FLAT*landia*

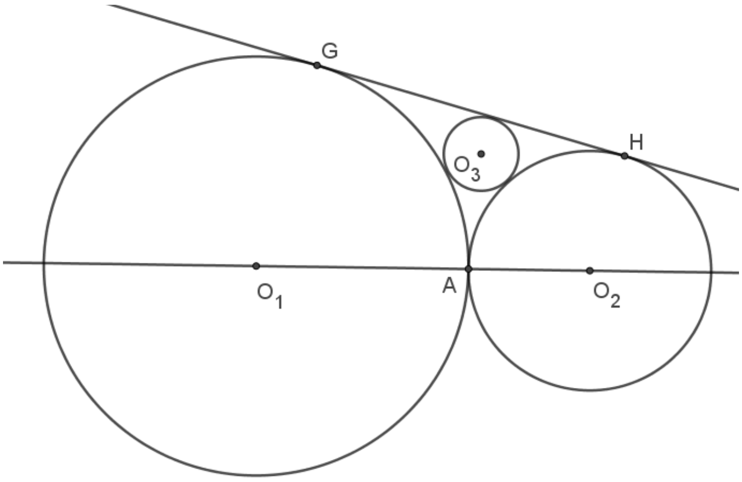
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 11 – 25 novembre 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema
Siano date due circonferenze tangenti esternamente, di raggi a e b. Presa una retta tangente comune alle due circonferenze, non passante per il loro punto di tangenza, si consideri la circonferenza tangente a questa retta e alle due circonferenze iniziali (vedi figura). Detto c il suo raggio, provare che:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

Motivare la risposta.



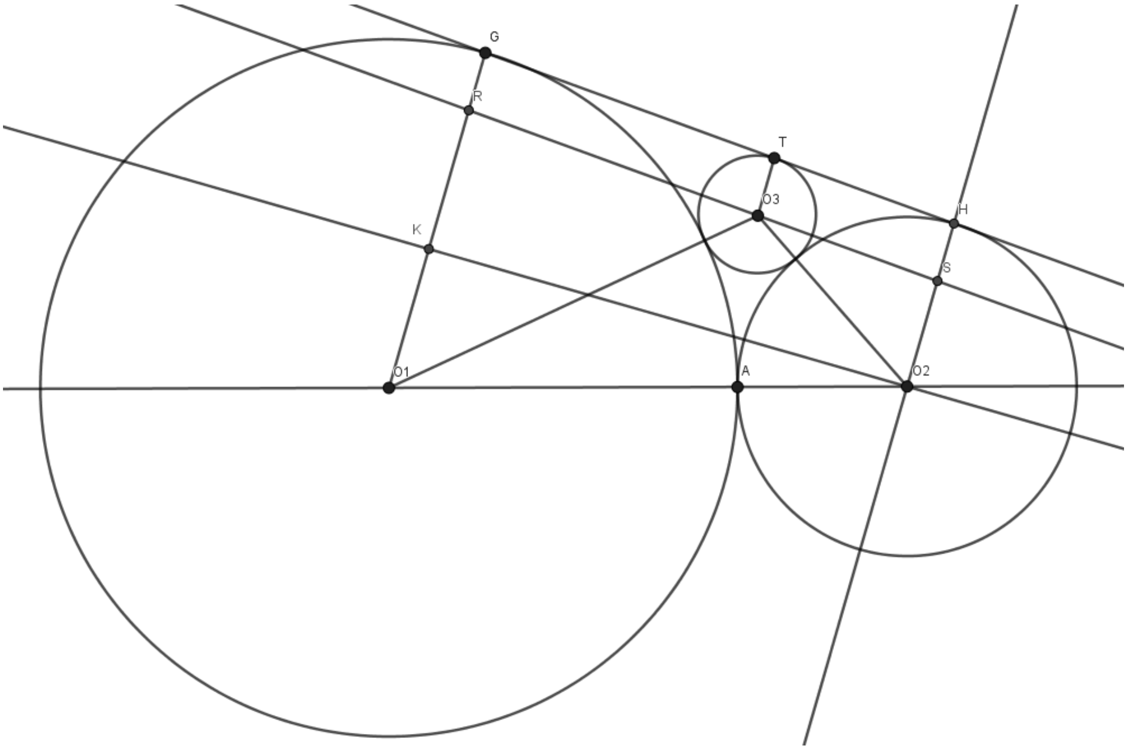
Commento
Sono arrivate tre risposte.
Il problema riguardava tre circonferenze a due a due tangenti esternamente e tangenti ad una stessa retta in tre punti distinti (vedi figura). L'unico quesito proposto chiedeva di provare una relazione tra i raggi di queste tre circonferenze.
Le risposte giunte risolvono tutte il problema in maniera corretta, usando opportunamente il teorema di Pitagora.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BT)
- Liceo Scientifico "A. Roiti", Ferrara

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta dalla classe 2^ B indirizzo Scientifico Internazionale Liceo Aristosseno Taranto



I segmenti O1G , O2H e O3T sono paralleli fra loro perché la retta del segmento HG è tangente alle tre circonferenze e perciò gli angoli che essa forma coi raggi O1G, O3T e O2H sono retti . Tali angoli sono corrispondenti delle rette dei tre raggi O1G, O2H e O3T e poiché essi sono congruenti le tre rette sono parallele a due a due (per il criterio di parallelismo). Il quadrilatero O1GHO2 è un trapezio rettangolo e la misura della sua altezza GH , congruente ad O2K, si può determinare grazie al teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo O1KO2 :

GH =O2K= $\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$

(qui ricordiamo che se le circonferenze sono tangenti esternamente a due a due, la distanza fra I loro centri è uguale alla somma dei rispettivi raggi e quindi O1O2=*a*+*b*, O1O3 = *a*+*c* e O2O3 =*b*+*c*)

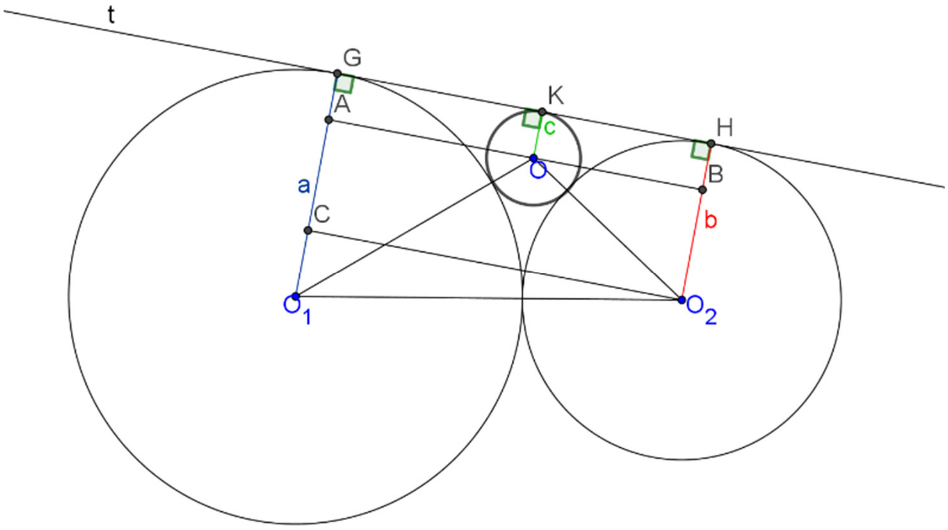
Anche i quadrilateri O1GTO3 e O2HTO3 sono trapezi rettangoli e le loro altezze TG e TH , rispettivamente congruenti a O3R e O3S , hanno per somma il segmento RS che è congruente a GH perché il quadrilatero GRSH è un rettangolo .Calcoliamo allora le misure dei segmenti O3R e O3S applicando il teorema di Pitagora ai triangoli O1RO3 e O2SO3 :

O3R = $\sqrt{(a+c)^2-(a-c)^2} = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$

O3S = $\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2} = \sqrt{4bc} = 2\sqrt{bc}$

Essendo GH = RS = O3R+O3S si ha $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$ e dividendo ambo i membri di questa uguaglianza per $2\sqrt{abc}$ si ottiene : $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ che è quanto si voleva provare.

2) Soluzione proposta da Francesco Nardiello, Classe 2^C, Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta



Hp: OK$= c$

$O_1G = a$
$O_2H = b$
t tangente α,β,γ

Th: $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$

Dimostrazione:

$O_1\widehat{G}K = 90°$ x rette tangenti ad una circonferenza

$O_2\widehat{H}K = 90°$ x rette tangenti ad una circonferenza $\xRightarrow[\text{x segmenti perpendicolari alla stessa retta}]{}$ O_1G // O_2H // OK

$O\widehat{K}G = 90°$ x rette tangenti ad una circonferenza

1. Sia OA ⊥ O_1G quindi il triangolo AOO_1 è rettangolo , per il t. di Pitagora :

AO$= \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} \xRightarrow[x\ semplificazione]{} AO = 2\sqrt{ac}$

2. Sia OB ⊥ O_2H quindi il triangolo BOO_2 è rettangolo, per il t. di Pitagora

OB$= \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2} \xRightarrow[x\ semplificazione]{} OB = 2\sqrt{bc}$

1. e 2. $\xRightarrow[x\ somma]{}$ AB$= AO + OB = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$

$AO \cong GK$

[$GKOO_1$ **e** KHO_2O][[GHOO$_1$eKHOO$_2$]] trapezi rettangoli $\xrightarrow[x\ somma]{} GH \cong AB = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$

$$BO \cong HK$$

$$GH \cong CO_{2\ x\ altezze\ del\ trapezio}$$

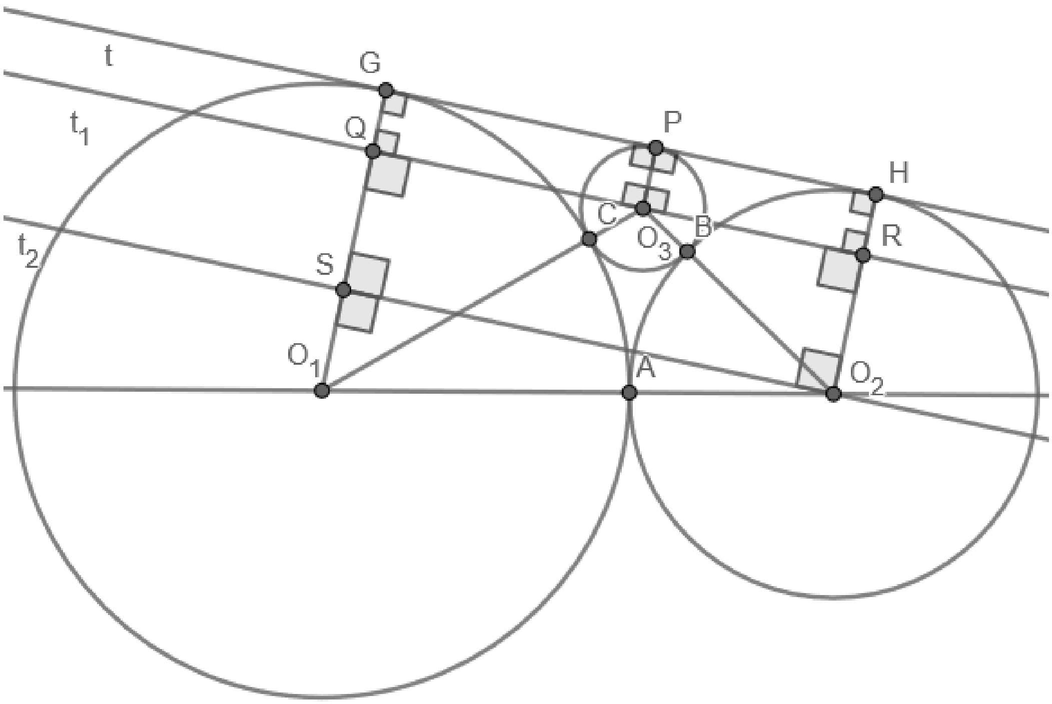
[GHO_2O_1] [[GHO$_1$O$_2$]] trapezio rettangolo $GH = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$ x dim $\xrightarrow[x\ prop\ trans]{} 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$

$$CO_2 = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab} \quad x\ t.\ di\ Pitagora$$

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \xrightarrow[dividendo\ per\ 2\sqrt{abc}]{} : \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

C.V.D.

3)Soluzione proposta da Francesco Lugli, Classe 2U, Liceo Scientifico "A. Roiti", Ferrara



"Scaletta" della dimostrazione:

1. Considerazioni iniziali e costruzione
2. Dimostrazione della relazione $\overline{QO_3}=2\sqrt{ac}$
3. Dimostrazione della relazione $\overline{RO_3}=2\sqrt{bc}$
4. Dimostrazione della relazione $QR=2(\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$
5. Dimostrazione della relazione $\overline{SO_2}=2\sqrt{ab}$
6. Dimostrazione della relazione $\overline{SO_2}=\overline{QR}$
7. Conclusione della dimostrazione

1) Si noti innanzitutto che l'equazione $\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$ è equivalente a $\sqrt{ab}=\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ (questa viene ottenuta moltiplicando entrambi i termini per $\sqrt{abc}$) e pertanto dimostrare quest'ultima relazione soddisferebbe i requisiti del problema.

Definisco O_1 il centro della circonferenza di raggio a, O_2 il centro della circonferenza di raggio b, O_3 il centro della circonferenza di raggio c.

Sia t la retta tangente esternamente alle tre circonferenze, chiamo G, H e P i punti di tangenza di t con rispettivamente la circonferenza di centro O_1 , quella di centro O_2 e quella di centro O_3.

Gli angoli $O_1\hat{G}P$, $O_2\hat{H}P$, $O_3\hat{P}G$ e $O_3\hat{P}H$ sono retti perché t è tangente alle circonferenze per ipotesi.

Traccio le rette t_1 e t_2 parallele a t e passanti rispettivamente per O_3 e O_2.

Chiamo Q l'intersezione della retta t_1 con il segmento O_1G e R l'intersezione della retta t_1 con il segmento O_2H.
Chiamo S l'intersezione della retta t_2 con il segmento O_1G

2) Gli angoli $G\hat{Q}O_3$ e $Q\hat{G}P$ sono supplementari perché coniugati interni formati dalle rette parallele t e t_1 tagliate dalla trasversale QG; dato che $Q\hat{G}P$ è retto, lo è anche $G\hat{Q}O_3$.
Gli angoli $P\hat{O}_3Q$ e $O_3\hat{P}G$ sono supplementari perché coniugati interni formati dalle rette parallele t e t_1 tagliate dalla trasversale O_3P; dato che $O_3\hat{P}G$ è retto, lo è anche [Q al posto di G] [[$P\hat{O}_3G$]] .

Il quadrilatero GQO_3P ha quattro angoli retti ed'è quindi un rettangolo; di conseguenza $\overline{GQ}=\overline{PO_3}$ perché lati opposti nel rettangolo GQO_3P.
Dato che $\overline{GQ}=\overline{PO_3}$ e $\overline{PO_3}=c$ (PO_3 è il raggio della circonferenza di centro O_3), per la proprietà transitiva $\overline{GQ}=c$

L'angolo $S\hat{Q}O_3$ è supplementare a $G\hat{Q}O_3$, che è retto, ed è quindi retto anch'esso.

Sia C il punto di tangenza della circonferenza di centro O_1 con la circonferenza di centro O_3, il segmento O_1O_3 può essere scomposto in O_1C e O_3C, i raggi delle due circonferenze, rispettivamente congruenti ad a e c, quindi $\overline{O_1O_3}=\overline{O_1C}+\overline{O_3C}=a+c$.

Il segmento O_1Q può essere considerato come il segmento O_1G, raggio della circonferenza di centro O_1, al quale viene sottratto il segmento GQ, che è congruente al raggio della circonferenza di centro O_3, quindi $\overline{O_1Q}=\overline{O_1G}-\overline{GQ}=a-c$

Il triangolo O_1QO_3 è retto in Q si può pertanto applicare il teorema di Pitagora per trovare la misura di QO_3:
$$\overline{QO_3}=\sqrt{(\overline{O_1O_3})^2-(\overline{O_1Q})^2}=\sqrt{(a+c)^2-(a-c)^2}=\sqrt{4ac}=2\sqrt{ac}$$

3) Gli angoli $H\hat{R}O_3$ e $R\hat{H}P$ sono supplementari perché coniugati interni formati dalle rette parallele t e t_1 tagliate dalla trasversale HR; dato che $R\hat{H}P$ è retto, lo è anche $H\hat{R}O_3$.
Gli angoli $P\hat{O}_3R$ e $O_3\hat{P}H$ sono supplementari perché coniugati interni formati dalle rette parallele t e t_1 tagliate dalla trasversale O_3P; dato che $O_3\hat{P}H$ è retto, lo è anche $P\hat{O}_3R$.

Il quadrilatero PO_3RH ha quattro angoli retti ed è quindi un rettangolo; di conseguenza $\overline{HR}=\overline{PO_3}$ perché lati opposti nel rettangolo PO_3RH
Dato che $\overline{HR}=\overline{PO_3}$ e $\overline{PO_3}=c$ (PO_3 è il raggio della circonferenza di centro O_3), per la proprietà transitiva $\overline{HR}=c$

L'angolo $O_2\hat{R}O_3$ è supplementare a $H\hat{R}O_3$, che è retto, ed è quindi retto anch'esso.

Sia B il punto di tangenza della circonferenza di centro O_2 con la circonferenza di centro O_3, il segmento O_2O_3 può essere scomposto in O_2B e O_3B, i raggi delle due circonferenze, rispettivamente congruenti a b e c, quindi $\overline{O_2O_3}=\overline{O_2B}+\overline{O_3B}=b+c$.

Il segmento O_2R può essere considerato come il segmento O_2H, raggio della circonferenza di centro O_2, al quale viene sottratto il segmento RH, che è congruente al raggio della circonferenza di centro O_3, quindi $\overline{O_2R}=\overline{O_2H}-\overline{RH}=a-c$

Il triangolo O_2RO_3 è retto in R e si può pertanto applicare il teorema di Pitagora per trovare la misura di RO_3:

$$\overline{RO_3}=\sqrt{(\overline{O_2O_3})^2-(\overline{O_2R})^2}=\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2}=\sqrt{4bc}=2\sqrt{bc}$$

4) Il segmento QR può essere considerato come la somma dei segmenti QO_3 e O_3R, quindi la sua misura è:

$$\overline{QR}=\overline{QO_3}+\overline{RO_3}=2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}=2(\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$$

5) L'angolo $G\hat{S}O_2$ è supplementare di $S\hat{G}P$ perché angoli coniugati interni formati dalle rette parallele t e t_2 tagliate dalla trasversale GS; dato che $S\hat{G}P$ è retto, lo è anche $G\hat{S}O_2$.
L'angolo $H\hat{O}_2S$ è supplementare di $O_2\hat{H}P$ perché angoli coniugati interni formati dalle rette parallele t e t_2 tagliate dalla trasversale O_2H; dato che $O_2\hat{H}P$ è retto, lo è anche $H\hat{O}_2S$.

Il quadrilatero SO_2HG ha quattro angoli retti ed'è quindi un rettangolo; di conseguenza $\overline{GS}=\overline{HO_2}$ perché lati opposti nel rettangolo SO_2HG.
Dato che $\overline{GS}=\overline{HO_2}$ e $\overline{HO_2}=b$ (HO_2 è il raggio della circonferenza di centro O_2), per la proprietà transitiva $\overline{GS}=b$

Sia A il punto di tangenza della circonferenza di centro O_1 con la circonferenza di centro O_2, il segmento O_1O_2 può essere scomposto in O_1A e O_2A, i raggi delle due circonferenze, rispettivamente congruenti ad a e b, quindi $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1A}+\overline{O_2A}=a+b$.

Il segmento O_1S può essere considerato come il segmento O_1G, raggio della circonferenza di centro O_1, al quale viene sottratto il segmento GS, che è congruente al raggio della circonferenza di centro O_2, quindi [G al posto di Q] [[$\overline{O_1S}=\overline{O_1Q}-\overline{GS}=a-b$]]

Il triangolo O_1SO_2 è retto in S e si può pertanto applicare il teorema di Pitagora per trovare la misura di SO_2:

$$\overline{SO_2}=\sqrt{(\overline{O_1O_2})^2-(\overline{O_1S})^2}=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=\sqrt{4ab}=2\sqrt{ab}$$

6) Il quadrilatero SO_2RQ ha quattro angoli retti e quindi è un rettangolo; di conseguenza $\overline{SO_2}=\overline{QR}$ perché lati opposti nel rettangolo SO_2RQ.

7) Dato che $\overline{QR}=2(\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$, $\overline{SO_2}=2\sqrt{ab}$ e $(\overline{SO_2})=(\overline{QR})$, per la proprietà transitiva

$$2(\sqrt{ac}+\sqrt{bc})=2\sqrt{ac}\Rightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}=\sqrt{ac}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$$

C.V.D.