FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 13-27 maggio 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 13 - 27 maggio 2019

Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB > AC$. Dal punto medio M dell'ipotenusa tracciare la perpendicolare a BC che incontri in E la bisettrice dell'angolo retto in A. Detto H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, provare che:

1) $\widehat{MAE} = \widehat{EAH}$
2) $AM = ME$
3) $\widehat{MAE} = \frac{1}{2}\left(\hat{C} - \hat{B}\right)$.

Commento

Sono giunte undici risposte, quattro da classi I, sei da classi II e una da una classe III tutte di Liceo scientifico.
Il problema partiva da un triangolo rettangolo e chiedeva di dimostrare alcune proprietà relative all'altezza, alla mediana e alla bisettrice uscenti dal vertice dell'angolo retto.
La maggior parte delle risposte risolve correttamente i tre quesiti, anche se non mancano errori e imprecisioni. In tal senso consigliamo sempre un'attenta rilettura di quanto scritto per evitare errori banali quanto spiacevoli.

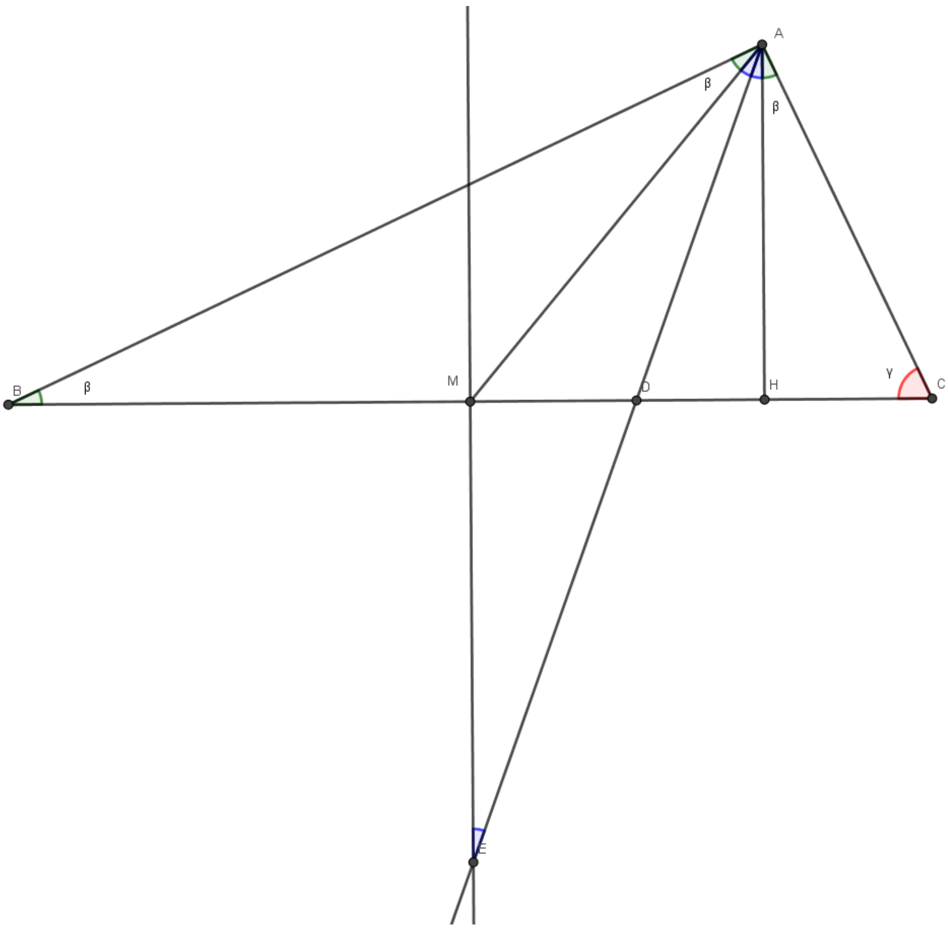
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "E. Fermi", Bologna
- Liceo Scientifico "E. Fermi", Bari
- Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento
- Liceo Nomentano, Roma
- Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia
- Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

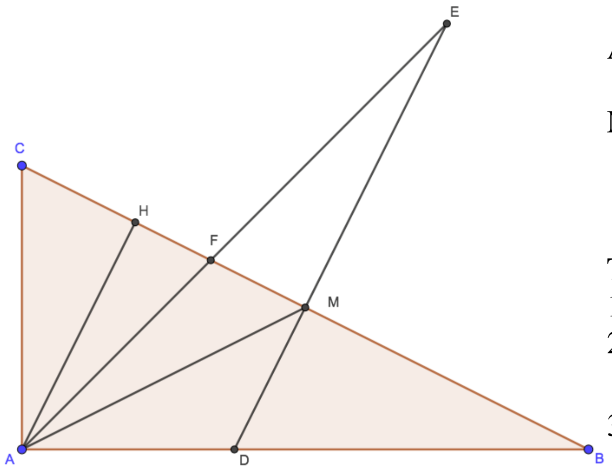
1)Soluzione proposta dalla Classe 3^ H Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto



a)Costruita la figura, osserviamo anzitutto che la mediana AM relativa all'ipotenusa BC del triangolo è congruente ad [[AM]] [CM] e ad MB e quindi i due triangoli AMB e AMC sono isosceli sulle basi AB e AC rispettivamente. Indicato ora l'angolo $\widehat{ABC}$ con β e l'angolo $\widehat{ACB}$ con γ del triangolo ABC , osserviamo che l'angolo $\widehat{CAH}$ è congruente all'angolo $\widehat{ABC}$ =β perché sono entrambi complementari dell'angolo $\widehat{ACB}$=γ ; ed essendo AE la bisettrice dell'angolo retto si ha che l'angolo $\widehat{MAE}$ = 45°-β e anche $\widehat{EAH}$ = 45°-β perciò gli angoli $\widehat{MAE}$ ed $\widehat{EAH}$ sono congruenti perché differenze di angoli congruenti.
b)Gli angoli $\widehat{MEA}$ ed $\widehat{EAH}$ sono congruenti perché sono alterni interni individuati dalle rette di ME e di AH che sono parallele (entrambe perpendicolari alla retta dell'ipotenusa BC) tagliate dalla trasversale AE. Essendo allora : $\widehat{MEA}$= $\widehat{EAH}$ ed $\widehat{EAH}$=$\widehat{MAE}$ come visto nel punto a) ,per la proprietà transitiva della congruenza sarà $\widehat{MEA}$ = $\widehat{MAE}$ e quindi il triangolo EMA è isoscele e sarà quindi AM = ME.
c)Siccome il triangolo AMC è isoscele come già visto nel punto a), l'angolo $\widehat{MAC}$=$\widehat{ACB}$=γ e l'angolo $\widehat{MAH} = \widehat{MAC} - \widehat{CAH}$=γ-β .Ora l'angolo $\widehat{MAH}$ =2$\widehat{MAE}$ e quindi da: 2$\widehat{MAE}$ = γ-β segue che : $\widehat{MAE} = \frac{1}{2}$(γ-β)=$\frac{1}{2}\,(\hat{C} - \hat{B})$.

2) **Soluzione proposta da Marco Fiorani Borraccino, 2^F Liceo Scientifico "E.Fermi" Bologna**

[Osservazione preliminare : perché usare lettere minuscole per indicare due dei tre vertici degli angoli ?]



Ipotesi:

ABC è un triangolo rettangolo in A

$AB > AC$

M è medio di BC

$DE \perp BC \wedge M \in DE$

$AH \perp BC$

$AE \cap BC = F$

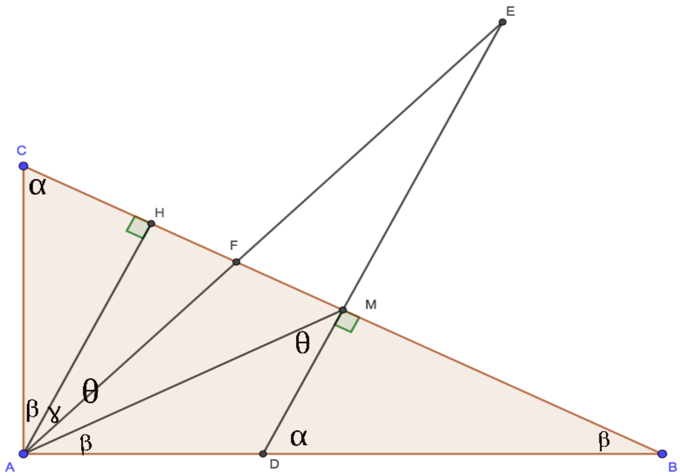
Tesi:

1) mAe=eAh

2)AM=ME

3) $mAe = \frac{1}{2} \cdot (C - B)$

Dimostrazione tesi 1:



Si chiamano gli angoli con lettere greche in modo tale da contraddistinguere meglio i vari angoli:

$aCb = \alpha \; ; cBa = \beta \; ; eAh = \gamma \; ; mAh = \theta$

Considero i triangoli ABC e BDM, essi sono simili poiché hanno angoli congruenti: -[[dMb =aHc]] [DMB=CAB] poiché retti per ipotesi; mBd =cBa poiché i due angoli si sovrappongono; mDb=aCb per differenza di angoli (dato che la somma degli angoli in un triangolo è 180°, se due triangoli hanno due angoli congruenti allora anche il terzo lo sarà: [[….]]. Da ciò ne consegue che

$aCb = mDb = \alpha$, $cBa = mBa = \beta$.

Per lo stesso ragionamento anche il triangolo ACH è simile ad ABC poiché:
cAb=aHc perché retti, aCh=aCb perché si sovrappongono, cAh=mBd per lo stesso ragionamento precedente. Per proprietà transitiva ACH è simile a BDM.

Tutto ciò implica che $aCb = mDb = \alpha$, $cBa = mBa = cAh = \beta$

Poiché AM è la mediana relativa all'ipotenusa del triangolo ABC, essa sarà congruente a un mezzo di essa per cui il triangolo AMC sarà isoscele su base AC e gli angoli alla base saranno anch'essi congruenti:

[[$mCa = cAm \Rightarrow mCa = cAh + mAh \Rightarrow \alpha = \beta + \theta$]] [MCA=CAM implica CAM=CAH+MAH implica $\alpha = \beta + \theta$]

Considerando il triangolo ADM, l'angolo aDm, poiché è supplementare con mDb è congruente a : $mDa = 180 - \alpha$ poiché $mDb = \alpha$ per dimostrazione precedente.

L'angolo dMa =hAm perché alterni-interni delle rette parallele AH e MD tagliate dalla trasversale AM → $dMa = hAm = \theta$.

L'angolo mDb è angolo esterno del triangolo AMD perciò sarà congruente alla somma degli angoli non adiacenti ad esso:

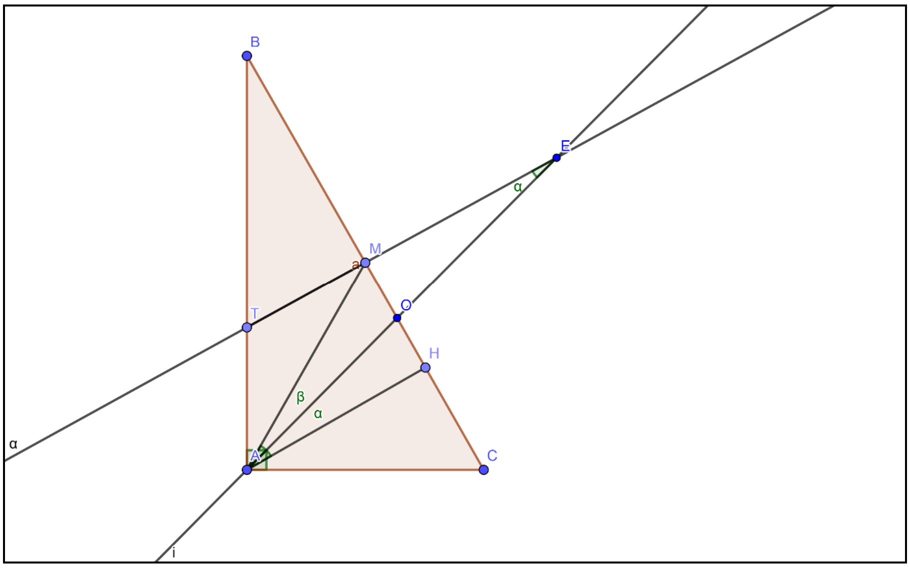
$mDb = dMa + mAd \Rightarrow \alpha = \theta + mAd$, ma per dimostrazione precedente $\alpha = \beta + \theta$ → $mAd = \beta$

per differenza di angoli congruenti.
Per ipotesi AF (AE) è la bisettrice di cAb per cui $cAf = fAb \Rightarrow \beta + \gamma = \beta + mAe \rightarrow$ $mAe = \gamma = hAe \Rightarrow mAe = hAe$ (tesi 1). Da ciò ne consegue anche che $\theta = 2 \cdot \gamma$

Dimostrazione tesi 2:
hAf=fEm perché alterni-interni delle rette parallele AH e DE tagliate dalla trasversale AE.
Per dimostrazione "tesi 1" , hAf=fAm → per proprietà transitiva fAm=fEm da ciò ne consegue che il triangolo AME è isoscele perché gli angoli alla base di AE sono congruenti, per cui AM=ME per la proprietà del triangolo isoscele. (tesi 2)

Dimostrazione tesi 3:
Per dimostrazione precedente $\alpha = \beta + \theta$ e $\theta = 2 \cdot \gamma$ $\rightarrow$ $\alpha = \beta + 2 \cdot \gamma \Rightarrow \alpha - \beta = 2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \cdot (\alpha - \beta)$.
Poiché [e poi ?]

3) Soluzione proposta da Raso Pasquale – Classe II Sez. L – LICEO SCIENTIFICO "E. FERMI" – BARI



Hp:
1) Il triangolo ABC è rettangolo in Â
2) AH altezza relativa a BC
3) M punto medio
   a) BM≅MC
   b) AM mediana relativa a BC
3) TM⊥BC
4) AO bisettrice dell'angolo Â

Ts:
1) EÂH ≅ EÂM
2) Il triangolo AME è isoscele
3) EÂM ≅(Ĉ -B)/2

DIMOSTRAZIONE 1:
Detti EÂH α e EÂM β, dalle ipotesi n. 2) e 3) si deduce che TM//AH perché rette entrambe ⊥ BC, quindi:

1) l'angolo BTM ≅ 45°+α (angoli corrispondenti per rette parallele tagliate dalla trasversale BA)
2) l'angolo TÊA ≅ α (angoli alterni interni per rette parallele tagliate dalla trasversale EA).
Consideriamo il triangolo AHC:
1) HÂC≅45°- α (per costruzione)
2) Ĥ≅90° (Per ipotesi)
Quindi l'angolo Ĉ ≅45°+α.
Consideriamo il triangolo MAC:
1) l'angolo MÂC≅45+β (per costruzione)
2) MA≅MC (perché la mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è congruente alla metà dell'ipotenusa).
Quindi il triangolo MAC è isoscele e, sapendo che gli angoli alla base sono congruenti, abbiamo che:
MÂC ≅ Ĉ → 45°+ β ≅ 45°+ α → 45°- 45°+ β ≅ α → β ≅ α

c.v.d.

DIMOSTRAZIONE 2:

Consideriamo il triangolo MAE:
EÂM≅MÊA (per dimostrazione precedente).
Essendo gli angoli alla base congruenti, il triangolo MAE è isoscele.

c.v.d.

DIMOSTRAZIONE 3:

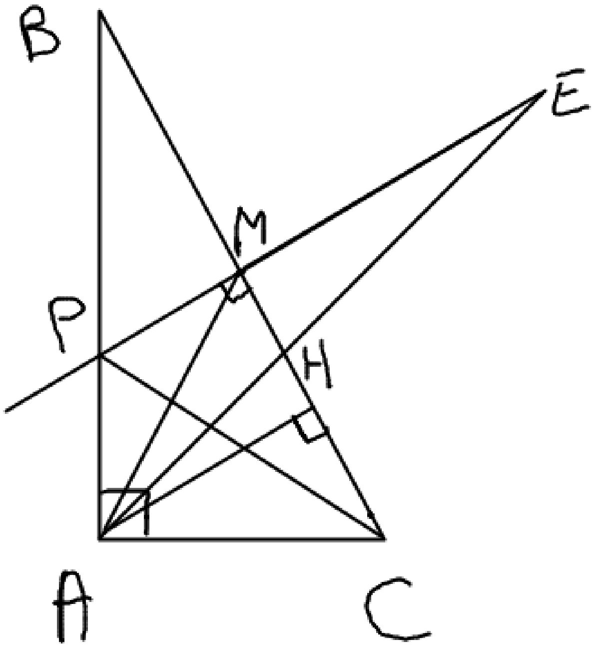
Consideriamo il triangolo TMB:
1) l'angolo BTM≅45+α (per dimostrazione precedente)
2) l'angolo BMT≅90° (per ipotesi)
Quindi l'angolo B ≅ $180° - 90° - 45° - \alpha \cong 45° - \alpha$ (perché la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180°).
Quindi:

$$\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{B}) \cong \frac{1}{2}[45° + \alpha - (45° - \alpha)] \cong \frac{1}{2}(45° + \alpha - 45° - \alpha) \cong \frac{2\alpha}{2} \cong \alpha$$

[nell'ultima parte della formula è $(45+\alpha-45+\alpha)$]

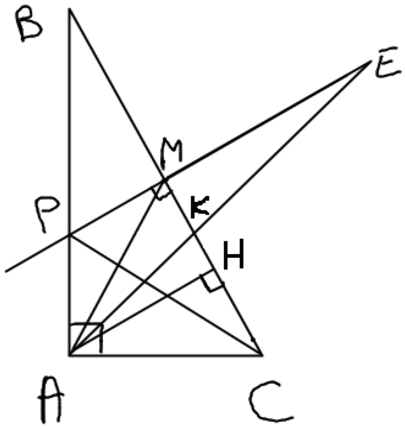
c.v.d.

4) Soluzione proposta da De Simone Emanuele, 2°B, Liceo Scientifico G. Rummo, Benevento



1) I triangoli ABC e AHC hanno:
   AĈB in comune; [[…]]
   AĤC=BÂC;
   AM=BM poiché la mediana di un triangolo rettangolo relativa all' ipotenusa è uguale a metà ipotenusa AB̂C=PÂM poiché angoli alla base di un triangolo isoscele⟹PÂM=HÂC per la proprietà transitiva⟹MÂE=EÂH poiché differenza di angoli congruenti quali: 45°-BÂM e 45°-HÂC;
2) MÊA=EÂH poiché angoli alterni interni delle rette parallele PE e AH tagliati dalla trasversale AE⟹ MÊA=MÂE per la proprietà transitiva⟹ il triangolo AME è isoscele⟹AM=ME;
3) PE asse di BC ⟹PB=BC poiché P equidistante da B e C ⟹PB̂C=PĈB;
   AM=MC poiché la mediana di un triangolo rettangolo relativa all'ipotenusa è uguale a metà ipotenusa⟹BĈA=MÂC poiché angoli alla base di un triangolo isoscele;
   HÂC=HĈP per la proprietà transitiva ⟹MÂH=PĈA per differenza di angoli congruenti;
   PĈA=Ĉ-PĈB⟹PĈA=Ĉ-B̂ poiché PĈB=B̂ poiché dimostrato prima; ⟹MÂH=Ĉ-B̂ poiché MÂH=PĈA poiché dimostrato prima⟹2MÂE=Ĉ-B̂ poiché MÂH=2MÂE⟹MÂE=1/2(Ĉ-B̂).

5)Soluzione proposta da NICOLA SALVATORE CARDONE
Classe 2B, LICEO SCIENTIFICO STATALE "G. RUMMO", BENEVENTO (BN)

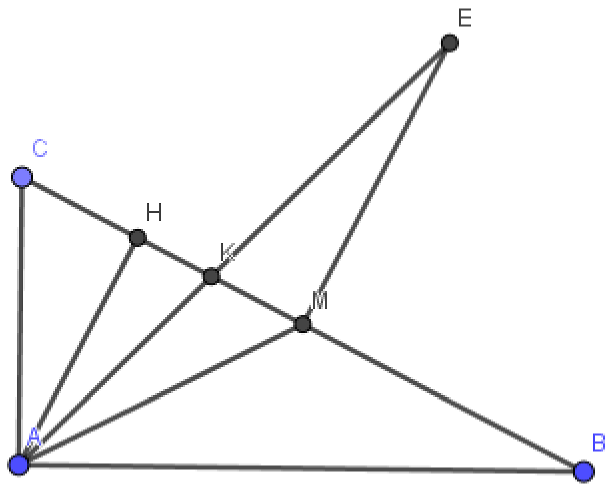


Considero ABC tr. :

- Nomino α l'angolo ACB, CAB=90° per ip. $\Longrightarrow$ L'angolo [[ACB]] [ABC] $=180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

Sappiamo che l'angolo EAC=90°/2=45° perché AE bis. di BAC=90°
[[….]] $\Longrightarrow$
AM è mediana relativa all'ipotenusa BC $\Longrightarrow$ AM≅ MB perché in un tr. rett. la mediana relativa all'ipotenusa è congr. a metà ipotenusa
AM≅ MB $\Longrightarrow$ il tr. ABM è is. $\Longrightarrow$ L'angolo BAM ≅ $\Longrightarrow$ [[….]]
2) 3)

6)Soluzione proposta da Del Bon Elena – Giammusso Alessio - 2° D (sezione scientifico matematico) - Liceo Nomentano - Roma



IPOTESI

1. [[ABD]] [ABC] triangolo rettangolo in A
2. $AC < AB$
3. M punto medio di BC
4. $ME \perp BC$
5. AH altezza di ABC
6. AE bisettrice di A

TESI

1. $M\hat{A}E = E\hat{A}H$
2. $AM = ME$
3. $M\hat{A}E = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$

Chiamo:
$A = \alpha$ [=90°]
$B = \beta$
$C = \gamma$
Punto di intersezione tra AE e BC = K

DIMOSTRAZIONE:

Considero il triangolo AMB:
È isoscele perché AM = MB (per conseguenza ipotesi 1 e 3) → $M\hat{A}B = A\hat{B}M = \beta$

Considero i triangoli AHC e ABC:

- $A\hat{H}C = C\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$ per ipotesi 5
- γ angolo in comune

- ⇨ i triangoli AHC e ABC sono simili per il primo criterio di similitudine; in particolare, $C\hat{A}H = \beta$

Considero le relazioni tra i seguenti angoli:
$C\hat{A}E = \beta + E\hat{A}H$
$B\hat{A}E = \beta + M\hat{A}E$
$C\hat{A}E = B\hat{A}E$ per ipotesi 6

- ⇨ $E\hat{A}H + \beta = M\hat{A}E + \beta$ → **$E\hat{A}H = M\hat{A}E$** per sottrazione di angoli congruenti

C.V.D. 1

Considero i triangoli MKE e AHK:

- $H\hat{K}A = E\hat{K}M$ perché angoli opposti al vertice
- $A\hat{H}K = K\hat{M}E = \frac{\pi}{2}$ per ipotesi 3 e 5
- ⇨ i triangoli MKE e AHK sono simili per il primo criterio di similitudine; in particolare, $H\hat{A}K$ $(= E\hat{A}H) = K\hat{E}M$

Considero il triangolo AME:
$A\hat{E}M = E\hat{A}H$
$E\hat{A}H = M\hat{A}E$

- ⇨ AEM = $M\hat{A}E$ → AME è isoscele → **AM = ME**

C.V.D. 2

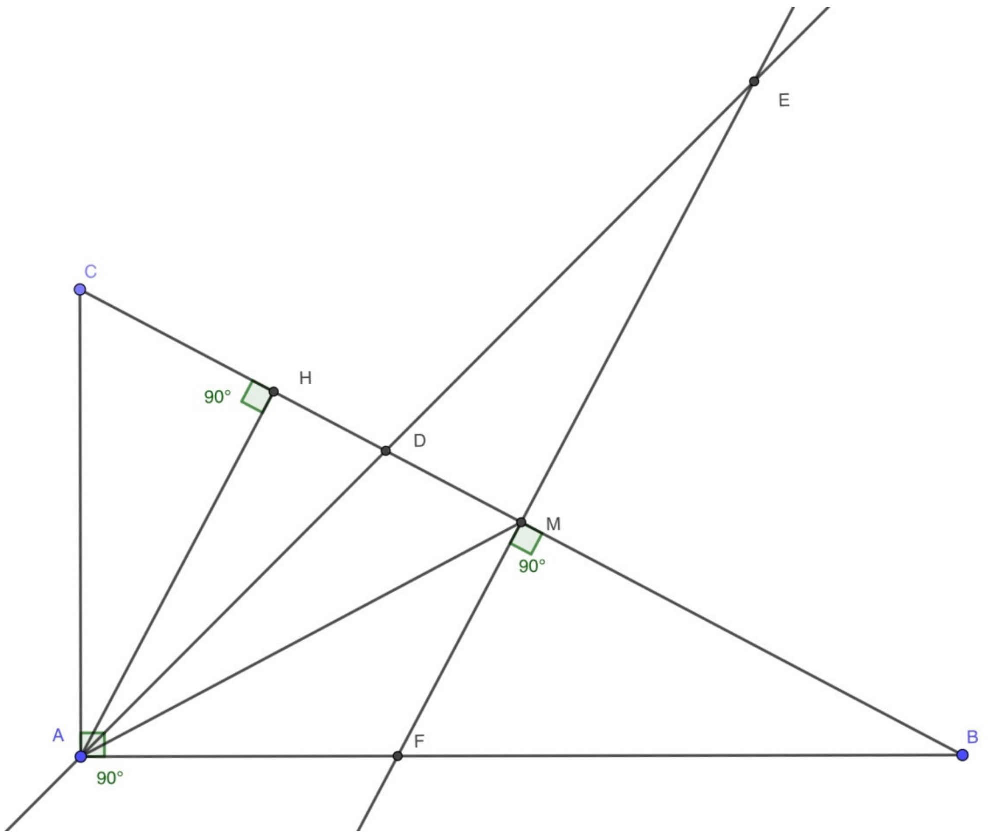
Sapendo che:
$\underline{\alpha = \beta + \gamma}$
e che:
$\underline{C\hat{A}H = \beta}$ (per dimostrazione precedente)

- ⇨ $H\hat{A}B$ $(= M\hat{A}H + \beta) = \gamma$ → $M\hat{A}H = \gamma - \beta$

  $M\hat{A}E = \frac{\mathbf{M\hat{A}H}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\gamma - \boldsymbol{\beta})$

C.V.D. 3

7)Soluzione proposta da Trovato Massimo, Classe II sez. M, Liceo Scientifico Galeazzo Alessi, Perugia



Ipotesi
ABC triangolo rettangolo in A
M punto medio di CB
AB>AC
AH altezza relativa all'ipotenusa
ME perpendicolare a BC
AE bisettrice di BÂC

Tesi

1. MẬE=EẬH
2. AM = ME
3. MẬE= $\frac{1}{2}$(Ĉ − $\hat{B}$)

Dimostrazione

NOTA: Tutti gli angoli vengono indicati in senso antiorario. Di seguito si indica con $\widehat{B}$ l'angolo C$\hat{B}$A e si indica con Ĉ l'angolo AĈB

Dimostro che HÂC=$\hat{B}$:
HÂC + CĤA + Ĉ= 180° (somma angoli interni di un triangolo).
Poiché CĤA= 90° per ipotesi, si ha che
HÂC + C = 90° poiché somma di angoli acuti in un triangolo rettangolo
Anche Ĉ + $\hat{B}$ + BÂC = 180° (somma angoli interni di un triangolo) e BÂC = 90° per ipotesi.

Quindi $\hat{C} + \hat{B} = 90°$.
Dalle affermazioni precedenti segue che $H\hat{A}C + \hat{C} = \hat{C} + \hat{B}$. E quindi $H\hat{A}C = \hat{B}$ (*)

Dimostro ora che $\hat{B} = B\hat{A}M$
$AM = \frac{1}{2}CB$ per il teorema della mediana in un triangolo rettangolo, da cui segue che AM = MB per cui il triangolo AMB è isoscele con base AB. Segue che $\hat{B} = B\hat{A}M$ (**) perché angoli alla base di un triangolo isoscele

Dimostro la Tesi 1
Poiché AE è bisettrice di $B\hat{A}C$ per ipotesi, si ha che $E\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{A}C = 45°$ e $B\hat{A}E = \frac{1}{2}B\hat{A}C = 45°$.
Allora $E\hat{A}H + H\hat{A}C = E\hat{A}C = 45°$ e $B\hat{A}M + M\hat{A}E = B\hat{A}E = 45°$.
Quindi $B\hat{A}M + M\hat{A}E = E\hat{A}H + H\hat{A}C$.
Per quanto detto precedentemente (*) e (**) si ha che $\hat{B} + M\hat{A}E = E\hat{A}H + \hat{B}$ da cui
$M\hat{A}E = E\hat{A}H$ (Tesi 1)

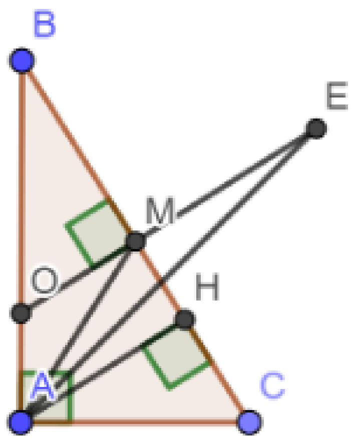
Dimostro la Tesi 2
Poiché AH ed ME sono entrambi perpendicolari a BC, da ciò deriva che AH // ME

$A\hat{E}M = E\hat{A}H$ perché alterni interni rispetto a AH e ME con trasversale AE.
Poichè per la Tesi1 $E\hat{A}H = M\hat{A}E$, segue, per la proprietà transitiva, che $A\hat{E}M = M\hat{A}E$ e perciò AME isoscele sulla base AE.
Pertanto AM = ME(Tesi 2)

Dimostro la Tesi 3
Precedentemente si era detto che $\hat{C} + \hat{B} = 90°$ e che $M\hat{A}E + B\hat{A}M = 45°$ cioè $M\hat{A}E + \hat{B} = 45°$ (**)
Da cui
$\hat{C} + \hat{B} = 2(M\hat{A}E + \hat{B})$
$\hat{C} + \hat{B} = 2M\hat{A}E + 2\hat{B}$
$\hat{C} + \hat{B} - 2\hat{B} = 2M\hat{A}E$
$\hat{C} - \hat{B} = 2M\hat{A}E$ (Poiché AB>AC per ipotesi, segue che $\hat{C} > \hat{B}$ e quindi $\hat{C} - \hat{B} > 0$)
$\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{B}) = M\hat{A}E$ (Tesi 3)

8) Soluzione proposta da Maddalena Crapolicchio e Aurora Doronzo, Classe 1^ D Liceo Scientifico "C.Cafiero", Barletta (BAT)

Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con AB>AC. Dal punto medio M dell'ipotenusa tracciare la perpendicolare a BC che incontri in E la bisettrice dell'angolo retto in A. Detto H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, provare che:



Th:

a) MÂE=EÂH

b) MA=ME

c) MÂE= $\frac{1}{2}$(Ĉ-B̂)

Hp:

ABC triangolo rettangolo
ME⊥[[BE]] [BC]
AH⊥BC
BM=MC
BÂE=EÂC

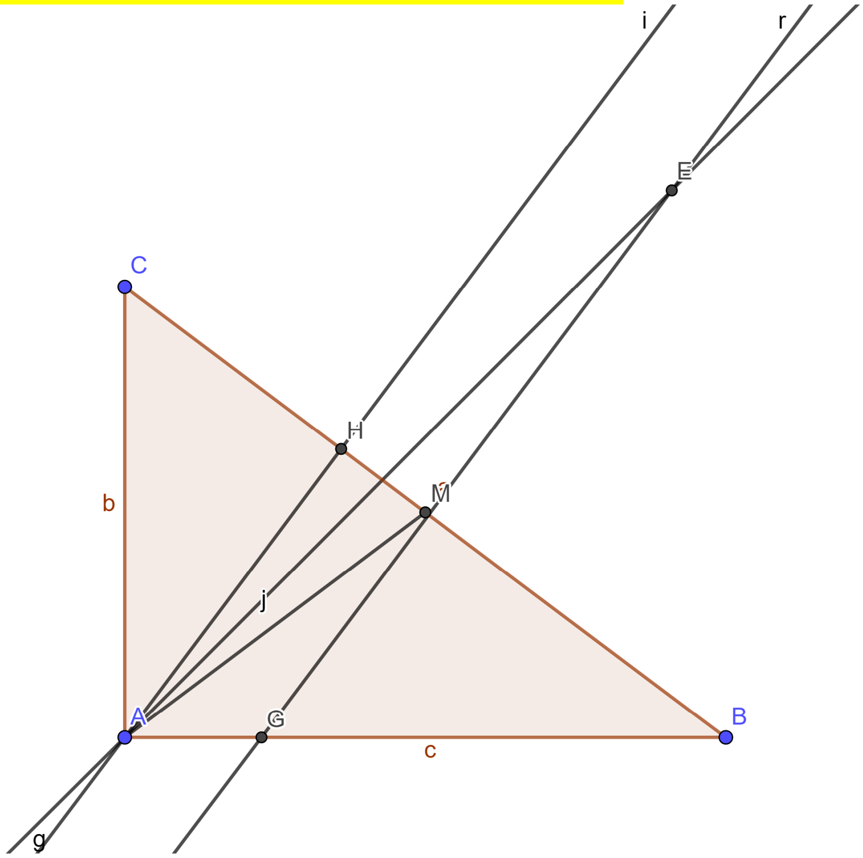
DIMOSTRAZIONE

a) ME⊥⊥[[BE]] [BC] => ME//AH

OM̂A=MÂH (perché alterni interni formati da OE//AH tagliate da [[EA]] [AM[)
[MAH]=OM̂A=MÂE+EÂH (1)
BM̂A=BM̂O+OM̂A   BM̂A=90°+OM̂A
Considerando il triangolo MAC (il quale è un triangolo isoscele per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa dei triangoli rettangoli) per il teorema dell'angolo esterno possiamo affermare anche che:
BM̂A=MÂC+AĈM=2MÂC [percio'] BM̂A=2(MÂE+EÂH+HÂC)

Perciò:
OM̂A+90°=2MÂE+2EÂH+2HÂC
Ma OMA=MAE+EAH per la dimostrazione (1), quindi:
MÂE+EÂH+90°=2MÂE+2EÂH+2HÂC => 90°=MÂE+EÂH+2HÂC (2) =>
2HAC=90°-MAE-EAH
Considerando l'angolo retto in Â possiamo anche affermare che:
Â=90°=MÂE+EÂH+HÂC+BÂM
HÂC+BÂM=90°-MÂE-EÂH
E per la dimostrazione (2):
2HÂC=90°-MÂE-EÂH
2HÂC=HÂC+BÂM => HÂC=BÂM (3)
In conclusione essendo BÂE e EÂC metà dell'angolo retto Â tagliato dalla bisettrice AE (BÂE=EÂC) e HÂC=BÂM per dimostrazione precedente possiamo affermare che:
BÂE=EÂC => BÂM+MÂE=EÂH+HÂC ,ma
[[MÂC]] [HAC]=BÂM => MÂE=EÂH (perché differenze di angoli congruenti)
b) EÂH=MÊA perché angoli alterni interni formati da OE//AH tagliate da AE,
EÂH=[[MÂH]] [MAE] per dimostrazione precedente, quindi per la proprietà transitiva MÂE=MÊA => il triangolo MAE è isoscele perché ha due angoli alla base congruenti => MA=ME
c) BĈA=MÂC per la dimostrazione (3)
AB̂C=HÂC e BÂM=AB̂M perché ABM isoscele
BĈA-AB̂C=MÂC-HÂC
(MÂE+EÂH+HÂC)-HÂC=Ĉ-B̂ => MÂE+EÂH=Ĉ-B̂
Poiché MÂE=EÂH
2MÂE=(Ĉ-B̂) => MÂE=$\frac{1}{2}$(Ĉ-B̂).

9) Soluzione proposta da MARIO SOLINAS, FEDERICO PAMPANELLI NICCHI, EMANUELE TEMPERONI, FRANCESCO CAPUCCINI, Classe 1 L, LICEO SCIENTIFICO "GALEAZZO ALESSI" PERUGIA



IPOTESI

ABC triangolo rettangolo in A

AB>AC

AE bisettrice di BÂC

La retta r perpendicolare a BC

M punto medio dell'ipotenusa BC

E punto di intersezione tra la retta r e la retta AE

AH altezza relativa a BC

TESI

1. MÂE=EÂH
2. AM=ME
3. MÂE=$\frac{1}{2}$(Ĉ-$\hat{B}$)

DIMOSTRAZIONE

1)Essendo ABC un triangolo rettangolo, per il teorema riguardante la mediana relativa all'ipotenusa AM = MB e AM= CM. Da ciò segue che i triangoli AMC e AMB sono isosceli sulle rispettive basi AC e AB.

Sia G il punto di intersezione della retta EM con AB.

L'angolo G$\widehat{M}$B è retto, in quanto r per ipotesi è perpendicolare a BC, pertanto M$\hat{G}$B = 90^0 - $\hat{B}$. Prendiamo in considerazione, ora, il triangolo ABC, retto per ipotesi in A; l'angolo B$\hat{C}$A = 90^0 - $\hat{B}$. Ne consegue che M$\hat{G}$B = B$\hat{C}$A, in quanto differenze di angoli congruenti.

Consideriamo, ora, il triangolo AHC che risulta essere retto in H, in quanto AH è l'altezza relativa all'ipotenusa BC. Perciò C$\hat{A}$H =90^0- $\hat{C}$. Relativamente al triangolo MGB osserviamo che 90^0 - M$\hat{G}$B = $\hat{B}$.

Poiché $\hat{C}$= M$\hat{G}$B, ne segue che $\hat{B}$ = C$\hat{A}$H. Se $\hat{B}$= M$\hat{A}$B, in quanto AMB è isoscele; allora, per la proprietà transitiva M$\hat{A}$B = C$\hat{A}$H.

Essendo AE bisettrice di $\hat{A}$, allora E$\hat{A}$B = E$\hat{A}$C. Gli angoli MÂE e EÂH risultano uguali, in quanto differenze di angoli congruenti (E$\hat{A}$B = E$\hat{A}$C, M$\hat{A}$B = C$\hat{A}$H, E$\hat{A}$B - M$\hat{A}$B = E$\hat{A}$C- C$\hat{A}$H).

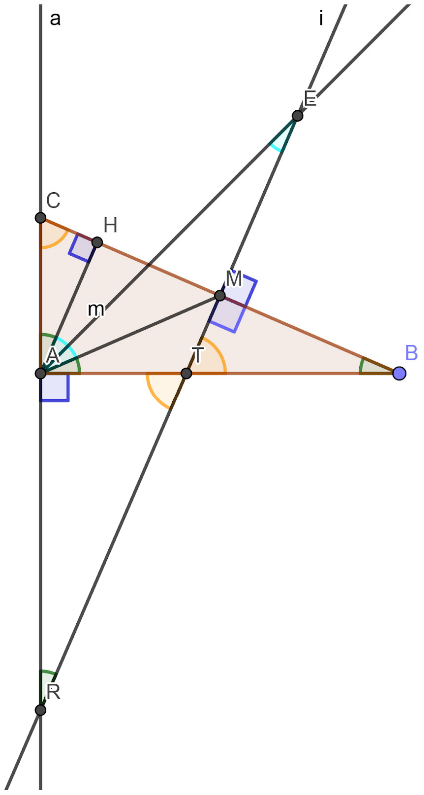
2)Le rette AH e ME sono parallele, in quanto tagliate dalla trasversale [[AE]] [CB] formano una coppia di angoli alterni interni congruenti (E$\widehat{M}$H =90^0e A$\widehat{H}$M=90^0).

Da ciò segue E$\hat{A}$H = M$\hat{E}$A, in quanto alterni interni rispetto alle rette parallele AH e ME tagliate dalla trasversale AE. Quindi se M$\hat{A}$E = EÂH = M$\hat{E}$A, per la proprietà transitiva M$\hat{A}$E= M$\hat{E}$A.

Dunque, il triangolo AME è isoscele sulla base AE e AM = ME.

3) Il triangolo CAM è isoscele sulla base CA per dimostrazione precedente, pertanto C$\hat{A}$M = $\hat{C}$. Essendo $\hat{B}$ = C$\hat{A}$H l'angolo M$\hat{A}$H=$\hat{C} - \hat{B}$. Pertanto se M$\hat{A}$H = 2 M$\hat{A}$E (M$\hat{A}$H= M$\hat{A}$E+ E$\hat{A}$H), allora M$\hat{A}$E = $\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}$.

10) Soluzione proposta da Jacopo Buratta, Miriam Castelli, Thomas O'Brien, Tommaso Gatto, Classe I Sez L, Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia



Ipotesi:

ABC= triangolo rettangolo con angolo retto in A

AB>AC

M punto medio dell'ipotenusa BC

m bisettrice dell'angolo in A

i □ CB

M є i

m ∩ i={E}

H piede dell'altezza relativa all'ipotenusa

Tesi:

1) MÂE=EÂH

2) AM=ME

3) MÂE=½(Ĉ-B)

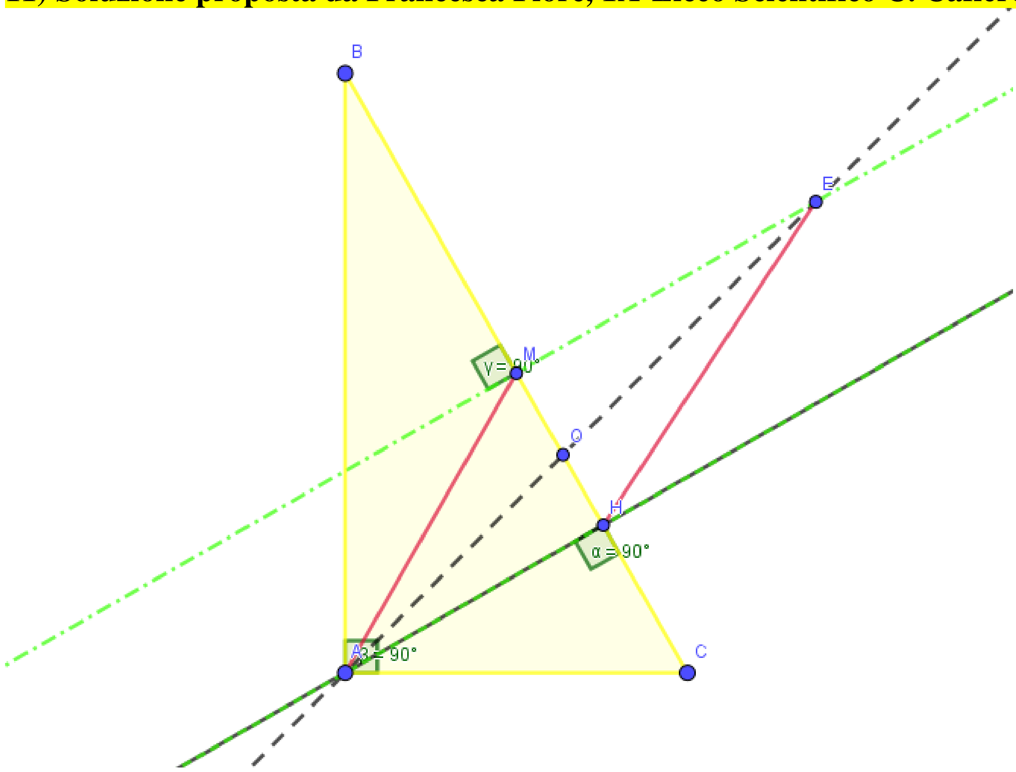
Dimostrazione:

Consideriamo i segmenti AH e ME. Essi sono paralleli perché tagliati dalla trasversale CB formano angoli corrispondenti congruenti [perché retti]. Chiamiamo T il punto di intersezione della retta [[I]] [i] con AB. Prolunghiamo il lato AC del triangolo dalla parte di A fino a incontrare la retta i in un punto R. Consideriamo gli angoli HÂC e T$\hat{R}$A, sono congruenti perché corrispondenti rispetto alle rette AH e i con trasversale RC. Consideriamo i triangoli AHC e RTA, hanno gli angoli congruenti perché hanno un angolo di 90°, hanno HÂC = T$\hat{R}$A , come dimostrato in precedenza, e A$\hat{C}$H=A$\hat{T}$R perché sono differenza tra angoli congruenti. Consideriamo, poi, i triangoli ATR e TBM, hanno gli angoli congruenti perché RÂT e T$\hat{M}$B retti, e gli angoli in T opposti al vertice. Perciò per la proprietà transitiva CHA e TMB hanno gli angoli congruenti e dato che AMB è isoscele, perché la mediana è congruente alla metà dell'ipotenusa, allora TÂM è congruente a HÂC. Perciò visto che TÂE=EÂC allora per differenza di angoli congruenti consegue MÂE=EÂH. (tesi 1)

Consideriamo il triangolo AME, dimostriamo che l'angolo in E e l'angolo in A sono congruenti. Poiché MÂE=EÂH per dimostrazione precedente e EÂH=A$\hat{E}$M perché alterni interni rispetto ad AH e ME tagliati dalla trasversale AE, per la proprietà transitiva [risulta] A$\hat{E}$M= MÂE. Consegue che MAE è isoscele sella base AE e quindi AM=ME. (tesi 2)

Consideriamo, ora, il triangolo ACM, è isoscele perché la mediana è congruente alla metà dell'ipotenusa e AM è mediana nel triangolo ABC. Consegue che l'angolo in C è congruente all'angolo in A. Poiché AB >AC per ipotesi, l'angolo Ĉ (opposto ad AB) è maggiore dell'angolo $\hat{B}$ (opposto ad AC) Possiamo perciò sottrarre a Ĉ l'angolo $\hat{B}$ (congruente a HÂC), e otteniamo MÂH che per quanto detto prima è congruente a 2MÂE ,   cioè   Ĉ-$\hat{B}$ =2MÂE.   Consegue che MÂE=½(Ĉ-B)   (tesi 3)

11) Soluzione proposta da Francesca Fiore, 1A-Liceo Scientifico C. Cafiero-Barletta



Ipotesi: ABC rettangolo
r⊥ BC, AH⊥ BC
[[BE]] [AE] bisettrice
TESI: 1. MAE =EAH (angoli)
2. AM=ME
3. ½(C-B)= MAE(angolo)

DIMOSTRAZIONE:

AH⊥ BC per ipotesi ∧ r⊥ BC per ipotesi ⇒ per proprietà parallele AH//r
1. OEH=OAH (angoli) [[perché coniugati interni tra //]] [i coniugati interni sono supplementari]
MAO=OEH (angoli) alterni interni tra // [quali ?]
[[.......]]