FLAT_landia_

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 12 – 26 Aprile 2018 commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Problema di Flatlandia 10 - 26 aprile 2018

Sia dato un tetraedro regolare di base il triangolo ABC e vertice V. Detto M il punto medio dell'altezza VH, provare che ogni lato della base è "visto" da M sotto un angolo retto, ossia gli angoli AMB, BMC e AMC sono retti.

Motivare la risposta.

Commento
Sono giunte solo tre risposte, da classi terze di Licei scientifici.
Abbiamo anche ricevuto la mail di un insegnante della Scuola secondaria di I grado. Ribadiamo che i problemi di Flatlandia possono essere proposti anche ad allievi nella Scuola secondaria di I grado, ai quali ovviamente non si chiederà la dimostrazione rigorosa di quanto affermato.

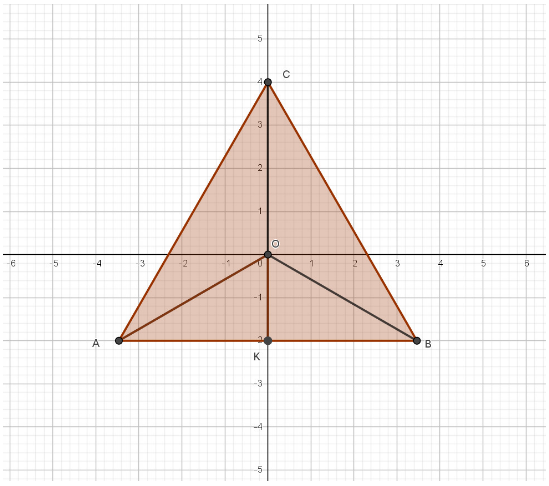
Il problema poneva un quesito su un tetraedro regolare e su una particolare proprietà del punto medio dell'altezza.
Le risposte giunte sono tutte corrette e ricorrono, per dimostrare che un certo triangolo è rettangolo, o all'inverso del teorema di Pitagora o alla proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli che riguarda la lunghezza della mediana relativa ad uno dei lati.
Notiamo però che continuano a persistere imprecisioni nella scrittura, che una attenta rilettura dell'elaborato potrebbe evitare.

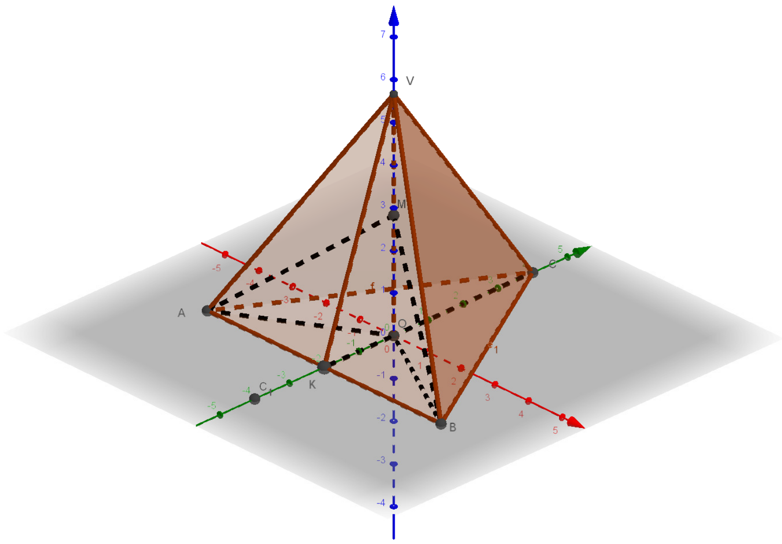
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento
- Liceo Scientifico "Alfano", Termoli (CB).

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

1)Soluzione proposta dalla Classe 3^H, Liceo Scientifico Aristosseno Taranto





Nel triangolo equilatero di base ABC del tetraedro , calcoliamo la misura di OK .Questa è pari a 1/3 dell'altezza CK poiché in un triangolo equilatero le altezze sono anche mediane e il centro O del triangolo è sia ortocentro che baricentro (oltrechè circocentro e incentro). Si ha pertanto :

$\overline{OK} = \frac{\overline{CK}}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$, dove abbiamo indicato con l la misura del lato del triangolo, nonché spigolo del tetraedro.

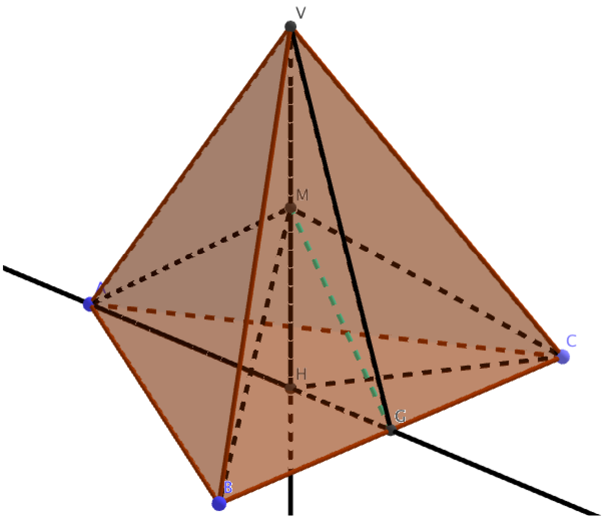
L'altezza VO del tetraedro è perpendicolare al piano della sua base ABC ; essa è perpendicolare a tutte le rette che escono dal suo piede O nel piano della base . Inoltre, il teorema delle tre perpendicolari ci assicura che , essendo (nel piano della base ABC),OK perpendicolare ad AB, sarà AB perpendicolare al piano individuato da VO e OK . Pertanto,guardando la faccia ABV , che è anch'essa un triangolo equilatero,VK è la sua altezza e la sua misura è $\overline{VK} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Calcoliamo ora la misura dell'altezza VO del tetraedro mediante il teorema di Pitagora : $\overline{VO} = \sqrt{\overline{VK}^2 - \overline{OK}^2} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$.

Detto M il punto medio dell'altezza VO del tetraedro, si ha che $\overline{MO} = \overline{VO}/_2 = \frac{l\sqrt{6}}{6}$.

Siccome il punto M appartiene all'altezza VO, anche i triangoli MOA e MOB ,indicati in figura ,e il triangolo MOC , non in vista,sono rettangoli in O .Questi triangoli sono a due a due congruenti essendo OA congruente ad OB e ad OC (raggi della circonferenza circoscritta al triangolo equilatero ABC) e OM il cateto comune. Si avrà perciò che MA≅MB≅MC . Se ne deduce quindi , ad esempio,che il triangolo AMB è isoscele sulla base AB (anche BMC e AMC lo sono). Affinchè l'angolo AMB sia visto secondo un angolo retto occorre che questo triangolo sia rettangolo in M . Calcoliamo quindi la misura di MA (che è la stessa di MB e di MC) mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo MOA :

$\overline{MA} = \sqrt{\overline{MO}^2 + \overline{AO}^2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ e da questo risultato deduciamo che, essendo $\overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$, il triangolo AMB è rettangolo in M . Analoghe considerazioni si possono ripetere per i triangoli BMC ed AMC .

2) Soluzione proposta da Sara Di Siena, III D, Liceo Scientifico "Alfano da Termoli", Termoli (CB)



Preso il punto G punto medio del lato BC, nonché piede dell'altezza del triangolo VBC relativa al lato BC [[trattandosi di un triangolo rettangolo,]] per dimostrare che BMC è un triangolo rettangolo basta dimostrare che MG sia congruente a metà del lato l.

Calcoliamo dunque l'altezza VH (che chiameremo h)del tetraedro in funzione del lato.
Essa è il cateto di un triangolo rettangolo che ha come ipotenusa [[MG]] [VG] e come altro cateto HG (che, essendo [[G]] [H] il baricentro del triangolo di base, esso è uguale a 1/3 della mediana, ossia un terzo dell'altezza):

$$h = \sqrt{\left(l * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} l * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(l * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{9}\left(l * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9} l^2 * \frac{3}{4}} = l * \frac{\sqrt{6}}{3}$$

calcoliamo [[GH]] [GM] in funzione del lato [nella seguente formula abbiamo corretto GH in GM]

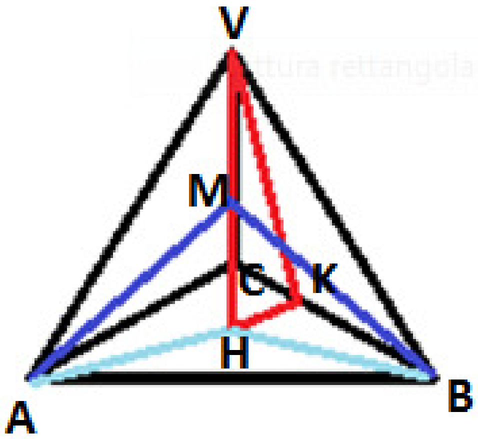
$$GM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} l * \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} l * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} l^2 + \frac{1}{12} l^2} = l * \frac{1}{2}$$

poiché [[GH]] [GM] , mediana relativa [[all'ipotenusa]] [al lato] BC del triangolo MBC, è congruente a metà del lato stesso => MBC è un triangolo rettangolo [in M].
Analogamente ciò può essere dimostrato per I triangoli AMC e AMB

CVD.

3) Soluzione di Mariachiara-Rosella-Liceo Scientifico "Rummo"-Benevento [non dice la classe!!!]

Dimostrazione relativa al problema di Aprile 2018 di Flatlandia.



IP: VM = [[MO]] [MH]
I triangoli ABC,VCB,VCA,VAB sono triangoli equilateri congruenti.
Il segmento VH altezza del solido.

TH: $A\widehat{M}B$,$B\widehat{M}C$,$A\widehat{M}C$ sono retti.

Chiamiamo il lato AB l e consideriamo il triangolo CBV. Il segmento VK è l'altezza del triangolo ed è quindi $\frac{l}{2}\sqrt{3}$.

Consideriamo ora la base ABC. Il punto H corrisponde al baricentro e all'ortocentro (il triangolo è equilatero). L'altezza e bisettrice AK è quindi congruente all'altezza VK. Per la proprietà del baricentro HK corrisponde alla terza parte di AK ed è quindi $\frac{l}{6}\sqrt{3}$.

Calcoliamo ora la lunghezza di VH con il teorema di Pitagora applicato sul triangolo HKV.

$VK^2 - HK^2 = VH^2$.

$$VH = \sqrt{VK^2 - HK^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ l$$

[sono state corrette le due formule con il – (meno) tra *VK* al quadrato e *HK* al quadrato]

MH è la metà di VH ed è quindi $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\ l$.

Consideriamo i triangoli MAH e MBH. Sono congruenti per il primo criterio di congruenza: MH in comune , AH = [[OB]] [HB] perché uguali ai 2/3 di segmenti congruenti e gli angoli MHA e MHB retti.

MA = MB perché si oppongono a segmenti congruenti in triangoli congruenti.

[[AO]] [AH] è i 2/3 di AK e quindi $\frac{\sqrt{3}l}{3}$

Calcoliamo la misura di AM applicando il teorema di Pitagora nel triangolo AMH.

MA = $\sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ l$

Dimostriamo ora che nel triangolo AMB sia verificato il teorema di Pitagora.

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 \rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\ l\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\ l\right)^2 = l^2 \rightarrow l^2 = l^2$$

L'uguaglianza è verificata e ciò dimostra che il triangolo ABM è rettangolo in M,cioè che $A\widehat{M}B$ è retto.

Un procedimento analogo può essere applicato sui triangoli [[BCV]] [BCM] e [[VCA]] [MCA] per dimostrare che $B\widehat{M}C$ e $A\widehat{M}C$ sono retti.

4) Abbiamo anche ricevuto questa lettera di un insegnante. In realtà si poteva assegnare il problema anche agli allievi della "Scuola Media". Dagli allievi di Scuola secondaria di I grado non si pretende una dimostrazione rigorosa. Si poteva risolvere il problema anche in modo intuitivo.

Soluzione problema 10-26 aprile

23 aprile 2018 15:57

A: flatlandia@unife.it

Buon giorno,
mi chiamo Mattia [redacted], sono un insegnante delle medie e come tale non posso somministrare i problemi ai miei ragazzi. Nonostante questo mi diverto ogni mese a risolvere i problemi.
Essendo io "solo" un biologo, ho risolto il problema utilizzando ripetutamente il teorema di Pitagora fino a dimostrare che la distanza tra il punto medio del lato della base ed M è metà della lunghezza del lato stesso e che, quindi i triangolo dati da M con i vertici dei lati di base sono rettangoli in M.
La mia domanda è questa, c'era una soluzione più "elegante", meno macchinosa?
Mi scuso ancora se vi faccio perdere del tempo, ma è dalla sera in cui è uscito il problema che vorrei scrivervi e ho aspettato per non risultare un insegnante a caccia di soluzioni.
Vi ringrazio, che vogliate rispondere oppure no.
Distinti saluti
[redacted] Mattia