FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia - Problema 9-23 febbraio 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia dato il quadrato *ABCD*. Preso un punto *K* sul lato *BC*, la bisettrice dell'angolo $\widehat{KAD}$ interseca il lato *CD* nel punto *M*.
Provare che $\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$.
Motivare la risposta.

Commento

Sono giunte tre risposte, due da classi II e una da una classe III di tre licei scientifici.
Il problema assegnava un quadrato e un punto su uno dei suoi lati. Unito tale punto con uno dei vertici del lato opposto si doveva tracciare una particolare bisettrice e provare una relazione di uguaglianza tra le misure di tre segmenti della figura stessa.
Delle tre risposte, due sono corrette (seguendo strade diverse, una sintetica e una trigonometrica), mentre la terza aggiunge alle ipotesi del problema un'ulteriore ipotesi non presente nel testo e quindi non e' corretta.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

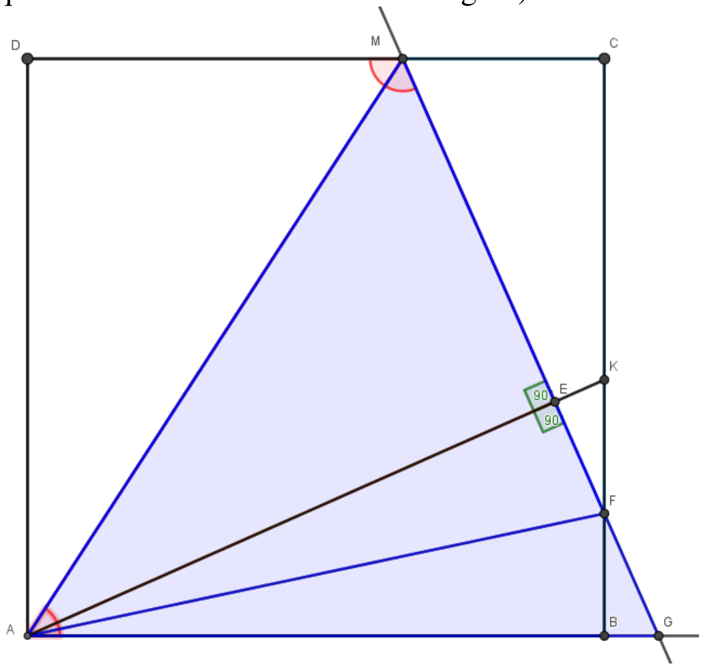
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Istituto di Istruzione Superiore "Telesi@", Telese Terme (BN)
- Liceo Scientifico "Galeazzo Alessi", Perugia.

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta dalla classe 3^ H Liceo Scientifico “Aristosseno”, Taranto

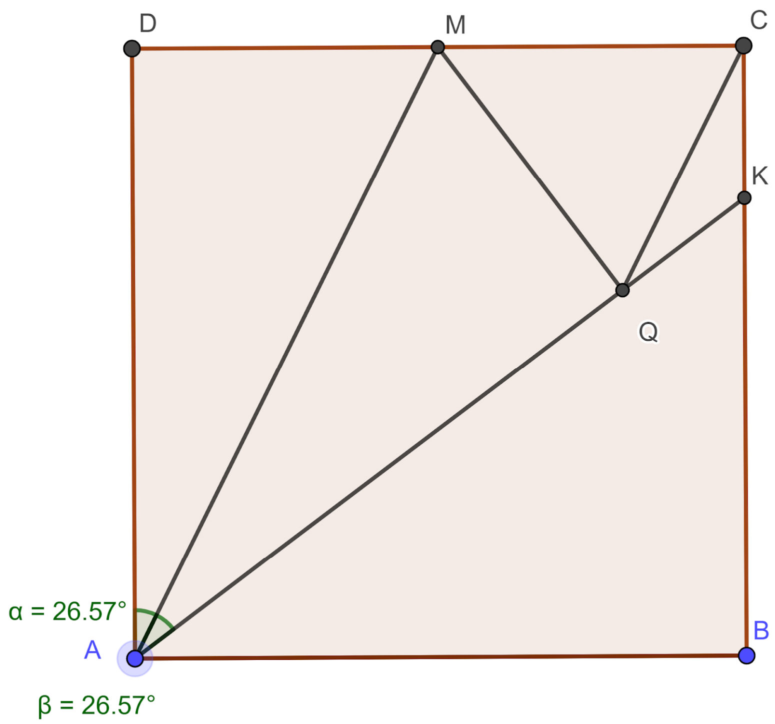
Costruiamo la figura come descritto e poi tracciamo dal punto M la perpendicolare al segmento AK, indicando con E , F e G i punti intersezione rispettivamente con AK , con il lato BC del quadrato e con il prolungamento del lato AB dello stesso .Osserviamo che DM = ME poiché i triangoli rettangoli ADM e AEM sono congruenti avendo l’ipotenusa in comune e gli angoli acuti di vertice A congruenti ,essendo AM la bisettrice dell’angolo $K\hat{A}D$ (il punto M appartiene alla bisettrice dell’angolo $K\hat{A}D$ ed è equidistante dai lati AD e AK dell’angolo) .



Osserviamo poi che il triangolo AGM è isoscele perché gli angoli $D\hat{M}A$ ed $M\hat{A}G$ sono congruenti in quanto alterni interni delle rette dei lati DC e AB tagliate dalla trasversale AM e gli angoli $D\hat{M}A$ e $A\hat{M}G$ sono pure congruenti perché i triangoli rettangoli ADM e AEM come già detto sono congruenti. Per la proprietà transitiva allora $M\hat{A}G = A\hat{M}G$ .Essendo isoscele il triangolo AGM ,i segmenti GA e GM sono congruenti .
Consideriamo infine i triangoli rettangoli AEG e ABK che hanno i cateti AE(= AD) = AB e l’angolo acuto BAK in comune ; questi triangoli sono congruenti e dalla loro congruenza segue che : EG = BK e GA = AK.
Possiamo perciò concludere che : AK = GA = GM = ME + EG = DM + BK .

2) Soluzione proposta da Manuela Mancino classe 3S2 IIS "Telesi@" Telese Terme (BN)

Link alla figura
https://www.geogebra.org/classic/ncxqafuc



Hp
$C\widehat{D}A \cong D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}D = 90°$ (*angoli di un quadrato*)

$DA \cong AB \cong AC \cong CD$ (*lati di un quadrato*)

$D\widehat{A}M \cong M\widehat{A}K$ (*AM bisettrice di* $D\widehat{A}K$)

$DM \cong MC$ (*M punto medio di DC*)

[nella seconda riga non è AC ma BC]

[perché M è punto medio di DC ?]

Th
$\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$

Dimostrazione

Si tracci da M la perpendicolare ad AK e sia Q il suo piede.
I triangoli rettangoli ADM e AMQ sono congruenti (secondo criterio di congruenza dei triangoli) perché hanno:

$$A\widehat{D}M \cong M\widehat{Q}A = 90°\,,$$

(il primo angolo è retto per ipotesi e il secondo per costruzione)

il lato AM in comune,
$D\widehat{A}M \cong M\widehat{A}Q$ *per ipotesi e*
$A\widehat{M}Q \cong D\widehat{M}A$ *perché complementari di angoli congruenti.*

Dalla congruenza segue che
$$\overline{AD} = \overline{AQ}.$$
(si ricordi anche che la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo)
Essendo $\overline{AD} = \overline{BC}$, *per la proprietà transitiva risulta*

$$\overline{AQ} = \overline{BC} = \overline{BK} + \overline{KC}$$

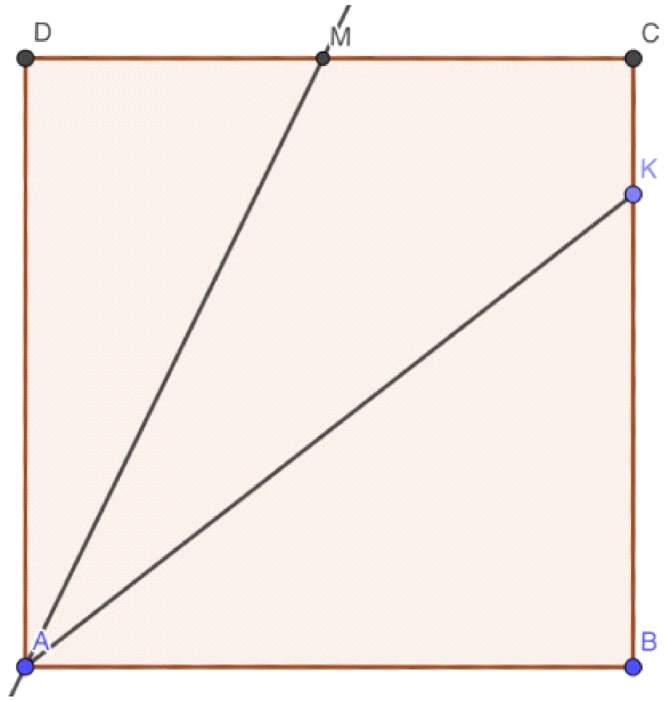
D'altra parte
$$\overline{AK} = \overline{AQ} + \overline{QK} = \overline{BK} + \overline{KC} + \overline{QK} = \overline{BC} + \overline{QK} = 2\overline{DM} + \overline{QK}$$

[BC non è 2DM !]

[[….]]

3) Soluzione proposta da Baldelli Chiara, Trovato Massimo, classe 2^M, Liceo scientifico statale “Galeazzo Alessi”, Perugia

Ipotesi	**Tesi**
ABCD è un quadrato	DM + BK=AK
AM bisettrice dell’angolo KÂD	



Dimostrazione

BÂK = 2α

MÂD = (90-2α)/2

MÂD = 45 - α

AB = AD = l

DM = l* tan (45- α)

BK = l* tan 2α

AK = l * (1/cos 2α)

Tesi: DM + BK=AK

Tesi = [l* tan (45- α)]+(l* tan 2α)=[l * (1/cos 2α)]

Tesi = tan (45- α) + tan 2α = 1/cos 2α

Tangente della differenza

$\tan(\beta - \alpha) = (\tan\beta - \tan\alpha)/[1 + (\tan\beta)(\tan\alpha)]$

Formule di duplicazione

[$\tan 2\alpha = (2\tan\alpha)/(1 - \tan^2\alpha)$] [[$\tan 2\alpha = (2\tan^2\alpha)/(1 - \tan^2\alpha)$]]

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Tesi = $\tan(45 - \alpha) + \tan 2\alpha = 1/\cos 2\alpha$

Tesi = [$(1 - \tan\alpha)/(1 + \tan\alpha) + (2\tan\alpha)/(1 - \tan^2\alpha) = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$]

[[$(1 - \tan\alpha)/(1 + \tan\alpha) + (2\tan^2\alpha)/(1 - \tan^2\alpha) = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$]]

[Verifica dell'uguaglianza] [[Risoluzione dell'equazione]]

$(1 - \tan\alpha)/(1 + \tan\alpha) + [(2\tan\alpha)/(1 - \tan\alpha)/(1 + \tan\alpha)] = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$[(1 - \tan\alpha)^2 + 2\tan\alpha]/(1 - \tan^2\alpha) = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$(1 + \tan^2\alpha)/(1 - \tan^2\alpha) = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$[1 + (\sin^2\alpha/\cos^2\alpha)]/[1 - (\sin^2\alpha/\cos^2\alpha)] = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

[[$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)/\cos^2\alpha]/[(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)/\cos^2\alpha] = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$] [e' scritto per due volte $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ invece di $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$]

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

[che è una identità e quindi la tesi è vera.] [[Il risultato dell'equazione è un' identità.

Se l'equazione derivante dalla tesi è un'identità allora la tesi è vera]].