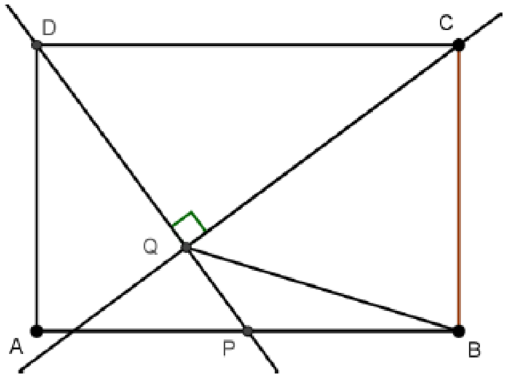
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia, Problema 13 - 27 gennaio 2018 – Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

ABCD è un rettangolo e P è il punto medio di AB.
Il punto Q è il piede della perpendicolare condotta da C sulla retta PD.
Provare che il triangolo BCQ è isoscele esaminando sia il caso in cui Q è interno al rettangolo sia il caso in cui Q è esterno al rettangolo.



Motivare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte tre risposte, due da classi II (???) e una da una classe III di tre Licei Scientifici.

Il problema chiedeva di dimostrare che un certo triangolo, ottenuto mediante una opportuna costruzione fatta su un rettangolo, risultava isoscele (senza specificare su quale base), distinguendo due possibili casi nella costruzione della figura stessa.
Le tre risposte giunte sono tutte corrette e ben motivate. Avremmo comunque preferito una dimostrazione esplicita (ancorché analoga alla precedente) anche per il caso in cui il punto Q risultasse esterno al rettangolo.

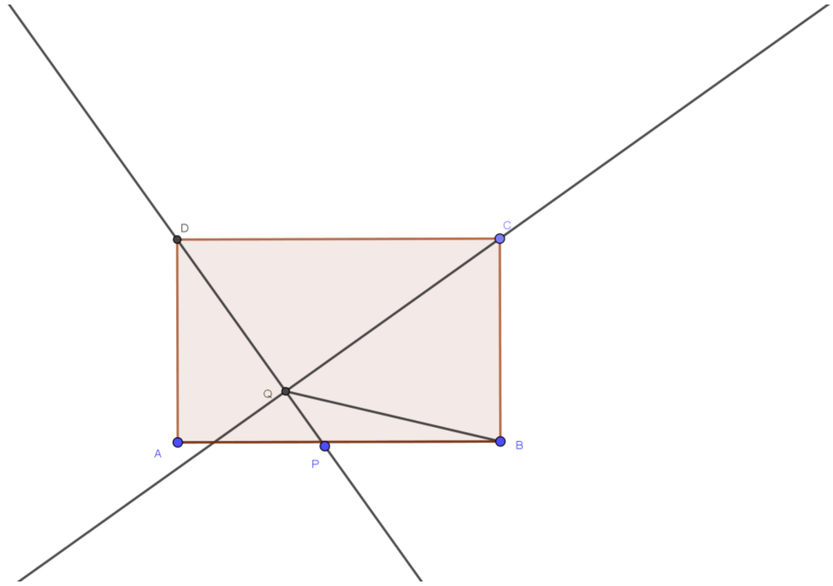
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- L.S. Pitagora, Rende (CS)
- L.S. Aristosseno, Taranto
- L.S. Galilei, Alessandria.

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

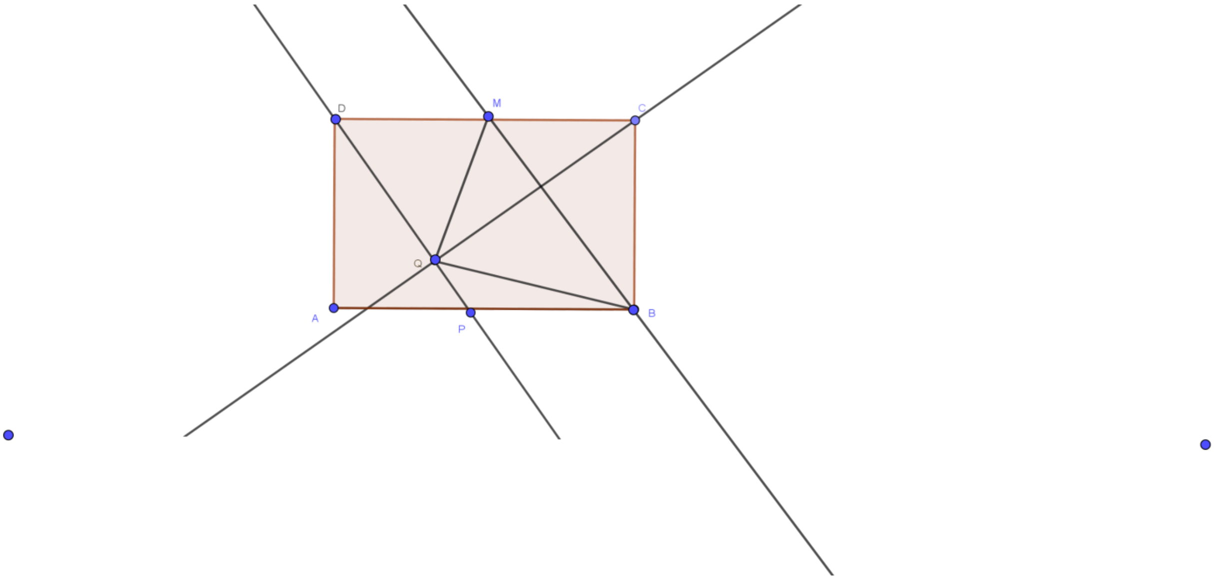
Soluzioni

1) ***Giorgia Delle Donne, Classe Classe??? Liceo Scientifico-Linguistico Pitagora, Rende(CS)***



1° caso: Q interno alla figura.

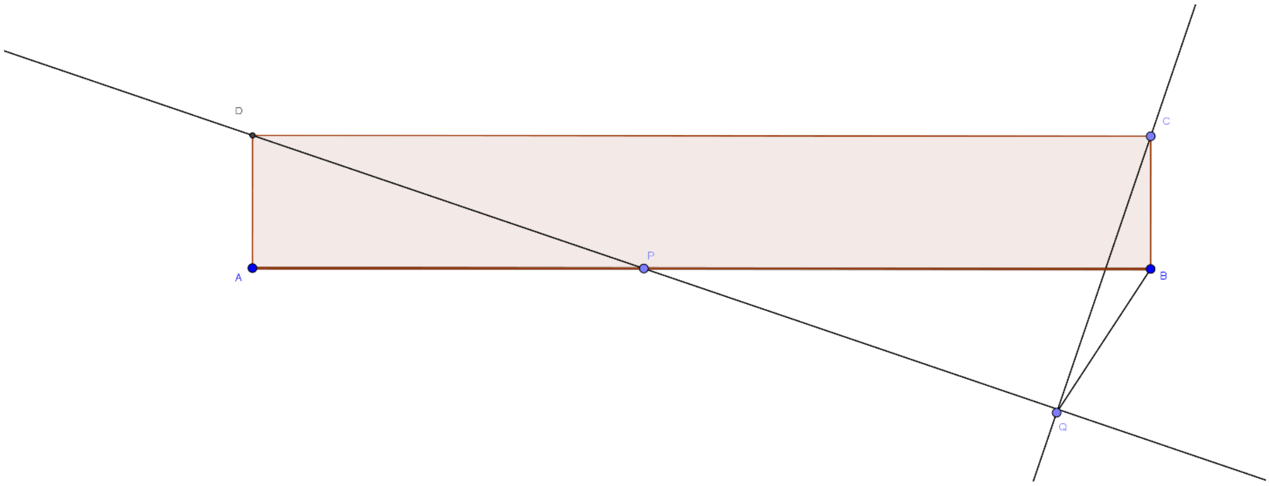
DIMOSTRAZIONE 1° CASO:

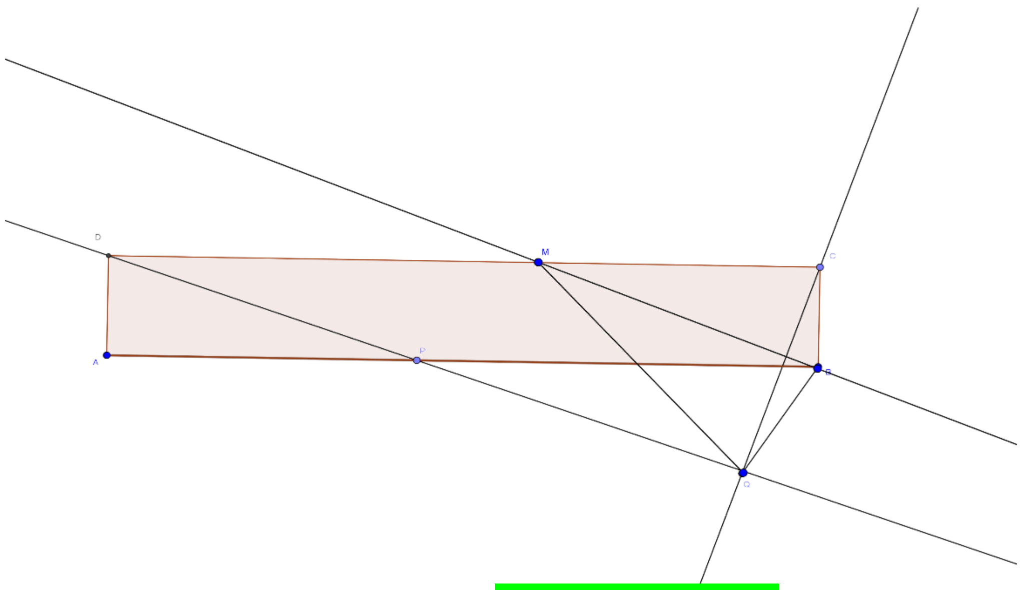


Traccio il segmento *BM* parallelo al segmento *DP*. Il quadrilatero *PBMD* è un parallelogramma poiché i suoi lati opposti sono paralleli in quanto *DP* parallelo a *BM* per costruzione e *DM* parallelo a *PB* per ipotesi. I lati opposti di un parallelogramma sono congruenti e quindi $DM \cong PB$ e poiché *P* è il punto medio di *AB*, allora, anche *M* sarà il punto medio di *DC*. Il triangolo *DQC* è rettangolo in quanto per ipotesi *CQ* è perpendicolare a *DP* e quindi *MQ* è la mediana di *DC*. Poiché “in ogni triangolo rettangolo la mediano relativa all’ipotenusa è congruente alla metà dell’ipotenusa stessa”, allora $MQ \cong MC$. Segue che il triangolo *QMC* è isoscele. Per ipotesi *CQ* è perpendicolare *DP* e poiché *DP* è parallelo a *MB*, allora anche *MB* è perpendicolare a *QC* e di conseguenza *MB* è l’asse di *QC*. Il punto *B*, appartenendo all’asse *MB* è quindi equidistante dagli estremi del segmento *QC*, quindi $QB \cong BC$. Il triangolo *QBC* è, quindi, isoscele.

2° caso: Q ESTERNO ALLA FIGURA

DIMOSTRAZIONE 2° CASO:

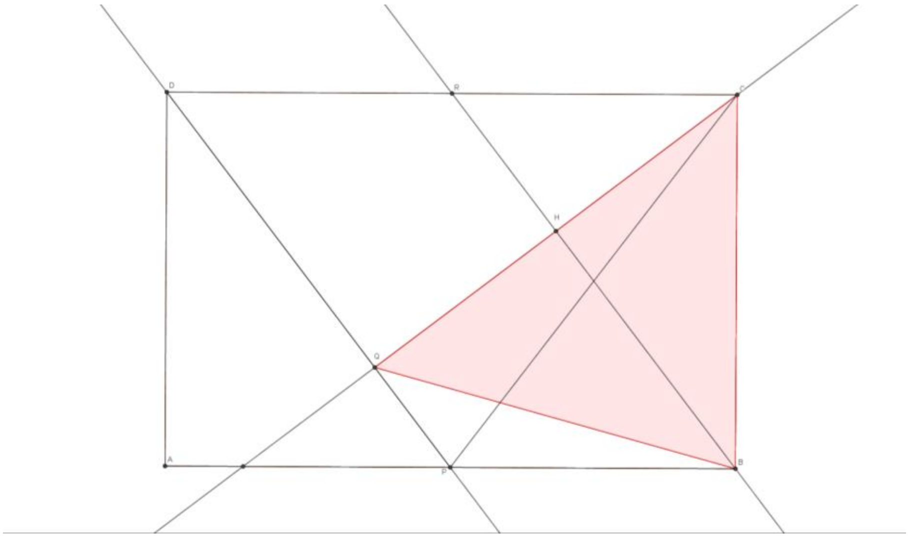




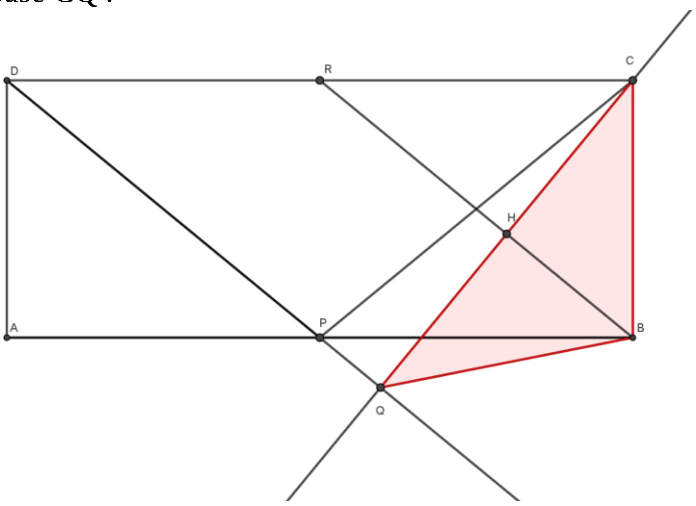
La dimostrazione del secondo caso è [[unanime]] [analoga] alla dimostrazione del primo caso. [La figura non sembra fatta molto bene, P di certo non è il punto medio di AB].

2)Soluzione della Classe 2 H Liceo Scientifico Aristosseno, Taranto

Soluzione proposta dalla classe 2 H liceo Scientifico Aristosseno Taranto



Indichiamo con R il punto medio del lato CD del rettangolo e congiungiamo B con R . Il quadrilatero PBRD è un parallelogramma perché ha i due lati opposti PB e RD congruenti e paralleli. Saranno quindi congruenti e paralleli anche gli altri due lati PD e BR. Essendo CQ perpendicolare a PD , CQ sarà anche perpendicolare a BR (se due rette sono parallele ogni retta perpendicolare all'una è anche perpendicolare all'altra).
Indichiamo con H il punto intersezione di CQ con BR. Ora applichiamo il teorema di Talete alle rette parallele dei segmenti PD e BR ,tagliate [[dalla trasversale(e perpendicolare) CQ]] [dalle trasversali CD e CQ (e perpendicolari)] .
Essendo RD congruente a CR ,sarà QH congruente ad HC e pertanto nel triangolo BCQ il segmento BH è sia altezza che mediana sulla base CQ. Si deduce da questo che il triangolo BCQ è isoscele sulla base CQ .



Nel caso in cui il punto Q è esterno al rettangolo ,le considerazioni sono analoghe.

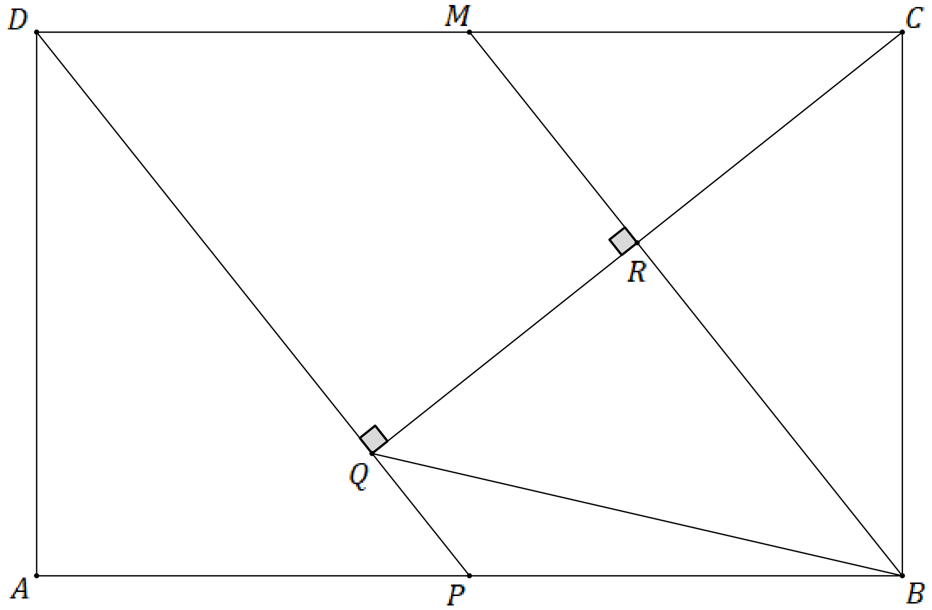
3) *Luciano Spettoli, Classe 3^E, Liceo Scientifico "G. Galilei", Alessandria*

Ipotesi:

- $ABCD$ è un rettangolo
- $\overline{AP} \cong \overline{BP}$
- $\overline{CQ} \perp \overline{DP}$

Tesi:

- Il triangolo BCQ è isoscele



Dimostrazione:

Poiché, per ipotesi, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$, allora $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} = 2 \cdot \overline{AP} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

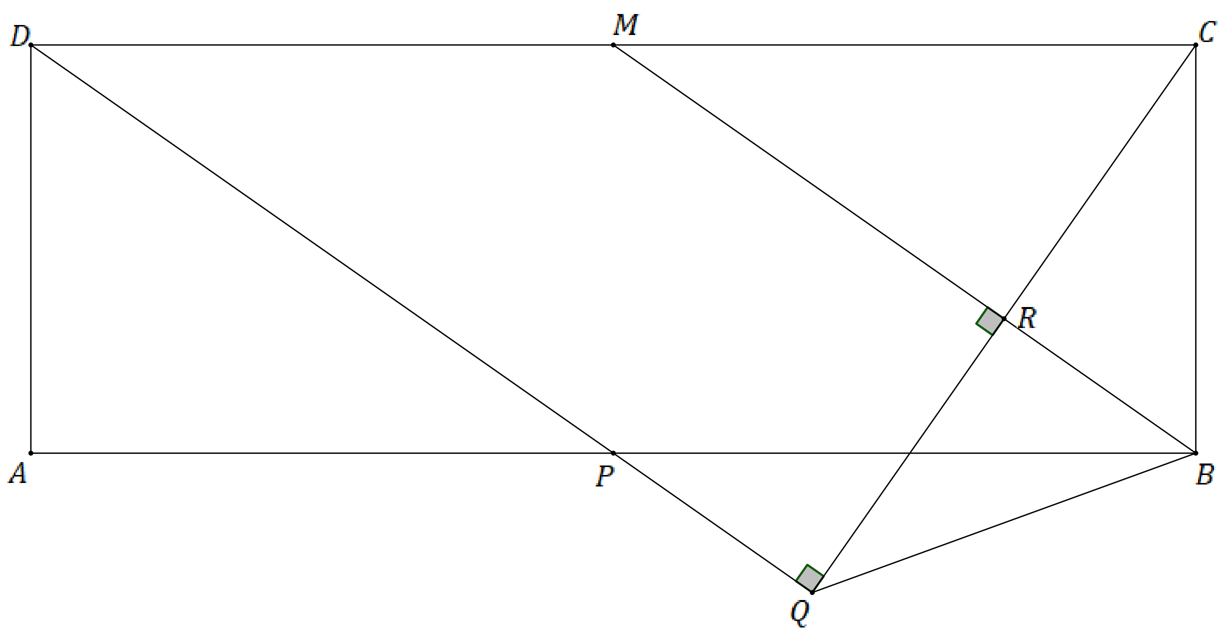
Creiamo un punto: $M | M \in \overline{CD} \wedge \overline{CM} \cong \overline{DM}$: dunque $\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{DM} = 2 \cdot \overline{CM} \Rightarrow \overline{CM} = \frac{\overline{CD}}{2}$.

Poiché, per ipotesi, $ABCD$ è un rettangolo, allora $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAD} \cong \widehat{BCD} = 90°$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; da quest'ultima ricaviamo $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{AP} \cong \overline{CM}$.

I triangoli ADP e BCM sono congruenti per il primo criterio di congruenza, infatti $\widehat{BAD} \cong \widehat{BCD}$ ([[per precedente dimostrazione]] [perché angoli retti]), $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ([[per precedente dimostrazione]][perché lati opposti di un rettangolo]) e $\overline{AP} \cong \overline{CM}$ (per precedente dimostrazione). I triangoli sono congruenti e hanno rispettivamente congruenti tutti i loro elementi, in particolare $\widehat{APD} \cong \widehat{BMC}$ e $\widehat{ADP} \cong \widehat{MBC}$.

Per la somma degli angoli interni nel triangolo BCM, abbiamo $180° = \widehat{BCM} + \widehat{BMC} + \widehat{CBM}$, da cui si ricava $\widehat{CBM} = 180° - \widehat{BCM} - \widehat{BMC} = 180° - 90° - \widehat{APD} = 90° - \widehat{APD}$. Gli angoli $\widehat{ABM}$ e $\widehat{CBM}$ [[sommano]][danno per somma] in $\widehat{ABC}$, che è retto ([[per precedente dimostrazione]][è uno degli angoli del rettangolo]), dunque $\widehat{ABM} + \widehat{CBM} = 90° \Rightarrow \widehat{ABM} = 90° - \widehat{CBM}$, e, sostituendo, $\widehat{ABM} = 90° - \left(90° - \widehat{APD}\right) \Rightarrow \widehat{ABM} \cong \widehat{APD}$. I segmenti $\overline{DP}$ e $\overline{BM}$, quindi, formano angoli corrispondenti congruenti con il segmento $\overline{AB}$, e dunque sono paralleli: $\overline{DP} \parallel \overline{BM}$. In conseguenza di questa conclusione e della relazione $\overline{CQ} \perp \overline{DP}$ (ipotesi), è vero che $\overline{CQ} \perp \overline{BM}$, e dunque (chiamando R l'intersezione fra la retta BM e la retta CQ) $\overline{BR}$ è altezza del triangolo BCQ relativa al lato $\overline{CQ}$.

Poiché $\overline{DP} \parallel \overline{BM}$ (per precedente dimostrazione), e $\overline{CM} \cong \overline{DM}$ (per costruzione), allora, per il Teorema di Talete, $\overline{CR} \cong \overline{QR}$. Dunque $\overline{BR}$ è mediana del triangolo BCQ relativa al lato $\overline{CQ}$. Essendo lo stesso segmento ($\overline{BR}$) anche altezza dello stesso triangolo (BCQ) relativamente al medesimo lato ($\overline{CQ}$), per precedente dimostrazione, allora il triangolo BCQ è isoscele (con base $\overline{CQ}$): infatti solo nei triangoli isosceli esiste un lato le cui altezza e mediana coincidono.



La dimostrazione è indipendente dalla posizione di Q rispetto a $\overline{DP}$; è valida sia se $Q \in \overline{DP}$, sia se $Q \notin \overline{DP}$. È necessario, però, considerare la retta PD oltre al segmento.

[Non utilizzare la notazione $\overline{DP}$ quando si parla solo di segmenti e non della loro misura]