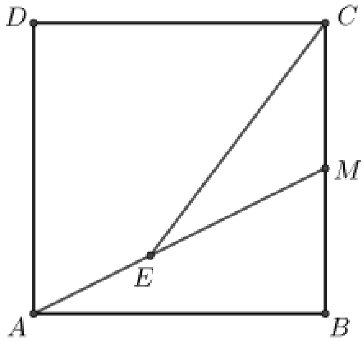
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 1 - 22 dicembre 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Dato il quadrato $ABCD$, sia M il punto medio del lato BC ed E il punto sul segmento AM in modo che CE sia congruente al lato del quadrato.
Determinare l'ampiezza dell'angolo $A\hat{E}D$ (vedi figura).
Motivare la risposta.



Commento

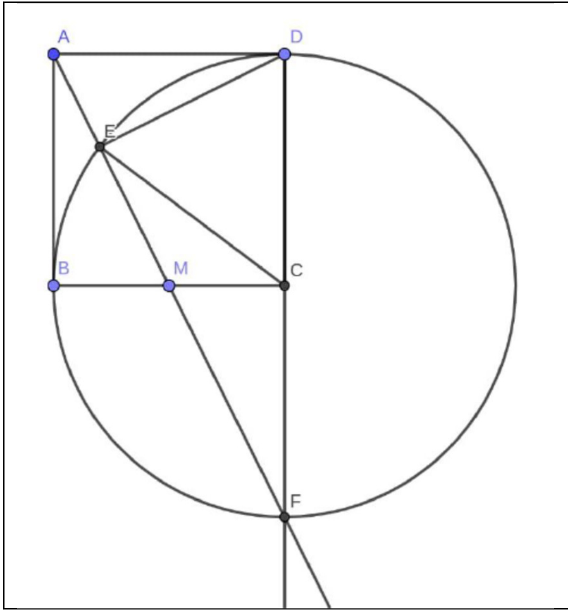
Abbiamo ricevuto cinque risposte, tutte da classi (seconde, terze e quarte) di Licei Scientifici.
Il problema poneva un quesito relativo a un angolo, ottenuto a partire da un quadrato, in cui si chiedeva di determinarne l'ampiezza.
Tutti hanno determinato che l'angolo richiesto era retto e ne hanno dato una dimostrazione convincente, ricorrendo chi al teorema di Talete, chi alle proprietà delle rette parallele tagliate da una trasversale e chi alla proprietà degli angoli inscritti in una semicirconferenza di essere angoli retti.

Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "A.Pacinotti", Cagliari
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "G. Brotzu", Quartu S.E. (CA)
- Liceo "Augusto Righi", Roma
- Liceo Scientifico "A. Rosmini", Rovereto (TN)

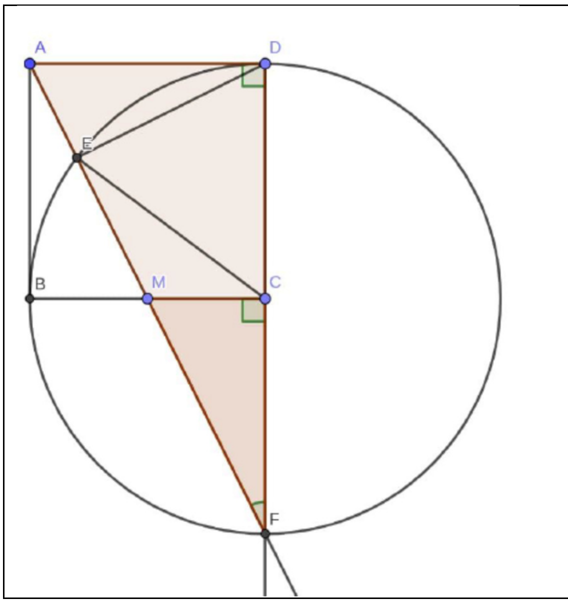
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Marco Egidio Pusceddu, 4H, Liceo Scientifico statale "A. Pacinotti", Cagliari



Poiché CE=CD=CB, posso disegnare una circonferenza di centro C e raggio CE passante per i punti E, D, B. Prolungo poi i segmenti DC e AM e chiamo l'intersezione tra le rette contenenti i due segmenti F.

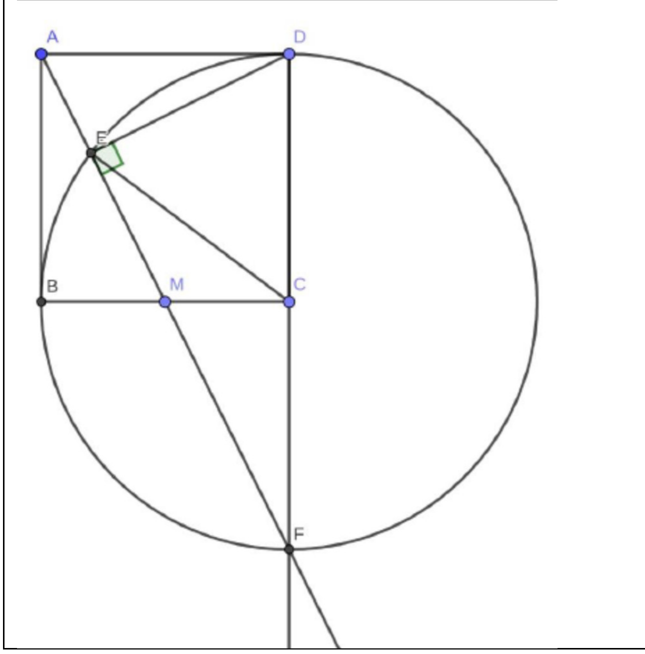


Ora notiamo che gli angoli ADC e MCF sono uguali e misurano 90°. L' angolo CFM invece è comune ai triangoli ADF e MCF. Questi hanno 2 angoli ordinatamente uguali, e pertanto sono simili per il primo criterio.

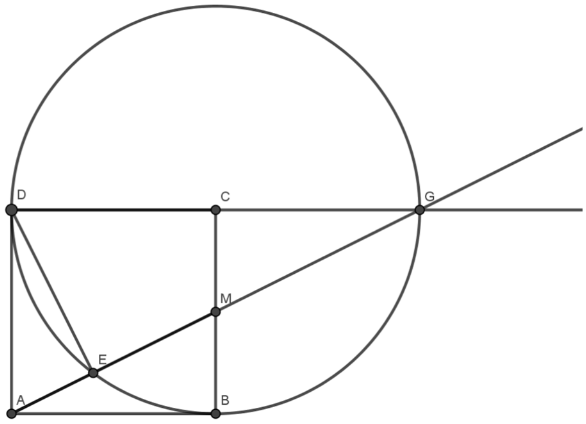
Posso quindi scrivere che AD:MC=DF:CF.

Poiché AD è 2 volte MC in quanto M è il punto medio di BC che è uguale ad AD, ottengo DF=2CF.

Per il fatto che DF=CF+CD=2CF, segue che CF=CD, ovvero CF è un raggio della circonferenza e F appartiene alla circonferenza.

	Una volta constatato che F appartiene alla circonferenza è vero anche che DF è un diametro della circonferenza, ma quindi l'angolo FED, che è un angolo alla circonferenza che insiste sul diametro, è retto. L' angolo AED, supplementare di FED, misura quindi anch'esso 90°.

2) Soluzione proposta dalla classe 3B del Liceo Scientifico internazionale "Aristosseno" di Taranto



Per individuare il punto E sul segmento AM, che congiunge il vertice A del quadrato col punto medio M del lato BC in modo che CE sia congruente al lato del quadrato, tracciamo la circonferenza avente centro in C e raggio congruente a CB. Prolunghiamo poi il lato DC dalla parte di C e prolunghiamo il segmento AM dalla parte di M. Indichiamo con G il punto comune a queste due semirette.

Essendo AD e BC perpendicolari a DG, esse sono parallele e quindi nel triangolo rettangolo ADG il segmento CM è parallelo ad AD. I triangoli [corrige: MCG e ADG] [[errata: ADG e MCG]] sono simili (I criterio di similitudine; i triangoli sono rettangoli hanno l'angolo acuto di vertice G in comune) e il loro rapporto di similitudine è 1/2 perché CM =1/2AD. Sarà allora CG =1/2DG, e quindi DG è il diametro della circonferenza tracciata. Il segmento EC, raggio della stessa circonferenza, nel triangolo DEG è la mediana relativa all'ipotenusa-diametro DG, ed essendo appunto EC=1/2DG, il triangolo DEG è rettangolo in E (inscritto nella semicirconferenza di diametro DG). L'angolo $D\hat{E}G$ è retto e l'angolo $A\hat{E}D$ essendo adiacente all'angolo retto $D\hat{E}G$ è anch'esso un angolo retto.

3) Soluzione proposta da Alberto Giacalone, 4^SC Liceo Scientifico "G. Brotzu", Quartu S.E. (CA)

Ipotesi:

ABCD è un quadrato

BM≅MC

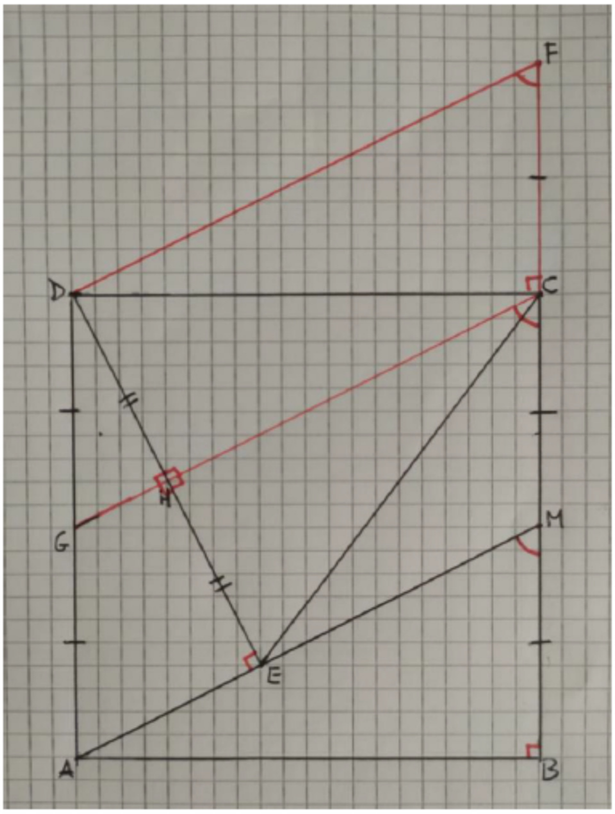
CE≅CD

Tesi:

$A\hat{E}D=?$

Risoluzione:

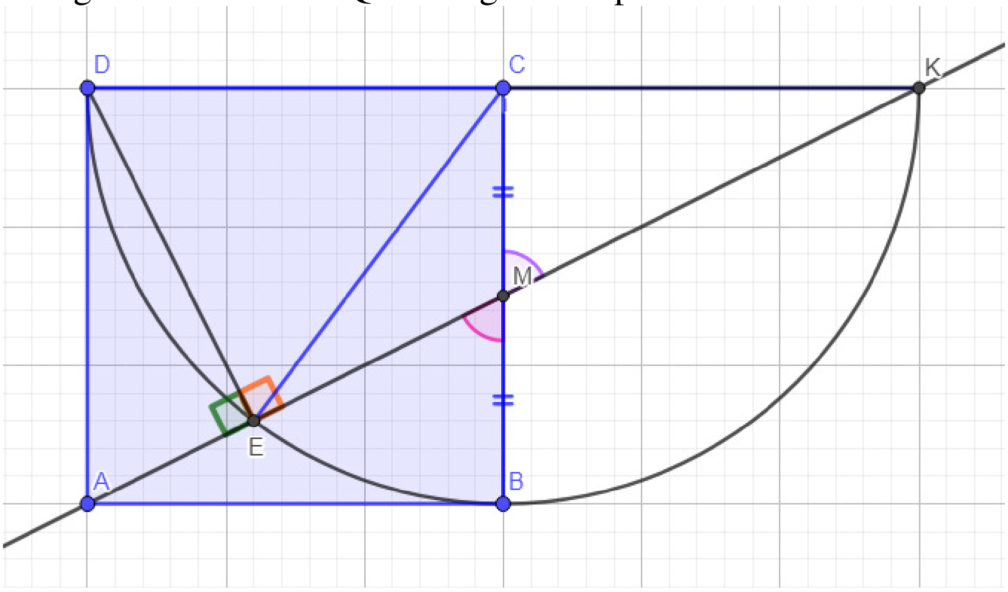
Costruiamo il triangolo DCF congruente al triangolo ABM. Essendo i due triangoli congruenti avremo $D\hat{F}C \cong A\hat{M}B$ e dunque, avendo angoli corrispondenti congruenti rispetto alla trasversale BF, DF//AM. Tracciamo ora per C la retta CH//DF//AM che incontri AD nel punto G. Avendo CF≅BM≅CM per costruzione, avremo DG≅GA e DH≅HE per il teorema di Talete essendo FM, DA e DE trasversali del suddetto fascio di parallele. Essendo CE≅CD per ipotesi avremo inoltre che il triangolo DCE sarà isoscele e che, di conseguenza, la mediana CH di DE sarà anche altezza del triangolo stesso, ovvero avremo $C\hat{H}E \cong \pi/2$. Essendo CH//AM per costruzione avremo infine, essendo DE una loro trasversale, $A\hat{E}D \cong C\hat{H}E \cong \pi/2$ in quanto alterni interni.



c.v.d.

4) Soluzione proposta dalla Classe 2M (vedi sotto), Liceo "Augusto Righi", Roma

L'angolo $D\hat{E}A$ è retto. Qui di seguito è riportata la dimostrazione:



HP/ $AB \cong BC \cong CD \cong DA$
$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$
$BM \cong MC$
$CE \cong CB$
A, E e M sono allineati tra loro

TH/ $A\hat{E}D \cong 90°$

Sia K il punto di intersezione tra la retta AM e il prolungamento del lato CD.
I triangoli ABM e MCK sono congruenti per il [corrige: secondo] [[errata: primo]] criterio di congruenza dei triangoli perché:

- Entrambi rettangoli (per ipotesi);
- $MB \cong CM$ (per ipotesi);
- $E\hat{M}B \cong C\hat{M}K$ perché opposti al vertice.

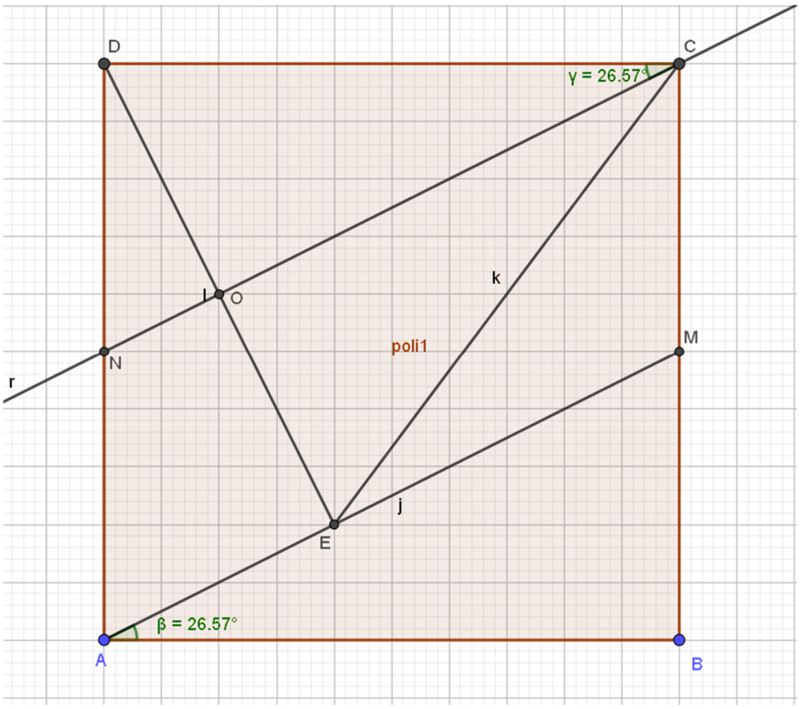
Pertanto hanno tutti gli elementi congruenti e in particolare $CK \cong AB$.
I punti D, E e B sono equidistanti dal vertice C del quadrato, pertanto appartengono alla circonferenza di centro C e raggio uguale al lato CD del quadrato [anche il punto K appartiene a tale circonferenza essendo CK ≅ AB ≅ CD].
Il triangolo DEK è inscritto nella semicirconferenza (di centro C e di diametro DK) quindi è un triangolo rettangolo in $\hat{E}$**.**
L'angolo $A\hat{E}D$ è supplementare dell'angolo retto $D\hat{E}K$ e quindi è retto.

Classe 2M Liceo Augusto Righi, Roma
Accettella Andrea
Baldazzi Adriano
Barbaranelli Leonardo

Bertini Valeria
Borgia Sofia
Bossù Tommaso
Carlevaro Benedetta
Cutillo Ottavia
Datti Lorenzo
De Oliveira Leonardo
Draghetti Giulio
Emanuele Benedetto
Iacovella Alice
Malagisi Cristina
Morabito Matteo
Pampanini Flavia
Pesce Caterina
Picano Greta
Preziosi Marta
Savini Alessandro
Serpella Jovan
Sgueglia Francesco
Soccodato Davide
Tursi Carlotta
Vesprini Tommaso

16 dicembre 2020

5) Soluzione proposta da Veronica Matteotti, cl. 2B SC – Liceo Scientifico "A. Rosmini", Rovereto (TN)



DATI:
ABCD quadrato,
BM ≅ CM,
CE ≅ AB ≅ BC ≅ CD ≅ AD

RICHIESTA:
ampiezza $A\hat{E}D$ = ?

SVOLGIMENTO:
Costruzione: traccio il segmento DE e la retta r che con CD forma un angolo congruente a $B\hat{A}M$ e che interseca DE in O e AD in N.
Considero i triangoli ABM e CDN; essi hanno:
$B\hat{A}M \cong D\hat{C}N$ per costruzione, AB≅CD perché lati di un quadrato, $A\hat{B}M \cong C\hat{D}N$ perché angoli di un quadrato.
Quindi ABM e CDN sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.
In particolare $C\hat{N}D \cong A\hat{M}B$ e DN ≅ BM perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.
$A\hat{M}B \cong D\hat{A}E$ perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele AD e BC (parallele perché lati di un quadrato) tagliate dalla trasversale AM.
$C\hat{N}D \cong D\hat{A}E$ per la proprietà transitiva
AM ∥ CN perché tagliate dalla trasversale AD formano angoli corrispondenti congruenti.
BM ≅ 1/2BC per ipotesi, quindi DN ≅ 1/2AD perché congruente a BM.
AN ≅ DN perché metà del segmento.
DO ≅ EO per il piccolo teorema di Talete, infatti, se si considerano le rette parallele CN e AM e quella che passa per D parallela alle altre due e le trasversali AD e DE, si ha che a segmenti congruenti sulla prima trasversale, AN e DN, corrispondono segmenti congruenti sulla seconda.
Quindi CO è mediana di CDE, CDE è un triangolo isoscele perché ha due lati congruenti, CE≅CD.
La mediana di un triangolo isoscele è anche altezza e bisettrice quindi $C\hat{O}D \cong C\hat{O}E \cong 90°$.
$C\hat{O}E \cong A\hat{E}D$ perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele CN e AM tagliate dalla trasversale DE.
$A\hat{E}D \cong 90°$ per la proprietà transitiva.

RISPOSTA:
L'ampiezza dell'angolo $A\hat{E}D$ è 90°.