FLAT*landia*

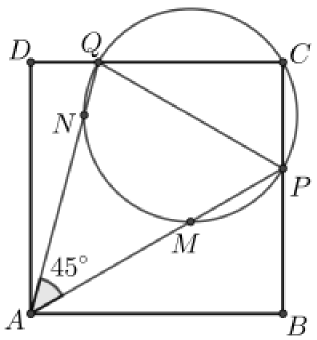
Rubrica mensile di problemi di geometria online per la scuola secondaria

Flatlandia – Problema – 6 – 27 febbraio 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 6 - 27 febbraio 2021

È dato il quadrato $ABCD$. Sul lato BC si prenda un punto P e sul lato CD un punto Q tali che $P\hat{A}Q = 45°$ (vedi figura). Tracciare la circonferenza di diametro PQ e indicare con M e N le sue intersezioni (distinte da P e Q) con AP e AQ rispettivamente.
Provare che i punti M ed N sono allineati con B e D.
Motivare la risposta.



Commento

Entro la fine Febbraio abbiamo ricevuto soltanto due risposte provenienti entrambe da licei scientifici. Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:

- ISIS - Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Malignani", Udine
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara

Il problema poneva un quesito relativo all'allineamento di quattro punti ricavati tracciando una circonferenza di diametro una "corda" del quadrato.
Le due risposte, arrivate entro febbraio, non sono completamente corrette.
Nella prima risposta si afferma, in sostanza, che se due triangoli isosceli hanno congruenti le coppie di lati congruenti, allora sono congruenti, cosa palesemente errata.
Nella seconda risposta, aldilà del metodo scelto (uso massiccio della geometria analitica con anche un po' di trigonometria), si rovesciano le richieste del testo del problema facendo vedere che i due punti fondamentali della costruzione (M ed N) appartengono alla circonferenza descritta dal testo, metodo che per essere accettato andava comunque motivato.

Successivamente, avendo lasciato aperto il problema fino al 31 maggio, sono pervenute, da parte degli stessi due studenti citati sopra, delle ulteriori versioni delle soluzioni. Anche queste soluzioni, però, confermano il nostro commento riportato sopra.
È arrivata infine, dopo febbraio, un'ulteriore proposta dal

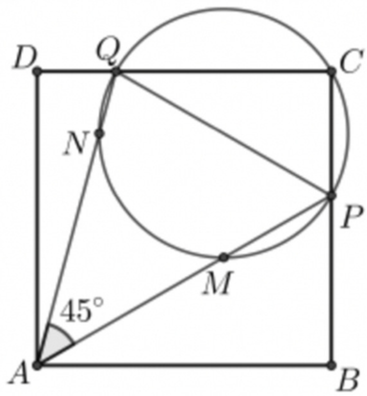
- Liceo scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU).

Questa soluzione è sostanzialmente corretta.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta da Gaia Padrini, Classe 2^D, Liceo Scientifico Scienze Applicate, ISIS “Arturo Malignani”, Udine



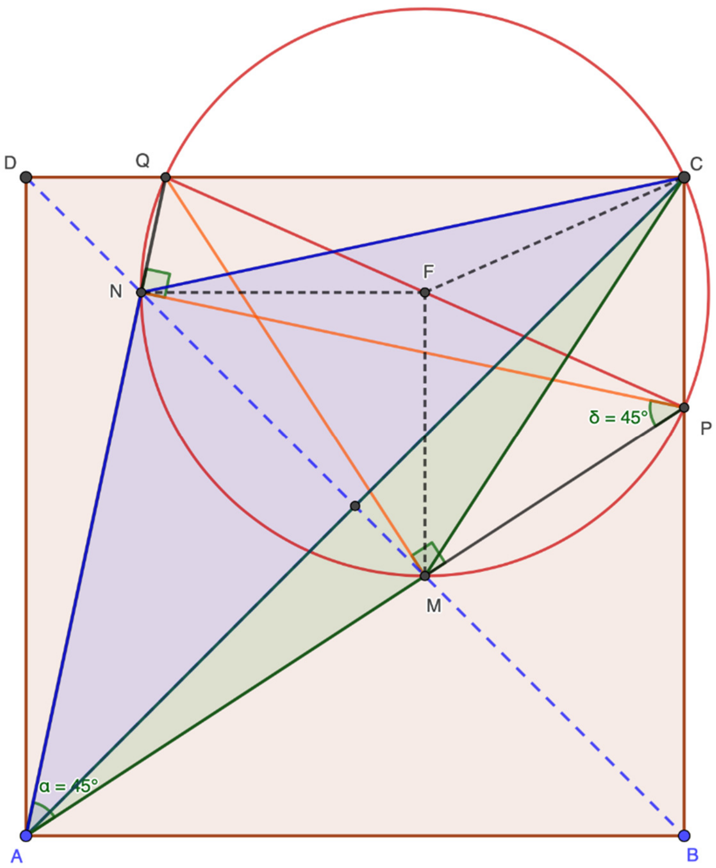
Si costruisce la figura richiesta dal problema:

1) Con il comando *poligono regolare* e si costruisce il quadrato
2) Si fissa il punto P con *punto su oggetto*
3) Si costruisce l’angolo di 45°
4) Si trova il punto Q con *intersezione*
5) Si unisce con *segmento* i punti P e Q
6) Si traccia la circonferenza di diametro PQ e centro F
7) Si trovano i punti M e N con *intersezione*

Si procede a dimostrare che i punti M ed N sono allineati con i punti B e D:

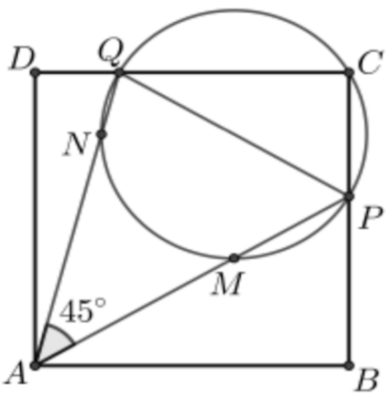
1) Si uniscono con segmento i punti P, N e M, Q: si trovano i triangoli QPN e QMP rettangoli in quanto iscritti entrambi nella semicirconferenza di diametro PQ
2) Il triangolo PNA è rettangolo isoscele perché: l’angolo $\widehat{PNA}$ è di 90°, l’angolo $\widehat{NAP}$ è dato di 45° e pertanto l’angolo $\widehat{NPA}$ è di 45°
3) Si traccino le corde NC e NP
4) Si traccino le diagonali del quadrato
5) Si evidenzi il triangolo ANC: questo triangolo è isoscele perché:
    a) Si traccino i raggi della circonferenza FC e FN, il triangolo CFN è isoscele. Il raggio FP genera il triangolo PFN anch’esso isoscele perché i lati FP e FN sono i raggi della circonferenza, di conseguenza le corde CN e NP, basi dei triangoli rispettivi, sono congruenti [i due triangoli isosceli CFN e PFN hanno le coppie di lati congruenti fra loro congruenti, in quanto raggi di una stessa circonferenza, ma questo non mi garantisce che i due triangoli siano congruenti!!!]

[[il resto viene omesso]]



2) Soluzione proposta da Emanuele Cavuta, Classe 3G, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara

Nota. Nella mia dimostrazione ho preso in considerazione i punti M ed N di intersezione [tra quali elementi della figura?] con i lati dell'angolo PAQ, mostrando che essi appartengono alla circonferenza del problema.
[Non era questo che si doveva provare. In qualche modo si rovescia il problema e allora bisognerebbe prima dimostrare l'equivalenza delle due tesi]



Q (q,a)	P (a,p)	A (0,0)
C (a,a)	D (0,a)	B (a,0)

Dove: **[[a, p e q >0]] [0<p,q<a]**

Eq. Retta DB: $x + y = a$

Eq. Retta AQ: y = $\frac{a}{q}x$

Eq. Retta AP: y = $\frac{p}{a}x$

con $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Indichiamo con O il centro della circonferenza che ha coordinate ($\frac{a+q}{2}$; $\frac{a+p}{2}$)

M è il punto di intersezione retta AP e DB:

$$\begin{cases} y = \frac{a}{q}x \\ x + y = a \end{cases} \rightarrow \qquad M\left(\frac{aq}{a+q}; \frac{a^2}{a+q}\right)$$

N è il punto di intersezione retta AQ e DB:

$$\begin{cases} y = \frac{p}{a}x \\ x + y = a \end{cases} \rightarrow \qquad N\left(\frac{a^2}{a+p}; \frac{ap}{a+p}\right)$$

Se indichiamo con x l’angolo PÂB, il coefficiente angolare della retta AP è la tg(x)
L’angolo QÂB è 45°+x, il coefficiente angolare della retta AQ è tg(x+45°).

La tg(x+45°) = $\frac{tg(x)+tg(45°)}{1-tg(x)\times tg(45°)} = \frac{1+tg(x)}{1-tg(x)}$

Perché tg(45°) = 1

e tg (x+45°) = $\frac{1+tg(x)}{1-tg(x)}$

$$\frac{a}{q} = \frac{1+\frac{p}{a}}{1-\frac{p}{a}} \rightarrow \frac{a}{q} = \frac{a+p}{a-p} \rightarrow q = \frac{a(a-p)}{a+p}$$

Oppure

$$p = \frac{a(a-q)}{a+q}$$

Dalla determinazione analitica dei punti M e N, si deduce che M e N sono punti della retta DB.

Sarà necessario dimostrare che M e N appartengano alla circonferenza.

A tale scopo bisognerà dimostrare che:

$$\overline{OM} = \overline{ON} \qquad \leftrightarrow \qquad \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2$$

$$\overline{OM}^2 = (x_m - x_o)^2 + (y_m - y_o)^2 = \left[\frac{aq}{a+q} - \frac{a+q}{2}\right]^2 + \left[\frac{a^2}{a+q} - \frac{a+p}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{2aq-(a+q)^2}{2(a+q)}\right]^2 + \left[\frac{a^2}{a+q} - \frac{a+\frac{a(a-q)}{a+q}}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{2aq-a^2-2aq-q^2}{2(a+q)}\right]^2 + \left[\frac{a^2}{a+q} - \frac{a^2+aq+a^2-aq}{2(a+q)}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{-(a^2+q^2)}{2(a+q)}\right]^2 + \left[\frac{2a^2-2a^2}{2(a+q)}\right]^2 =$$

$$= \frac{(a^2+q^2)^2}{4(a+q)^2}$$

$$\overline{ON}^2 = (x_n - x_o)^2 + (y_n - y_o)^2 = \left[\frac{a^2}{a+p} - \frac{a+q}{2}\right]^2 + \left[\frac{ap}{a+p} - \frac{a+p}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{a^2}{a+\frac{a(a-q)}{a+q}} - \frac{a+q}{2}\right]^2 + \left[\frac{a\frac{a(a-q)}{a+q}}{a+\frac{a(a-q)}{a+q}} - \frac{a+\frac{a(a-q)}{a+q}}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{a^2}{\frac{a^2+aq+a^2-aq}{a+q}} - \frac{a+q}{2}\right]^2 + \left[\frac{a^2(a-q)}{a+q} \times \frac{a+q}{a^2+aq+a^2-aq} - \frac{2a^2}{2(a+q)}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{a^2(a+q)}{2a^2} - \frac{a+q}{2}\right]^2 + \left[\frac{a^2(a-q)}{2a^2} - \frac{a^2}{a+q}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{a^2(a+q)-a^2(a+q)}{2a^2}\right]^2 + \left[\frac{a^2-q^2-2a^2}{2(a+q)}\right]^2 =$$

$$= \frac{(a^2+q^2)^2}{4(a+q)^2}.$$

$$\overline{OP}^2 = \left(x_p - x_o\right)^2 + \left(y_p - y_o\right)^2 \qquad \text{con } p = \frac{a(a-q)}{a+q}$$

$$\left[a - \frac{a+q}{2}\right]^2 + \left[p - \frac{a+p}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{2a-a-q}{2}\right]^2 + \left[\frac{a(a-q)}{a+q} - \frac{a+\frac{a(a-q)}{a+q}}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{a-q}{2}\right]^2 + \left[\frac{a^2-aq}{a+q} - \frac{a^2+aq+a^2-aq}{2(a+q)}\right]^2 =$$

$$= \frac{(a-q)^2}{4} + \frac{(2a^2-2aq-2a^2)^2}{4(a+q)^2} =$$

$$= \frac{[(a-q)(a+q)]^2+4a^2q^2}{4(a+q)^2} = \frac{(a^2-q^2)^2+4a^2q^2}{4(a+q)^2} = \frac{a^4+q^4-2a^2q^2+4a^2q^2}{4(a+q)^2} =$$

$$= \frac{(a^2+q^2)^2}{4(a+q)^2}.$$

[Abbiamo lasciato i calcoli, che sono sostanzialmente corretti, ma vale l’osservazione iniziale!!!]

SOLUZIONI ARRIVATE DOPO FEBBRAIO

1 bis) Soluzione di Gaia Padrini rivista (solo la 2^ parte),
2^ Liceo Scientifico Scienze Applicate sez.D, ISIS "ARTURO MALIGNANI", UDINE.
In questo supplemento di risposta viene ribadito l'errore già presente nella risposta inviata entro febbraio. Riportiamo solo questo punto:

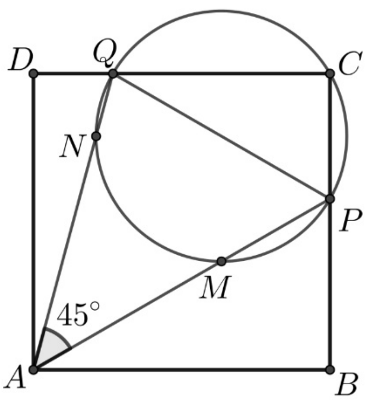
a. Si traccino i raggi della circonferenza FC e FN, il triangolo CFN è isoscele. Il raggio FP genera il triangolo PFN anch'esso isoscele perché i lati FP e FN sono i raggi della circonferenza, di conseguenza le corde CN e NP, basi dei triangoli rispettivi, sono congruenti congruenti [i due triangoli isosceli CFN e PFN hanno le coppie di lati congruenti fra loro congruenti, in quanto raggi di una stessa circonferenza, ma questo non mi garantisce che i due triangoli siano congruenti!!!]

[[il resto viene omesso]]

2 bis) Soluzione di Emanuele Cavuta rivista (solo la 2^ parte), classe 3G, Liceo Scientifico Galilei Pescara
[[omessa….]] In questo supplemento di risposta si dimostra una cosa che in realtà il testo del problema assolutamente non richiedeva.

3) Soluzione proposta da Margherita Zucchelli – 3D – Liceo scientifico "Barsanti e Matteucci" – Viareggio (LU)

[Riportiamo qui di seguito la terza soluzione arrivata (dopo febbraio ed entro il 31 maggio). La soluzione è corretta. Abbiamo solo aggiunto un'osservazione e la punteggiatura…]



IPOTESI
ABCD è un quadrato
P appartiene a CB e Q appartiene a DC
$\angle PAQ = 45°$
M appartiene a PA e alla circonferenza di diametro PQ
N appartiene a QA e alla circonferenza di diametro PQ
TESI
M e N allineati con D

[Dimostrazione]

$\angle QPN \cong \angle QMN$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

$\angle QMA$ retto perché supplementare di QMP, che è retto poiché è un angolo alla circonferenza che insiste sul diametro PQ.

$\angle ADC$ retto per definizione di quadrato.

Quadrilatero DQMA inscrivibile in una circonferenza perché angoli opposti supplementari.

$\angle MAQ \cong \angle MDQ$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco,

$\angle MDQ = 45°$.

[Aggiunta: Quindi poiché $\angle BDC = 45°$, il punto M appartiene alla diagonale BD].

Analogamente si dimostra che N è allineato con D e B.