FLAT*landia*

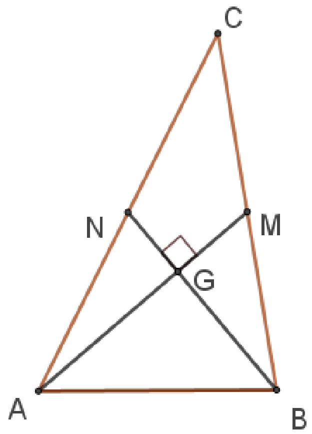
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 14 – 21 dicembre 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 7 - 21 dicembre 2019
In un triangolo ABC, indichiamo con a, b, c le misure dei lati BC, AC e AB rispettivamente.

a) Costruire un triangolo ABC in modo che le mediane AM e BN relative ai lati BC ed AC siano tra esse perpendicolari (vedi figura).



b) Dimostrare che la condizione necessaria e sufficiente, sulle misure a, b, c dei lati, affinché un tale triangolo esista, è la seguente:

$$a^2 + b^2 = 5c^2$$

Motivare le risposte.

Commento

Sono arrivate cinque risposte.
Il problema poneva due quesiti riguardanti le mediane di un triangolo.
Nel primo si chiedeva di costruire un triangolo che avesse due mediane tra loro perpendicolari.
Nel secondo si richiedeva di dimostrare che una data relazione era condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo avesse due mediane tra loro ortogonali.
Riguardo al primo quesito bisogna osservare che tutti, per costruire le mediane, hanno sfruttato la nota proprietà del baricentro, ma in questo caso sarebbe stato necessario provare "la proprietà inversa", cioè che se AM e BN (vedi figura) sono state costruite in modo tale che AG=2GM e BG=2GN, allora AM e BN sono due mediane del triangolo. Tale proprietà è vera, ma avrebbe richiesto quanto meno un richiamo ad essa.
Sul secondo punto del problema c'è da notare che quasi tutti hanno provato solo la condizione necessaria. La dimostrazione della sufficienza della condizione richiedeva l'uso della formula che esprime la lunghezza di una mediana di un triangolo in funzione dei suoi lati, formula non molto nota ma che in una delle risoluzioni è stata usata.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "Copernico", Prato
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)
- Liceo Scientifico "G.B. Morgagni", Roma
- Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia.

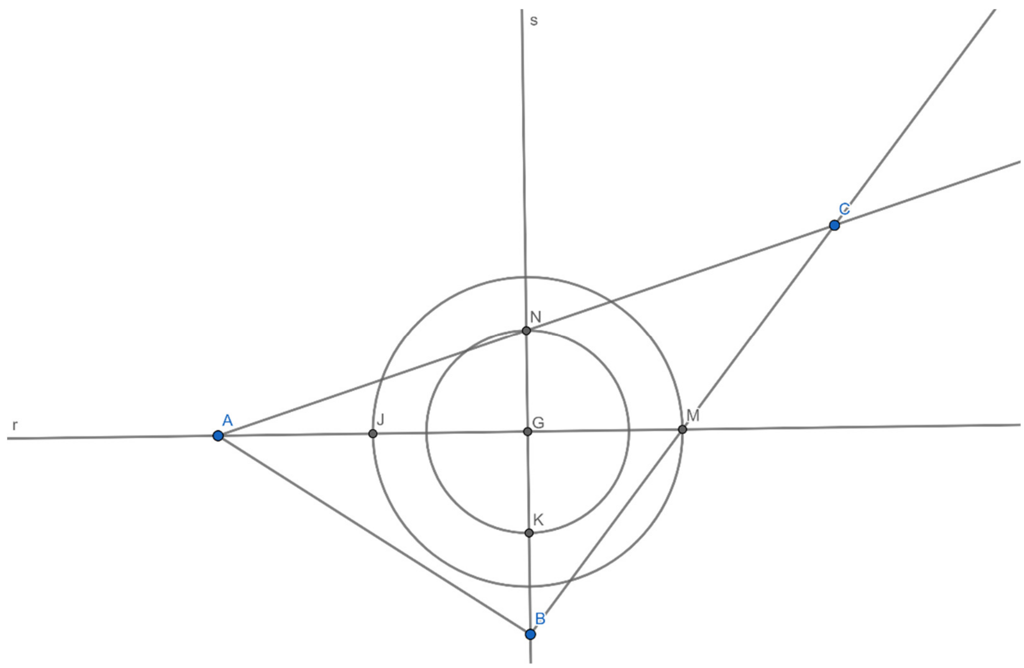
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Pietro Manetti, Classe I HS, Liceo Scientifico Copernico Prato (FI)

a) Per costruire un triangolo ABC avente due mediane tra loro perpendicolari procediamo così:

- Tracciamo due rette perpendicolari, *r* e *s*. Chiamiamo *G* il loro punto di intersezione
- Individuiamo un punto *A* su *r* ed un punto *B* su *s*
- Tracciamo il segmento *AB* individuando così il triangolo ABC [il punto C viene individuato in seguito].
- Individuiamo i punti medi di *AG* e di *BG*, costruendone gli assi; li chiamiamo rispettivamente J e K
- Con il compasso puntiamo in G e tracciamo una circonferenza con raggio GK e una con raggio GJ. Individuiamo così i punti N e M
- Tracciamo le semirette AN e BM. Il loro punto di intersezione è C, che ci permette di individuare il triangolo ABC con due mediane perpendicolari, richiesto nell'esercizio



La costruzione sfrutta semplicemente una proprietà delle mediane (condizione necessaria e sufficiente), ovvero quella di incontrarsi in un punto che le divide entrambe in modo tale che la parte contenente un vertice del triangolo sia il doppio dell'altra. [Ma questa condizione, una volta verificata, mi garantisce di aver costruito due mediane?] Infatti riportando GM e GN non facciamo altro che rendere vere le seguenti uguaglianze $BG = 2 \times GN$ $BG = 2 \times GN$ e $AG = 2 \times GM$ $AG = 2 \times GM$, condizioni necessarie e sufficienti affinché BN e [AM] [[AN]] siano mediane del triangolo

b) Dobbiamo ora dimostrare che $a^2 + b^2 = 5c^2$ $a^2 + b^2 = 5c^2$ è condizione necessaria e sufficiente sui lati affinché esista un triangolo avente due mediane tra loro perpendicolari.

Innanzitutto indichiamo con m [la misura di AM] [[BM]] e con n [la misura di BN] [[AN]] . Sfruttando la proprietà delle mediane scritta poche righe sopra, impostiamo alcune ovvie uguaglianze (per le lettere facciamo riferimento al testo del problema):

$$AN = \frac{1}{2}b \quad AN = \frac{1}{2}b \;; \quad \text{[BM=a/2]} \quad BN = \frac{1}{2}a \quad BN = \frac{1}{2}a \;; \quad AG = \frac{2}{3}m \quad AG = \frac{2}{3}m \;; \quad GM = \frac{1}{3}m$$

$$GM = \frac{1}{3}m \;; \quad BG = \frac{2}{3}n \quad BG = \frac{2}{3}n \;; \quad GN = \frac{1}{3}n \quad GN = \frac{1}{3}n$$

Per il teorema di Pitagora allora:

$$\left(\frac{1}{3}n\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{9}n^2 + \frac{4}{9}m^2 = \frac{1}{4}b^2$$

$$\left(\frac{1}{3}m\right)^2 + \left(\frac{2}{3}n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{9}m^2 + \frac{4}{9}n^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\left(\frac{2}{3}m\right)^2 + \left(\frac{2}{3}n\right)^2 = c^2 = \frac{4}{9}[\![(m]\!]^2 + n^2)$$

L' ultima uguaglianza la possiamo riscrivere così:

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}n^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{9}m^2 = c^2 = \frac{1}{4}[\![(a]\!]^2 + b^2) - \frac{1}{9}\left(n^2 + m^2\right)$$

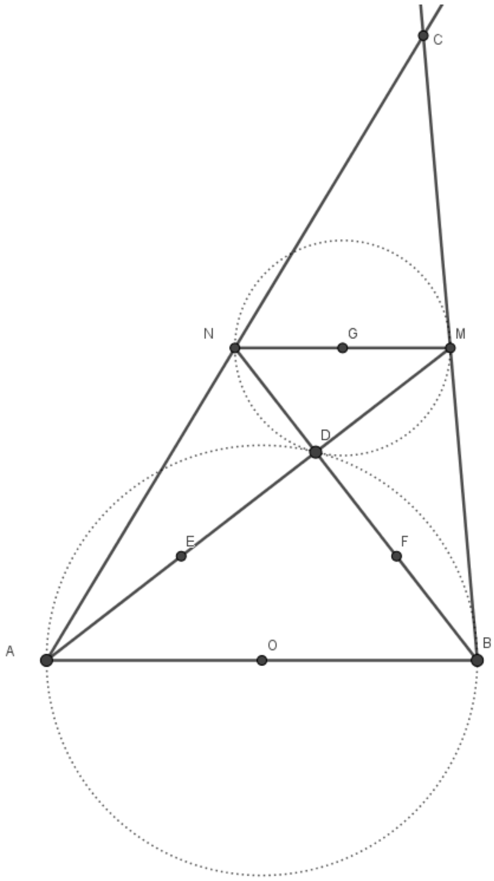
Per il secondo principio di equivalenza allora $a^2 + b^2 - \frac{4}{9}(n^2 + m^2) = 4c^2$ $a^2 + b^2 - \frac{4}{9}(n^2 + m^2) = 4c^2$ ovvero $a^2 + b^2 - c^2 = 4c^2$ $a^2 + b^2 - c^2 = 4c^2$ che equivale a $a^2 + b^2 = 5c^2$ $a^2 + b^2 = 5c^2$.

[In questo modo ho provato solo la condizione necessaria, ossia che se un triangolo rettangolo ha due mediane perpendicolari, precisamente quelle relative ai lati di misura a e b, allora vale la relazione del testo].

[[Poiché soddisfare il Teorema di Pitagora è condizione necessaria e sufficiente di tutti i triangoli rettangoli, possiamo concludere che $a^2 + b^2 = 5c^2$ $a^2 + b^2 = 5c^2$ è condizione necessaria e sufficiente per essere un triangolo avente due mediane tra loro perpendicolari]].

2)Soluzione proposta dalla classe 2^B indirizzo Scientifico Internazionale Liceo Aristosseno Taranto

a) Per costruire il triangolo ABC che abbia le mediane AM e BN perpendicolari fra loro tracciamo un segmento AB che sarà la base del triangolo e costruiamo la circonferenza avente AB come diametro. Scegliamo poi un punto D sulla semicirconferenza come in figura e congiungiamo questo punto con A e con B. Il triangolo ABD è rettangolo [in D] perché inscritto in una semicirconferenza. Sappiamo che in un qualunque triangolo le mediane si incontrano nel baricentro che le divide in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra. [Questa è una proprietà delle mediane di un triangolo, ma non mi assicura che se AM e BN hanno tale proprietà queste siano effettivamente mediane (è vero, ma bisognerebbe dimostrarlo)]. Perciò, individuati i punti medi dei cateti AD e DB nei punti E ed F rispettivamente, prolunghiamo AD in DM congruente ad ED = AE e BD in DN congruente a FD = BF . Le semirette AN e BM si incontrano nel terzo vertice C del triangolo che è così costruito. In esso il segmento NM è parallelo ad AB ed è la sua metà e quindi la sua misura è pari a c/2 .



Posto ,per le misure : DN=DF=BF=d , e posto DM=DE=AE=e

applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo MDN : $\frac{c^2}{4} = e^2 + d^2$ $\frac{c^2}{4} = e^2 + d^2$ (*)

al triangolo ADN : $\frac{a^2}{4} = (2e)^2 + d^2 = 4e^2 + d^2$ $\frac{a^2}{4} = (2e)^2 + d^2 = 4e^2 + d^2$ [b al posto di a]

e al triangolo BDM : $\frac{b^2}{4} = (2d)^2 + e^2$ $\frac{b^2}{4} = (2d)^2 + e^2$ [a al posto di b]

poi sommiamo membro a membro le ultime due uguaglianze e otteniamo :

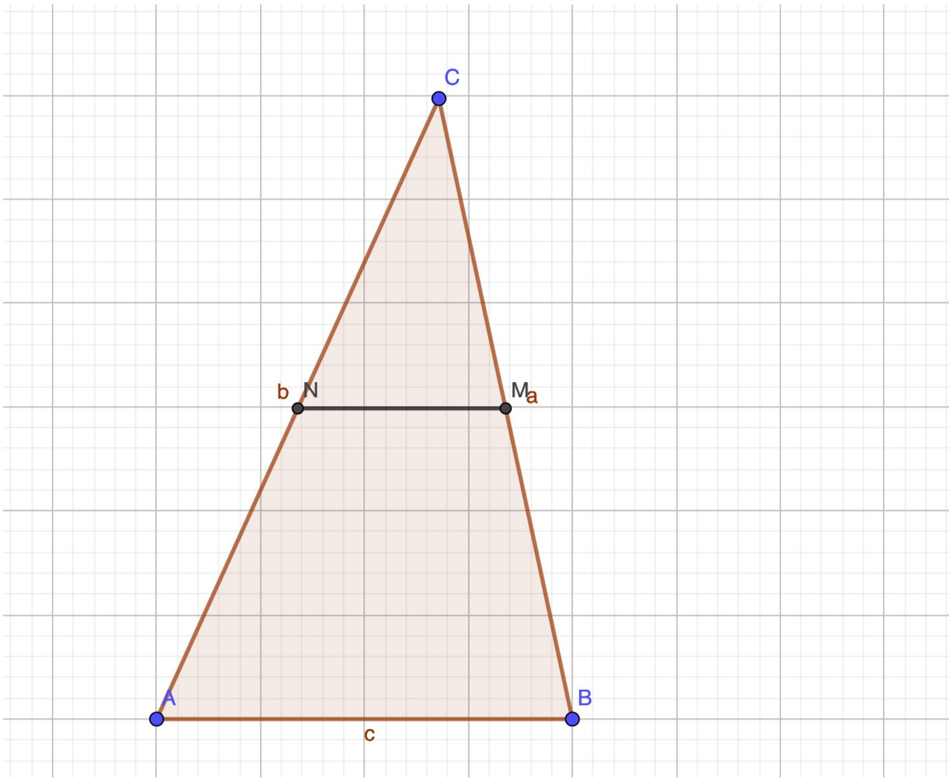
$$\frac{(a^2 + b^2)}{4} = 5e^2 + 5d^2 = 5(e^2 + d^2) = per\ la\ (*) = 5\frac{c^4}{4}$$

$$\frac{(a^2 + b^2)}{4} = 5e^2 + 5d^2 = 5(e^2 + d^2) = per\ la\ (*) = 5\frac{c^4}{4}$$

, e da qui , moltiplicando per 4 ambo i membri segue : $a^2 + b^2 = 5c^2$ $a^2 + b^2 = 5c^2$.

b) Se , viceversa consideriamo un triangolo in cui è vera la relazione $a^2 + b^2 = 5c^2$ $a^2 + b^2 = 5c^2$, detti N ed M i punti medi dei lati AC (a) e BC (b) ,sappiamo che il segmento MN sarà parallelo ad AB e sarà pari alla sua metà (c/2) . Esprimiamo la relazione data , dividendo il primo e il secondo membro per 4 ,nella forma : $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = c^2 + \frac{c^2}{4}$ $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = c^2 + \frac{c^2}{4}$ e osserviamo che questo comporta che le diagonali del quadrilatero ABMN sono perpendicolari fra loro [perché?] . Essendo le diagonali del quadrilatero ABMN le mediane del triangolo ABC , il triangolo ha le mediane perpendicolari fra loro.

3)Soluzione proposta da Rossi Linnea, Classe 3ª ASO, Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)



Hp:

ABC triangolo
AM e NB mediane
AM $\perp$ BN

Th:

$a^2 + b^2 = c^2$

Risoluzione

a) Manca.

b) Considerando la congiungente dei punti medi di *a* e *b*, rispettivamente M e N, secondo il corollario del teorema di Talete, sappiamo che il segmento MN è parallelo a *c* ed è congruente alla sua metà.

MN=$\frac{c}{2}$

Essendo le mediane tra di loro perpendicolari, ed essendo perciò il triangolo NGM retto in G, possiamo, grazie al teorema di Pitagora, dire che :

$$MN^2 = MG^2 + NG^2$$

Perciò :

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = MG^2 + NG^2 \qquad (1)$$

Considero ora i triangoli, retti entrambi in G grazie alla perpendicolarità delle mediane, NAG e MBG. Sempre con il teorema di Pitagora, posso affermare che:

$$NA^2 = NG^2 + AG^2$$

$$MB^2 = MG^2 + BG^2$$

sapendo che M e N sono i punti medi dei rispettivi lati a cui appartengono, scrivo

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = NG^2 + AG^2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = MG^2 + BG^2 \qquad (3)$$

Come ultimo triangolo retto in G, considero AGB. Sempre grazie a Pitagora

$$c^2 = AG^2 + BG^2 \qquad (4)$$

Riscrivo le formule trovate e le metto in correlazione (1)

$$c^2 = 4NG^2 + 4MG^2$$

1 e 4 possono essere eguagliate

$$c^2 = 4NG^2 + 4MG^2 \qquad c^2 = AG^2 + BG^2$$ (5) , (2), (3)

(6) $$AG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - NG^2 \qquad BG^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - MG^2$$ (7)

[Sommo membro a membro 2 e 3] [[Metto in correlazione le nuove eguaglianze]]

$$5NG^2 + 5MG^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Considerando (1) e l'eguaglianza qui sopra possiamo dire che

$$5\left(\frac{c^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

Perciò, semplificando:

$$5c^2 = a^2 + b^2$$
.

[Manca la condizione sufficiente].

4)Soluzione proposta da Elena Cieri, Sofia Gallucci, Marco Nascetti e Leonardo Schiesaro, classi II E e II C del Liceo Scientifico G.B. Morgagni di Roma.

Costruzione del triangolo

Si prendano in considerazione due rette tra loro perpendicolari. Si scelgano arbitrariamente tre punti, dei quali uno deve coincidere con l'intersezione tra le due rette e gli altri due devono appartenere rispettivamente ed esclusivamente alla prima e alla seconda retta. (*1.1*)

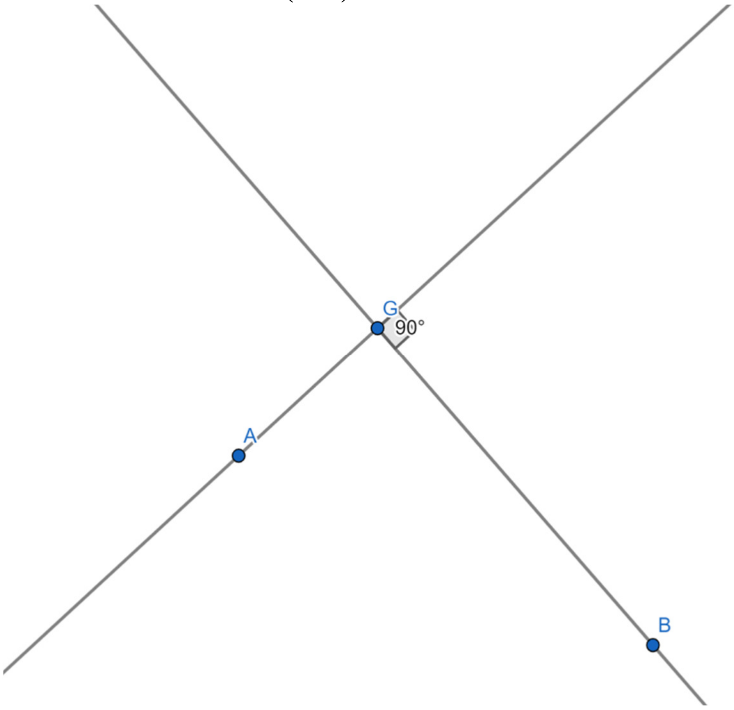


Figura 1.1

Si uniscano i punti A e B tramite un segmento, in modo da formare il triangolo AGB. (*1.2*)

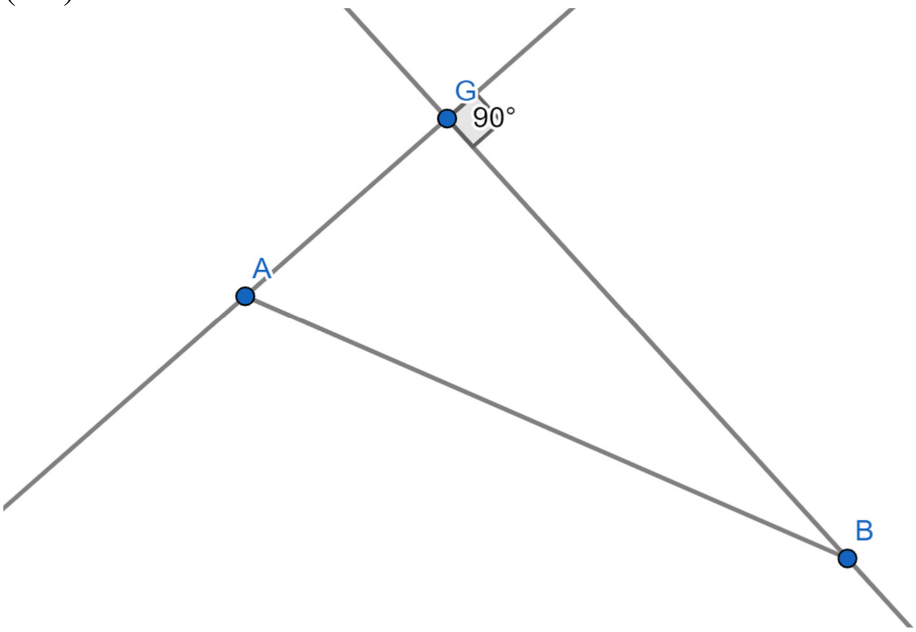


Figura 1.2

Si traccino i punti D ed E, i punti medi rispettivamente di AG e GB. (*1.3*)

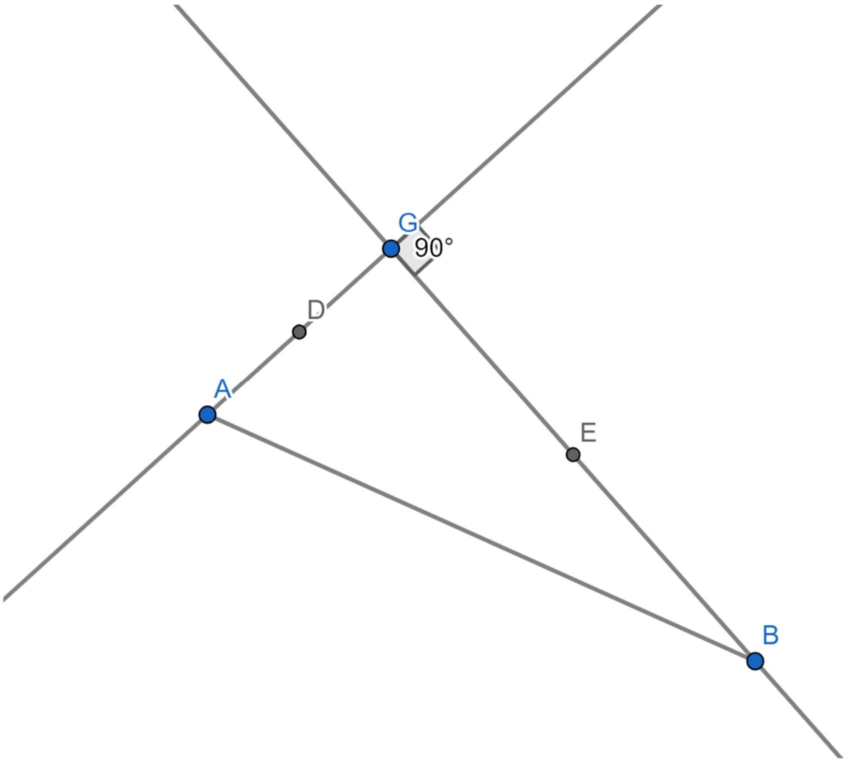


Figura 1.3

Si traccino il punto M, simmetrico di D rispetto a GE, e il punto N, simmetrico di E rispetto a GD. (*1.4*)

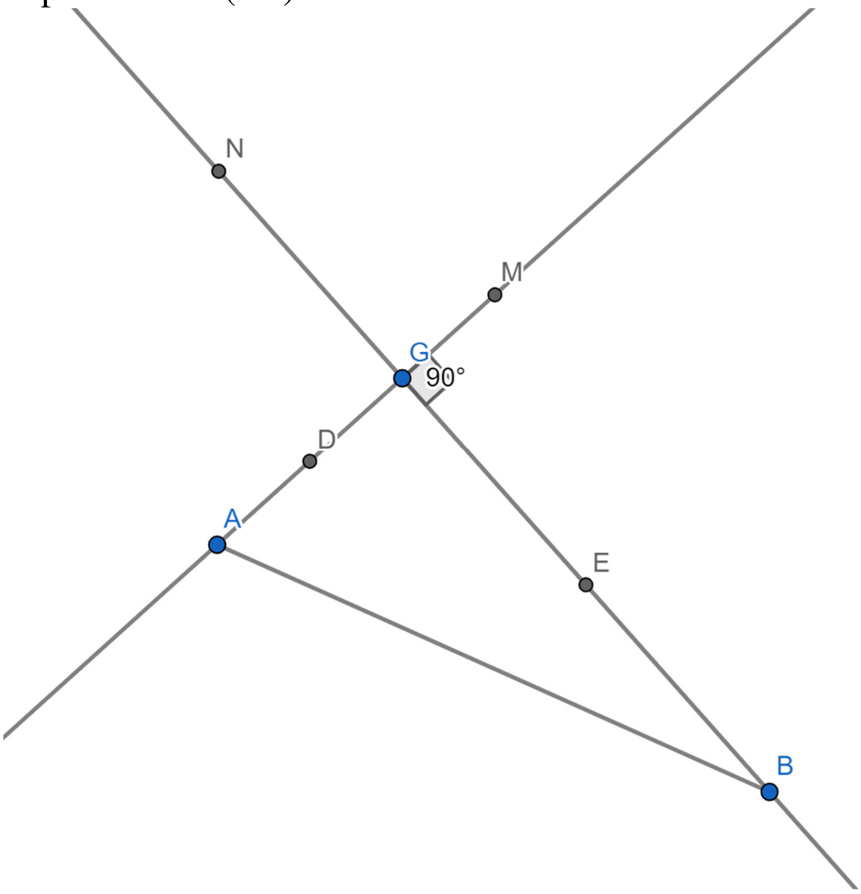


Figura 1.4

Si disegnino le rette AN e BM, che si intersecano nel punto C. (*1.5*)

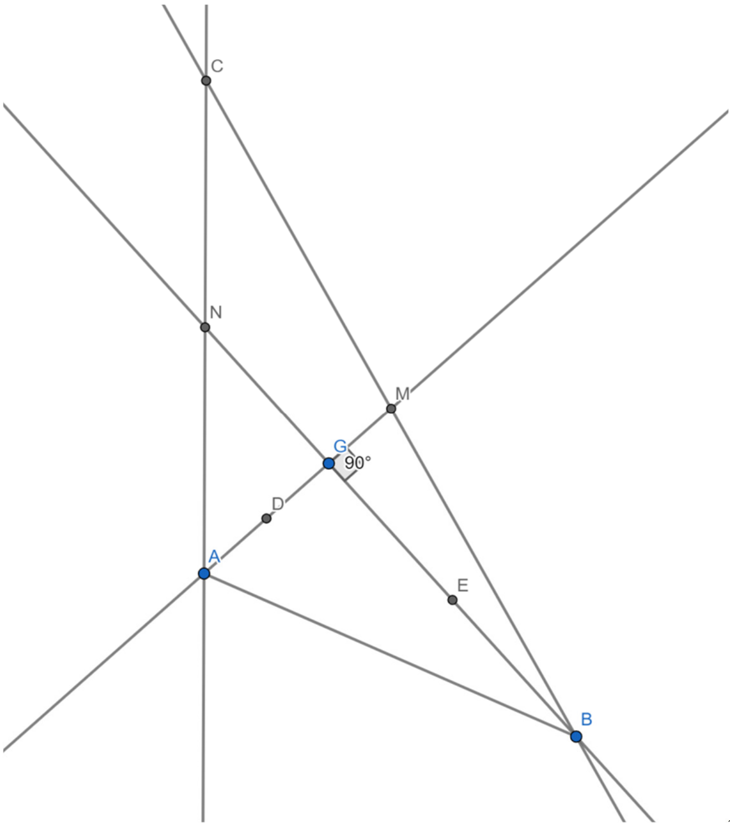


Figura 1.5

Il triangolo ABC che si è venuto a creare possiede quindi due mediane tra loro perpendicolari. (*1.6*)

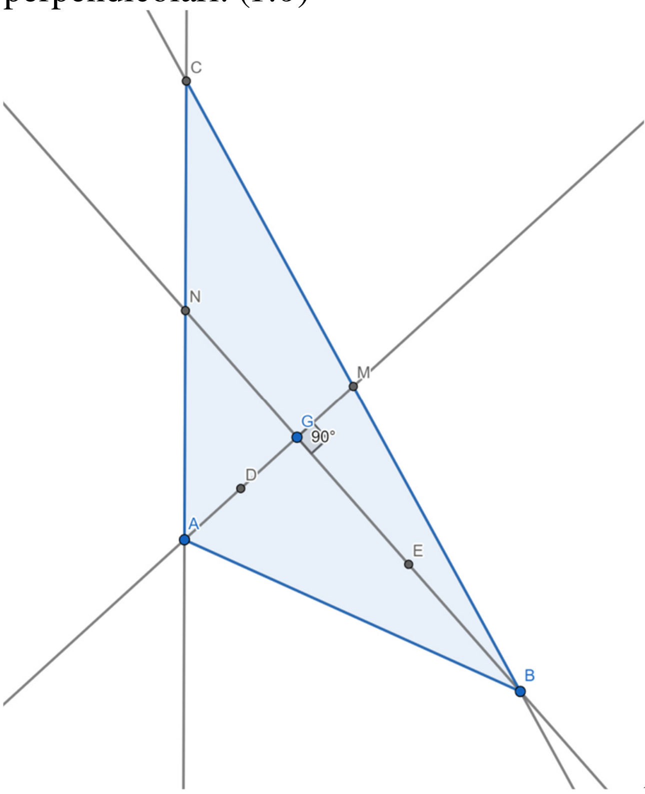


Figura 1.6

[Bisogna però dimostrare che poiché AM e BN hanno la proprietà che hanno le mediane di un triangolo, queste sono effettivamente delle mediane].

Ipotesi
AN=NC
BM=MC
Angolo NGM=NGA=AGB=BGM=$\pi/2$

Tesi
$5c^2 = a^2 + b^2$

Dimostrazione
Diamo valore x x a GN e y y a GM
Essendo AM e BN mediane del triangolo ABC esse si dividono tra di loro in due segmenti che sono l'uno il doppio dell'altro, perciò $AG = 2y$ $AG = 2y$ e $GB = 2x$ $GB = 2x$.
Utilizzando il teorema di Pitagora calcoliamo AG AG in funzione di b b .

$$AG^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2$$

$$AG = \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}$$

Allo stesso modo troviamo BG BG in funzione di a a .

$$BG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2$$

$$BG = \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}$$

Consideriamo poi il triangolo rettangolo AGB AGB e, utilizzando il teorema di Pitagora, calcoliamo il valore di c^2 c^2 in funzione di x x e y y .

$$c^2 = (2x)^2 + (2y)^2$$

$$c^2 = 4x^2 + 4y^2$$

Sempre utilizzando Pitagora troviamo il valore di c^2 c^2, ma questa volta utilizzando le equazioni trovate prima.

$$c^2 = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}\right)^2$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} - y^2 + \frac{b^2}{4} - yx^2$$ [togliere y]

$$c^2 = \frac{a^2 - 4y^2 + b^2 - 4x^2}{4}$$

$$4c^2 = a^2 + b^2 - 4x^2 - 4y^2$$

$$4c^2 = a^2 + b^2 - (4x^2 + 4y^2)$$

Notiamo come $4x^2 + 4y^2 4x^2 + 4y^2$ sia in realtà $c^2 c^2$ e possiamo quindi sostituirlo nell'equazione.

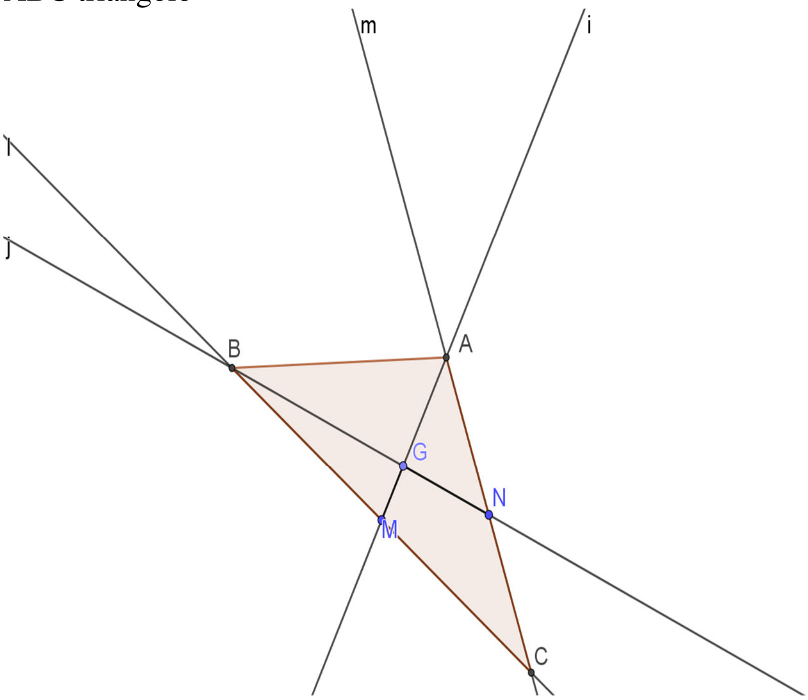
$$4c^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$5c^2 = a^2 + b^2 \, 5c^2 = a^2 + b^2.$$

[Manca la condizione sufficiente]

5)Soluzione proposta da Mario Solinas, Federico Pampanelli Nicchi, Jacopo Buratta, Classe 2°L Liceo Scientifico "Galeazzo Alessi" Perugia

Ipotesi:
ABC triangolo



a= BC
b= AC
c= AB
AM e BN mediane rispettivamente di BC e AC
AM intersezione BN = G
AM perpendicolare a BN

TESI:
$a^2 + b^2 = 5c^2$

DIMOSTRAZIONE:
a) Dati due punti distinti M, N tracciamo le rette i e j, perpendicolari tra loro , passanti rispettivamente per M e N , con G il loro punto di intersezione. (Perché MG e NG siano perpendicolari tra loro basta prendere il pnto G su una semicirconferenza di diametro MN).

Sia A il punto appartenente alla retta MG, tale che G è compreso tra M ed A e GA=2MG.
Sia B il punto appartenente alla retta NG, tale che G è compreso tra [N] [[M]] e B e GB=2NG
Tracciamo inoltre la retta m passante per N, A e la retta l passante per M, B che si intersecano nel punto C .
Si ottiene così il triangolo ABC mostrato sopra in figura, per il quale M ed N sono i punti medi rispettivamente dei lati BC e AC . (Infatti MN è parallelo ad AB e congruente alla sua metà e i triangoli ABC ed MNC sono simili con rapporto di similitudine 2, quindi BC=2BM e AC=2AN ovvero M ed N sono rispettivamente i punti medi di BC e AC.)

[La condizione che GA=2MG e GB=2NG non mi assicura che AM e BN siano effettivamente mediane (è vero, ma bisognerebbe dimostrarlo)].

b) Consideriamo il triangolo ABC: per il teorema relativo all' incidenza delle mediane di un triangolo, AG = 2GM e BG = 2GN.
Consideriamo il triangolo GBM: BM = a/2 perché AM per ipotesi è mediana, inoltre GBM è rettangolo in G per ipotesi. Dunque si può applicare il teorema di Pitagora:

$$4GN^2 + GM^2 = a^2/4 \rightarrow 16GN^2 + 4GM^2 = a^2 \qquad (1)$$

Consideriamo ora il triangolo GAN : AN = b/2 perché BN per ipotesi è mediana, inoltre GAN è rettangolo in G per ipotesi. Dunque si può applicare il teorema di Pitagora:

$$GN^2 + 4GM^2 = b^2/4 \rightarrow 4GN^2 + 16GM^2 = b^2 \qquad (2)$$

Da (1) e (2) segue che:

$$a^2 + b^2 = 20GN^2 + 20\,GM^2 \qquad (3)$$

Consideriamo ora il triangolo AGB : per ipotesi è rettangolo, dunque si può applicare il teorema di Pitagora:

$$4GN^2 + 4GM^2 = c^2$$

E moltiplicando entrambi i membri per 5 si ottiene:

$$5(4GN^2 + 4GM^2) = 5c^2 \quad \rightarrow \quad 20GN^2 + 20GM^2 = 5c^2 \qquad (4)$$

Da (3) e (4) segue che $a^2 + b^2 = 5c^2$

c) per il teorema sull' incidenza delle mediane, AM = 3GM e BN = 3GN.

Per il teorema della mediana,

$2AM^2 = b^2 + c^2 - a^2/2 \rightarrow 18GM^2 = b^2 + c^2 - a^2/2 \rightarrow 36GM^2 = 2b^2 + 2C^2 - \mathbf{a^2}$ [c minuscolo]

sempre per il teorema della mediana,

$2BN^2 = a^2 + c^2 - b^2/2 \rightarrow 18GN^2 = a^2 + c^2 - b^2/2 \rightarrow 36GN^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2$

segue che:

$36GM^2 + 36GN^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 \rightarrow 9(4GM^2 + 4GN^2) - 4c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 9(4GM^2 + 4GN^2) - 4c^2 = 5c^2 \rightarrow$

$4GM^2 + 4GN^2 = c^2$

quindi il triangolo ABG è rettangolo in G. Da ciò segue che AM è perpendicolare a BN.