 2x + 90° - 2x) = 4x$$
$$allora\ MAC = 90° - 4x$$
$$ma\ \text{è}\ uguale\ anche\ ad\ x\ perch\text{è}\ AMC\ \text{è}\ isoscele\ dunque\ gli\ angoli\ alla\ base\ sono\ uguali.$$
$$90° - 4x = x \qquad 5x = 90° \qquad x = 18°$$
$$ABC = 90° - 2x = 54°$$
$$BCA = 2x = 36°$$

$$il\ triangolo\ AMD\ ha:$$
$$gli\ angoli\ alla\ base\ congruenti;$$
$$\text{è}\ un\ triangolo\ isoscele\ perch\text{è}\ DM \cong AM$$
[Non era quello che interessava !]

14) Soluzione proposta da Veronica Matteotti – cl. 2BSC – Liceo Scientifico Rosmini – Rovereto (TN)

DATI:
$B\hat{A}C$=90°
AB<AC
AB≅AE
$A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$
CM≅DM

RICHIESTE:
a) $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ = ?
b) proprietà del triangolo ADM = ?



SVOLGIMENTO a:
Noto che $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ sono complementari, perché angoli acuti di un triangolo rettangolo, quindi $A\hat{B}C + 2A\hat{C}D = 90°$ poiché CD è bisettrice di $A\hat{C}B$.
$A\hat{B}E \cong A\hat{E}B$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
AM≅CM perché AM è mediana relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo, quindi AMC è isoscele, di conseguenza $M\hat{C}A \cong M\hat{A}C$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
$B\hat{A}E = 90° - M\hat{C}A$ perché differenza di angoli.
$2\,A\hat{B}C + 90° - M\hat{C}A = 180°$ per la somma degli angoli interni del triangolo [ABE].
Ora chiamo $A\hat{B}C$ x e $A\hat{C}D$ y e metto a sistema le equazioni.

$$\begin{cases} x + 2y = 90° \\ 2x + 90° - y = 180° \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 90° - 2y \\ 2x - y = 90° \end{cases}$$

Equzione risolvente:

$$2(90° - 2y) - y = 90°$$

$$-5y = -90°$$

$$y = \frac{90°}{5} = 18°$$

$$x = 90° - 2 * 18° = 54°$$

$$A\hat{B}C = 54°$$

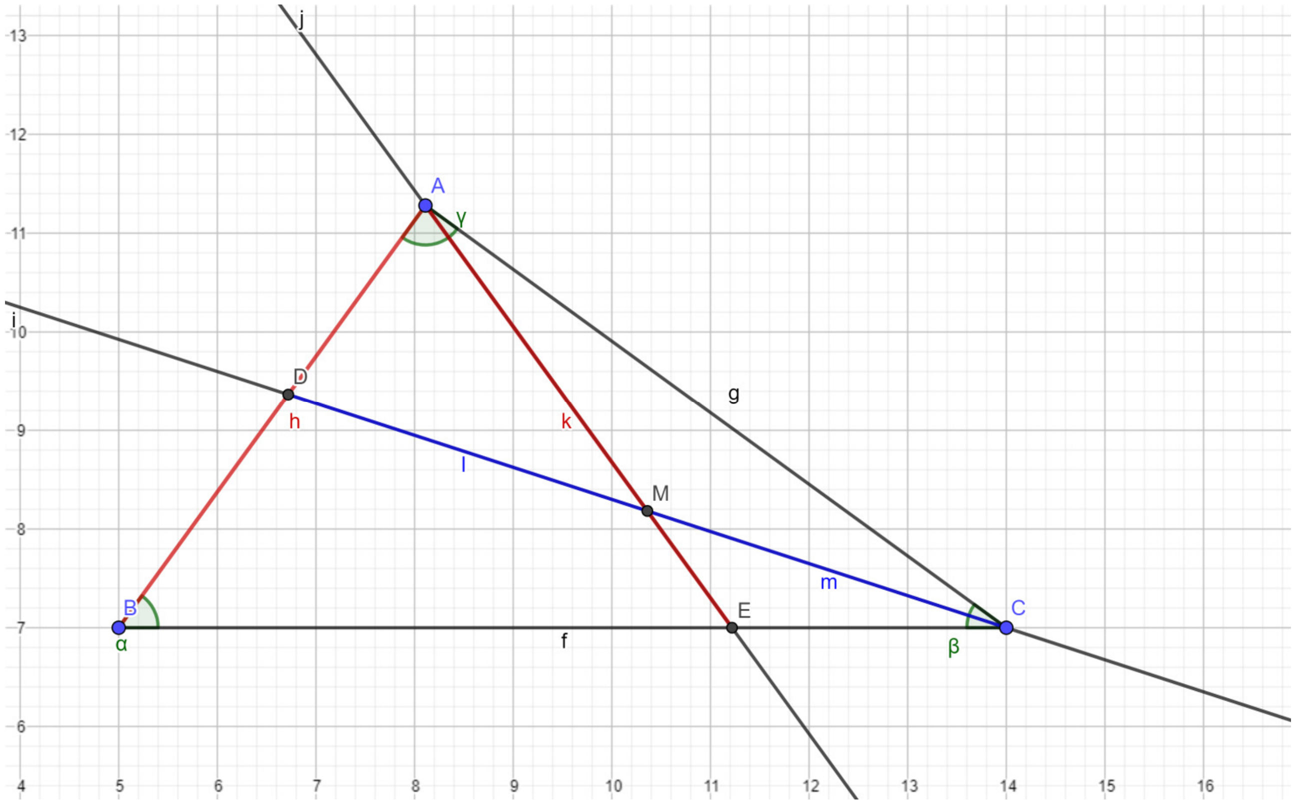
$$A\hat{C}B = 36°$$

3
RISPOSTA a:
Gli angoli acuti del triangolo ABC misurano 54° e 36°.

SVOLGIMENTO b:
AM≅DM come dimostrato prima, quindi ADM è isoscele.

RISPOSTA b:
Il triangolo ADM ha i lati AM e DM congruenti quindi è isoscele.
[Non era quello che interessava !]

15) LACERENZA GABRIELE DELLA CLASSE 2^A LICEO STATALE C. CAFIERO (SCIENTIFICO) BARLETTA



IPOTESI

$B\hat{A}C \approx 90°$

$B\hat{C}D \approx A\hat{C}D$

DM ≈ MC

$E \in BC$

AB ≈ AE

$AE \cap CD = \{M\}$

TESI

$A\hat{B}C = ?$

$B\hat{C}A = ?$

Proprietà triangolo ADM ?

[Non si doveva scrivere tutto in maiuscolo!]

a) CONSIDERIAMO IL TRIANGOLO ADC

AM MEDIANA DELL'IPOTENUSA DEL TRIANGOLO RETTANGOLO ACD PER IPOTESI

DM ≈ MC PER IPOTESI QUESTO IMPLICA CHE AM≈DM≈MC SECONDO IL TEOREMA MEDIANA RELATIVA ALL'IPOTENUSA

QUINDI CONSIDERIAMO I TRIANGOLI AMC E AMD

AM ≈MC PER LA DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE

AM≈ DM PER LA DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE

QUESTO IMPLICA CHE I TRIANGOLI AMC E AMD SONO ISOSCELI perché I DUE LATI DEI DUE TRIANGOLI SONO CONGRUENTI, SECONDO IL TEOREMA ANGOLI ALLA BASE DI UN TRIANGOLO ISOSCELE.

($M\hat{C}A \approx M\hat{A}C$ E $A\hat{D}M \approx M\hat{A}D$)

($B\hat{A}C \approx B\hat{A}E + C\hat{A}E$)= 90° E ($A\hat{D}C + B\hat{A}E + A\hat{M}D$) = 180 °

$E\hat{M}C \approx A\hat{M}D$ ANGOLI OPPOSTI ALL VERTICE

$E\hat{M}C \approx 2\, C\hat{A}E$ SECONDO TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO

$A\hat{M}D \approx 2\, C\hat{A}E$

$A\hat{M}C \approx A\hat{D}M + D\hat{A}M$ SECONDO IL SECONDO TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO

$D\hat{M}E \approx A\hat{M}C$ SECONDO IL TEOREMA DEGLI ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

$D\hat{M}A \approx 180° - 2\, A\hat{D}M$ PER COSTRUZIONE

$A\hat{M}C \approx D\hat{M}A$ [????] SECONDO IL TEOREMA DEGLI ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

CONSIDERIAMO IL TRIANGOLO BAE

BA ≈ AE PER IPOTESI SECONDO IL TEOREMA DEGLI ANGOLI ALLA BASE DI UN TRIANGOLO ISOSCELE ($A\hat{B}E \approx A\hat{E}B$)

$A\hat{E}B \approx M\hat{C}E + E\hat{M}C$ SECONDO IL SECONDO TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO

$A\hat{E}B \approx M\hat{C}E + 2\, C\hat{A}E$ ($B\hat{C}D$ ($M\hat{C}E$) ≈ $A\hat{C}D$ PER IPOTESI E $A\hat{C}D \approx C\hat{A}E$ perché ABBIAMO SCOPERTO CHE IL TRIANGOLO AMC è ISOSCELE)

$A\hat{E}B \approx 3\, C\hat{A}E$ perciò $A\hat{B}E$ ($A\hat{B}C$) ≈ 3 $C\hat{A}E$.

CONSIDERIAMO IL TRIANGOLO ABC

[ABC+ACB=90 quindi 3CAE+2CAE=90 quindi 5CAE=90 e CAE=18]

[[180 ° - ($B\hat{A}E + C\hat{A}E$)

180 ° – 90 ° = 90 ° ($A\hat{B}C$ (3 $C\hat{A}E$) + $B\hat{C}A$ (2 $C\hat{A}E$) = 5 $C\hat{A}E$)]]

$C\hat{A}E = 90° : 5 = 18°$
$A\hat{B}C = 3 \times 18 = 54°$
$B\hat{C}A = 2 \times 18 = 36°$

b) IL TRIANGOLO ADM è UN TRIANGOLO ISOSCELE perché AM è LA MEDIANA RELATIVA ALL'IPOTENUSA DEL TRIANGOLO RETTANGOLO ACD , QUINDI CONGRUENTE ALLA SUA metà E VISTO CHE PER IPOTESI SAPPIAMO CHE DM è CONGRUENTE AD MC , ALLORA AM è CONGRUENTE A MD , perciò è UN TRIANGOLO ISOSCELE. STABILITO ciò POSSIAMO ANCHE DIRE CHE HA DUE ANGOLI ALLA BASE CONGRUENTI.

[non era questa la proprietà che interessava]