FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 13 - 27 marzo 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

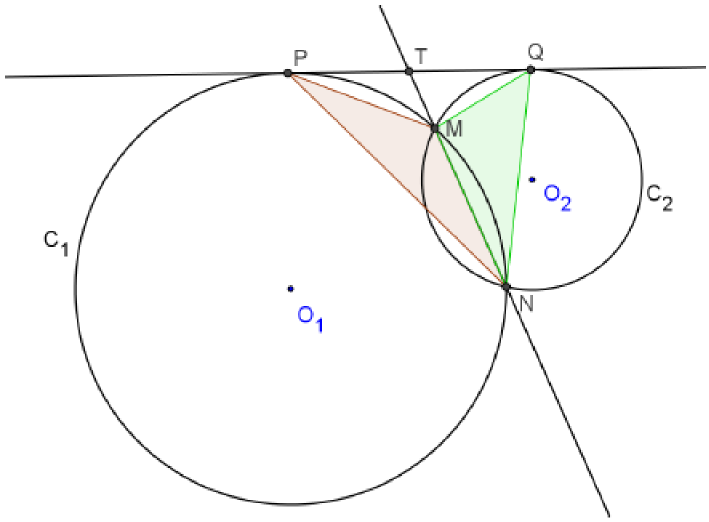
Il testo del problema

Flatlandia - Problema 13-27 Marzo 2017

Due circonferenze C_1 e C_2 si intersecano nei punti M ed N e hanno una tangente comune che le incontra nei punti P e Q (vedi figura). Sia T il punto di intersezione delle rette MN e PQ.

1) Provare che T è il punto medio di PQ.
2) Dimostrare che i triangoli MNP e MNQ sono equivalenti.

Motivare tutte le risposte.



Commento

Sono giunte 7 risposte, da classi II di Licei Scientifico, da una classe III Liceo Scientifico e da una classe III di un Istituto Tecnico Tecnologico.

Il problema poneva due quesiti relativi a due circonferenze secanti.
Nel primo si chiedeva, basandosi sulla figura proposta, di dimostrare che il punto T era il punto medio del segmento PQ individuato dalla tangente comune alle due circonferenze.
Nel secondo si chiedeva di dimostrare, a partire dalla risoluzione del precedente quesito, che due triangoli sono equivalenti.

Tutti rispondono in modo sufficientemente corretto ai due quesiti, ma non mancano errori e imprecisioni insieme, a volte, a inutili lungaggini. Qui teniamo a precisare che, parlando di altezze di un triangolo, è sempre bene precisare, per evitare equivoci, a quali lati del triangolo esse siano relative, questo perché triangoli con un lato e un'altezza congruenti non sono in generale equivalenti, mentre lo sono triangoli con un lato e la relativa altezza congruenti.
Consigliamo inoltre di rileggere sempre attentamente il proprio elaborato per evitare, come spesso accade, di incorrere in imprecisioni e sviste.

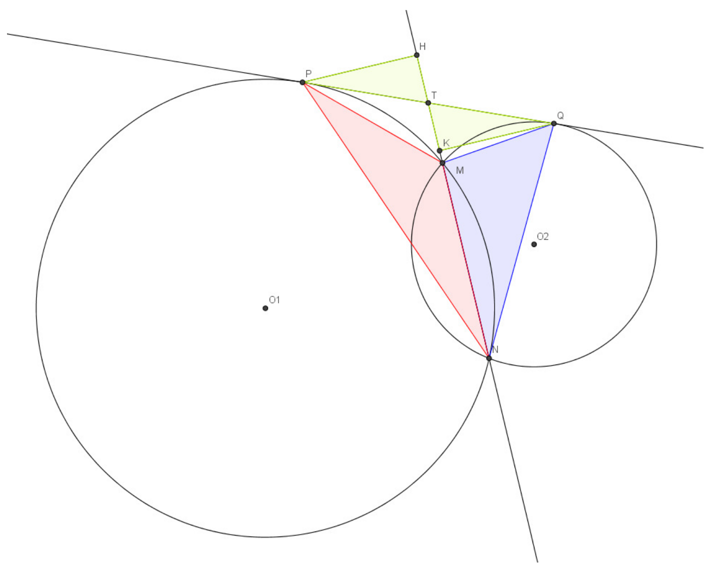
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo “Aristosseno”, Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico Scienze Applicate “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)
- Liceo “Bertrand Russell”, Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)
- Istituto Tecnico Tecnologico “Luigi Dell’Erba”, Castellana Grotte (BA)
- Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Alessandria (AL)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) ***Classe III H a indirizzo Liceo Scientifico, Liceo “Aristosseno”, Taranto (TA)***



1)Applichiamo il teorema della secante e della tangente a ciascuna delle due circonferenze e avremo:

TN : TQ = TQ : TM nella prima circonferenza , e :

TN : TP = TP : TM nella seconda circonferenza.

Dal confronto delle due proporzioni e dall’unicità della terza proporzionale otteniamo : TQ = TP e quindi il punto T è punto medio del segmento PQ.

2) Tracciate dai punti P e Q le distanze PH e [[PK]] [QK] dalla retta secante le due circonferenze, osserviamo che i triangoli rettangoli PHT e QKT sono congruenti .Essi infatti hanno le ipotenuse TQ e TP congruenti (come segue dal punto 1) e gli angoli PTH e QTK congruenti perché opposti al vertice. Dalla congruenza dei suddetti triangoli segue che PH è congruente a QK .I triangoli MNP e MNQ sono allora equivalenti perché hanno la stessa base MN (che è in comune) e le altezze [relative] PH e [[PK]] [QK] congruenti.

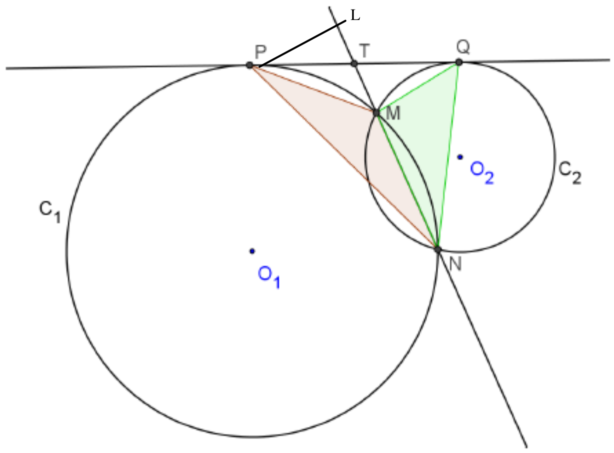
2)Carola Cambielli, 2T IIS-Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

Flatlandia - Problema 13-27 Marzo 2017

Due circonferenze C_1 e C_2 si intersecano nei punti *M* ed *N* e hanno una tangente comune che le incontra nei punti *P* e *Q* (vedi figura). Sia *T* il punto di intersezione delle rette *MN* e *PQ*.

1) Provare che *T* è il punto medio di *PQ*.
2) Dimostrare che i triangoli *MNP* e *MNQ* sono equivalenti.

Motivare tutte le risposte.



Per il teorema della secante e della tangente che dichiara:

"se tracciamo da un punto esterno della circonferenza una secante e una tangente, il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti che hanno un estremo nel punto esterno e l'altro in uno dei punti di intersezione della secante"

Possiamo affermare:

$$\left.\begin{array}{l} TN:TQ = TQ:TM \\ TN:TP = TP:TM \\ TM \times TN = TQ^2 \\ TM \times TN = TP^2 \end{array}\right\} TQ^2 = TP^2 \rightarrow TQ = TP$$

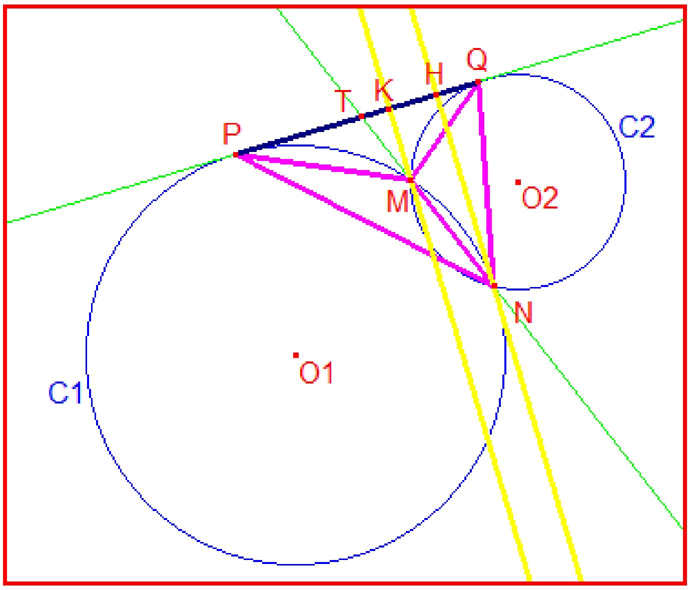
Traccio l'altezza [dov'è il punto B ?, forse è P] [[BL]] [PL] relativa al triangolo [[BMN]] [PMN].

Considero i triangoli [[BLT]] [PLT] e TMQ. Essi hanno:

- [[L'angolo TLB congruente all'angolo TMQ perché angoli retti]] [l'angolo TMQ non è retto]
- [[BT]] [PT] ≅ TQ per dimostrazione precedente
- L'angolo BTL congruente all'angolo MTQ perché angoli opposti al vertice

[[….]]

*3) **Beatrice Podini, 2T I.I.S.-Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)***



<u>IPOTESI</u>:

- M e N intersezioni fra $C1$ e $C2$.
- PQ tangente a $C1$ e $C2$.
- T intersezione fra la retta MN e la retta PQ.

<u>TESI</u>:

1) T punto medio di PQ.
2) MNP e MNQ equivalenti.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

1) Per il teorema della tangente e della secante condotte da uno stesso punto a una circonferenza, il segmento di tangenza PT a *C*1 è medio proporzionale [[ai]] [tra i] segmenti TM e TN, quindi **TN:PT = PT:TM**. Lo stesso vale per la circonferenza *C*2, perciò **TN:TQ = TQ:TM**. Chiamo TM *x* e TN *y* e ottengo quindi che $\boldsymbol{y \cdot x} = \mathbf{PT^2}$ e $\boldsymbol{y \cdot x} = \mathbf{TQ^2}$; ne deduco che **PT = TQ** e che quindi T è il punto medio del segmento PQ.

2) Traccio le altezze NH e MK rispettivamente dei triangoli PNQ e PMQ rispetto alla base PQ. I triangoli PTN e NTQ sono equivalenti perché hanno la stessa altezza NH e [[la base congruente]] [le basi relative congruenti] (PT = TQ per dimostrazione precedente). Lo stesso vale per i triangoli PTM e QTM che hanno la stessa altezza MK e come basi rispettivamente PT e TQ, quindi PMN e MNQ sono triangoli equivalenti perché differenza di figure equivalenti: **PMN=PTN-PTM** e **MNQ=NTQ-QTM**.

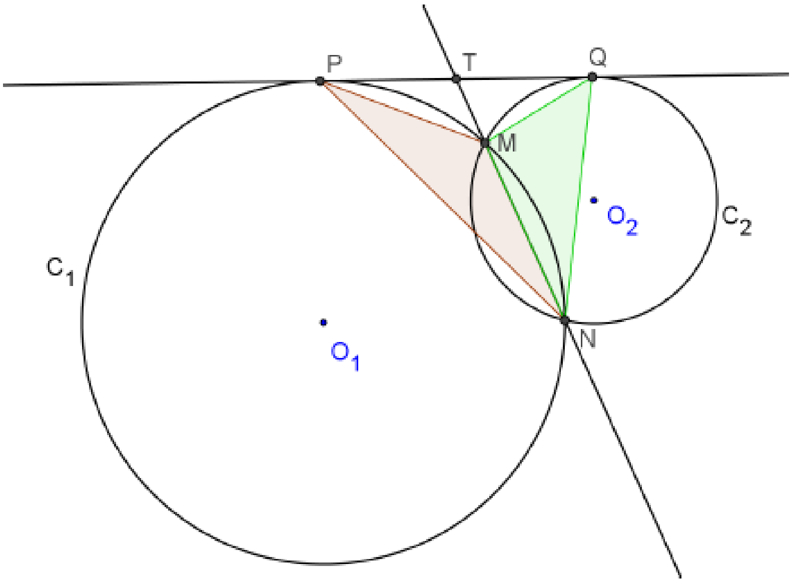
4) Giovanni Pellegrino, 3^A Chimica, I.T.T. "Luigi Dell'Erba", Castellana Grotte (BA)

Flatlandia - Problema 13-27 Marzo 2017

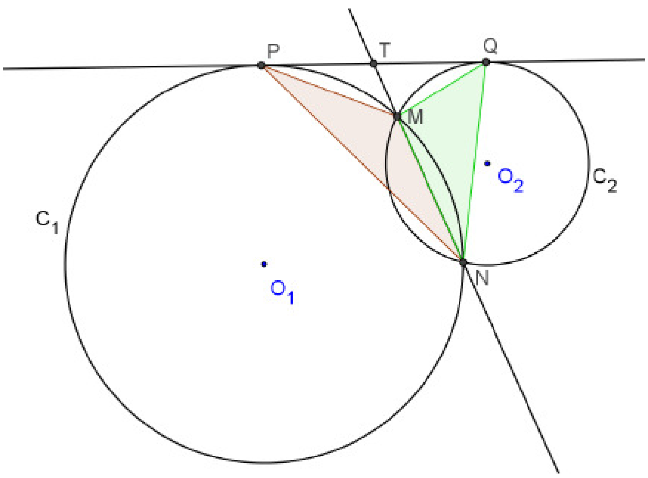
Due circonferenze C_1 e C_2 si intersecano nei punti *M* ed *N* e hanno una tangente comune che le incontra nei punti *P* e *Q* (vedi figura). Sia *T* il punto di intersezione delle rette *MN* e *PQ*.

1) Provare che *T* è il punto medio di *PQ*.
2) Dimostrare che i triangoli *MNP* e *MNQ* sono equivalenti.

Motivare tutte le risposte.



RISOLUZIONE



Prendendo in considerazione $\mathcal{C}_2$ (ovvero la circonferenza dal diametro minore), possiamo dire che il triangolo *NQT* è simile a *MQT*, in virtù del primo criterio di similitudine).
Infatti i due hanno un angolo in comune ([[MTP]] [MTQ]), e inoltre gli angoli $T\hat{Q}M$

TQM e QNTQNT sono uguali perché insistono sullo stesso arco di circonferenza (*QM*)
Da questo ragionamento, giungiamo al ***Teorema della Tangente e della Secante***, che in questo caso si realizza con la seguente proporzione:

$\overline{NT} : \overline{QT} = \overline{QT} : \overline{MT}$

Da cui:

$\overline{QT}^2 = \overline{MT} \times \overline{NT}$

Applicando tale teorema anche per $\mathcal{C}_1$, e quindi per i triangoli PTN e PTM, abbiamo che:

$\overline{NT} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{MT} \rightarrow \overline{PT}^2 = \overline{MT} \times \overline{NT}$

Dalle due formule ricavate, possiamo notare bene che:

$\overline{QT}^2 = \overline{PT}^2$

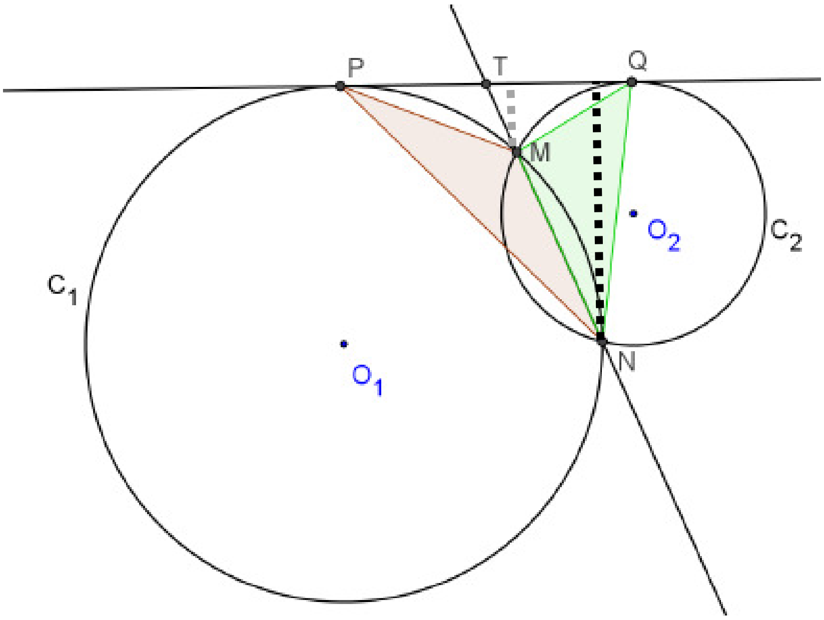
Pensando che una lunghezza non può essere negativa, si ha che:

$\overline{QT} = \overline{PT}$

Pertanto il punto T divide il segmento in due parti uguali, e può definirsi punto medio.

Alla luce di questa considerazione, possiamo dimostrare l'altra tesi secondo cui il triangolo *MNP* è [[congruente]] [equivalente] a *MNQ*.

Prendendo in considerazione i triangoli *NTQ* e *NTP*, questi sono [[congruenti]] [equivalenti] perché hanno la stessa base ($\overline{QT} = \overline{PT}$) e la stessa altezza (che corrisponde alla minima distanza tra il vertice in comune *N* e la retta di *PQ*). La stessa cosa avviene per i triangolini *PTM* e *QTM*.



Ricapitolando:

$NTQ = NTP$ [equivalenti]

$PTM = QTM$ [equivalenti]

Da cui:

$NTQ - PTM = NTP - QTM$ [equivalenti]

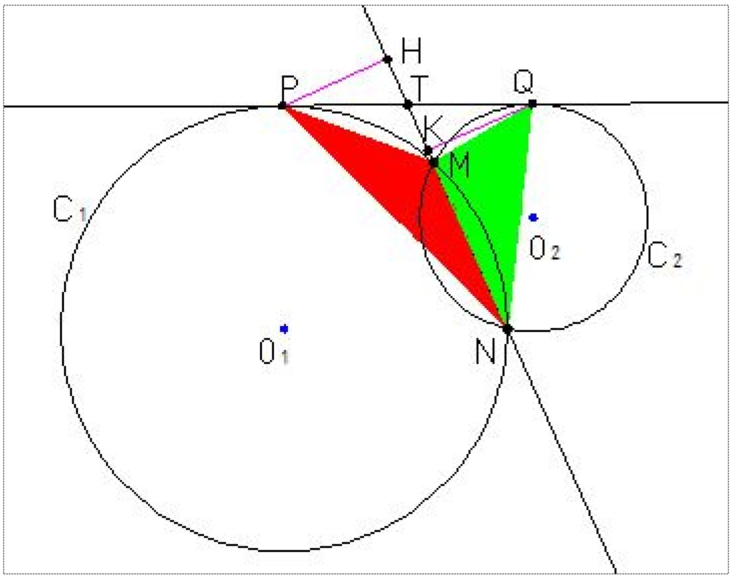
Sapendo che *MNP* è dato dalla differenza di [[*NTQ*]] [*NTP*] e *PTM*, e che invece [[*MNR*]] [MNQ] è pari a [[*NTP*]] [*NTQ*] meno *QTM*, abbiamo che:

[[$MNP = MNR$]] [MNP è equivalente a MNQ].

5)Alessandro Alemagna, 2^ T IIS-Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

IPOTESI:

1. PQ tangente di C_1 e C_2;
2. M,N punti di intersezione tra C_1 e C_2;
3. T punto di intersezione delle rette passanti per PQ e NM;



TESI:

1. Provare che T é il punto medio di PQ;
2. Dimostrare che i triangoli MNP e MNQ sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE TESI 1)
Consideriamo i triangoli NTP e MTP, sono simili perché:

- angolo in T in comune;
- TNP ≡ TPM perché angoli [alla circonferenza] che insistono sullo stesso arco PM;

Quindi vale la proporzione NT:TP = TP:TM; TP^2=TM*TN.
Analogamente considerando i triangoli NTQ e MTQ, si ottiene: TQ^2=TM*TN da cui TP^2= TQ^2 . [[e perciò TQ^2=TM*TN.]]
Quindi TQ ≡ TP e T é punto medio [di PQ.]
DIMOSTRAZIONE TESI 2)
Consideriamo H proiezione di P sulla retta TN e K la proiezione di Q su TN.
Consideriamo i triangoli PHT e QKT, sono congruenti per il secondo criterio di congruenza tra triangoli perché:

- PT ≡ TQ per dimostrazione precedente;
- HTP ≡ KTQ perché angoli opposti al vertice;
- PHT ≡ QKT perché sono retti.

Allora PH ≡ QK.
Consideriamo i triangoli PMN e QMN sono equivalenti perché:

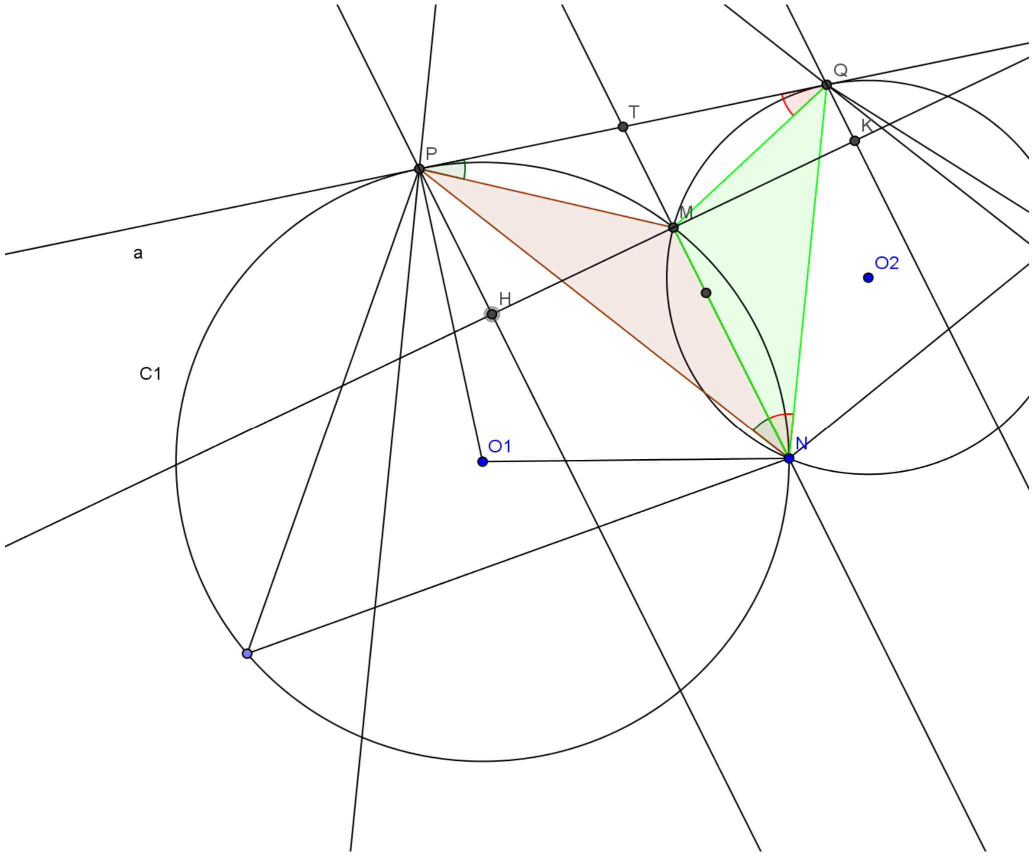
- MN in comune (base dei triangoli);
- PH ≡ QK (altezze relative dei triangoli);

6) Mattia Corrà, Classe 2^D IIS-Liceo "B. Russell", Cles (TN)

PUNTO 1: [manca la figura; non si riesce a visualizzare]

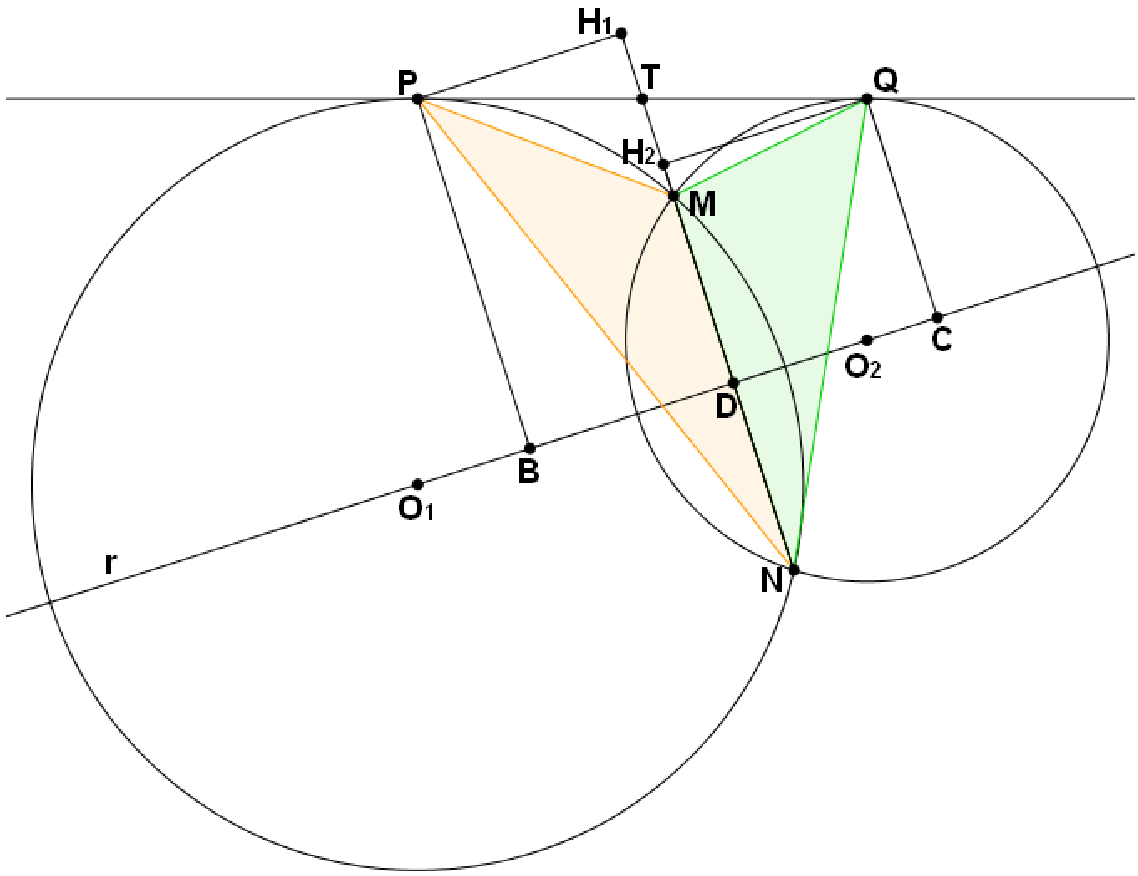
ip: C1 e C2 sono due circonferenze, M e N sono i due punti d'intersezione tra loro, la retta a è tangente ad entrambe le circonferenze e T è il punto d'intersezione tra i segmenti PQ e MN.
Ts:PT=TQ.
DIM:
Gli angoli QNT e MQT sono congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.
Questo vale anche per gli angoli PNT e MPT.
I triangoli QNT e MQT sono simili perché hanno due coppie di angoli congruenti (QNT = MQT e NTQ in comune), quindi il terzo è congruente per differenza.
Allora TQ è medio proporzionale tra TN e TM(TN:TQ=TQ:TM).
I triangoli PTN e PTM sono simili per lo stesso motivo e PT è medio proporzionale tra TN e TM [[(TN:TQ=TQ:TM)]] [TN:PT=PT:TM].
Allora TQ è congruente a TP dato che sono entrambi medi proporzionali degli stessi due segmenti (TN e TM).

PUNTO 2:



ip:C1 e C2 sono due circonferenze, M e N sono i due punti d'intersezione tra loro, la retta a è tangente ad entrambe le circonferenze, T è il punto d'intersezione tra i segmenti PQ e MN e PT=TQ.
Ts:I triangoli [[PNT e NQT]] [MNP e MNQ] sono equivalenti.
Traccio la perpendicolare alla retta per MN passante per M, traccio inoltre le due parallele a MN passanti rispettivamente per P e Q.
Per il teorema di Talete PT:HM=TQ:MK, PT=TQ allora HM=MK che sono le altezze relative alla base MN (in comune) dei due triangoli in questione.
Allora dato che questi due triangoli hanno base(MN) ed altezze congruenti sono equivalenti.
CVD.

7) Luciano Spettoli, Classe 2^E, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria



Ipotesi:

- La circonferenza di centro O_1 e raggio $\overline{PO_1}$ è tangente a $\overline{PQ}$ in P

- La circonferenza di centro O_2 e raggio $\overline{QO_2}$ è tangente a $\overline{PQ}$ in Q

- Le due circonferenze sono secanti in M e in N

Tesi:

1) Detta T l'intersezione tra la retta per M e N e il segmento $\overline{PQ}$, mostrare che $\overline{PT} \cong \overline{TQ}$

2) I triangoli MNQ e MNP sono equivalenti

Dimostrazione tesi 1:

Con il teorema della tangente e della secante si verificano le proporzioni: $\frac{\overline{TN}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{TM}}$ e $\frac{\overline{TN}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{TQ}}{\overline{TM}}$ da cui si ricava: $\overline{PT} = \sqrt[2]{\overline{TN} \cdot \overline{TM}}$ e $\overline{TQ} = \sqrt[2]{\overline{TN} \cdot \overline{TM}}$ e dunque, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza $\overline{PT} \cong \overline{TQ}$ e dunque T è il punto medio di $\overline{PQ}$.

Dimostrazione tesi 2:

Tracciamo la retta r passante per O_1 e O_2: essa interseca il segmento $\overline{MN}$ in D. Inoltre r è l'asse del segmento $\overline{MN}$ [[in quanto asse radicale delle due circonferenze]] [l'asse radicale è MN !!]: perciò $\overline{MN}$ è perpendicolare a $\overline{O_1O_2}$. Tracciamo la perpendicolare condotta da Q a r e chiamiamo C l'intersezione tra questa retta e r. Tracciamo anche la perpendicolare condotta da P a r e chiamiamo B l'intersezione tra questa retta e r. Le due rette tracciate sono perpendicolari alla stessa retta (r) e dunque sono parallele. Sfruttando anche il fatto che $\overline{PT} \cong \overline{TQ}$ (per precedente dimostrazione), allora, per il teorema di Talete, si ha $\overline{BD} \cong \overline{DC}$. Tracciamo l'altezza $\overline{PH_1}$ del triangolo MNP relativa al lato $\overline{MN}$: essa è necessariamente perpendicolare alla retta passante per M e N (per la definizione di altezza). Il quadrilatero $DBPH_1$ è un rettangolo poiché $\overline{BP}$ e $\overline{DH_1}$ sono perpendicolari a r (per precedente dimostrazione), e $\overline{PH_1}$ è perpendicolare a $\overline{BP}$ (per precedente costruzione); l'angolo $\widehat{PH_1D}$ è retto [[per la somma degli angoli interni di un quadrilatero]] [perché PH_1 è perpendicolare a MN]. Poiché $DBPH_1$ è un rettangolo (per dimostrazione precedente), allora lati opposti sono congruenti ed in particolare $\overline{PH_1} \cong \overline{\mathbf{BD}}$. Analogamente tracciamo l'altezza $\overline{QH_2}$ del triangolo MNQ relativa al lato $\overline{MN}$: essa è necessariamente perpendicolare alla retta passante per M e N. Il quadrilatero $DCQH_2$ è un rettangolo poiché $\overline{QC}$ e $\overline{DH_2}$ sono perpendicolare a r (per precedente dimostrazione), e $\overline{QH_2}$ è perpendicolare a $\overline{QC}$ (per precedente costruzione); l'angolo $\widehat{QH_2D}$ è retto [[per la somma degli angoli interni di un quadrilatero]] [perché QH_2 è perpendicolare a MN]. Poiché $DCQH_2$ è un rettangolo (per dimostrazione precedente), allora lati opposti sono congruenti ed in particolare $\overline{QH_2} \cong \overline{\mathbf{CD}}$.

Poiché, come già dimostrato, $\overline{PT} \cong \overline{TQ}$, allora, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, si ottiene [[$\overline{BD} \cong \overline{DC} \cong \overline{PH_1} \cong \overline{QH_2}$]] [$PH_1 \cong BD \cong CD \cong QH_2$] ed in particolare $\overline{PH_1} \cong \overline{QH_2}$. Poiché i triangoli MNP e MNQ hanno il lato $\overline{MN}$ in comune e hanno congruenti le altezze relative a quel lato ($\overline{PH_1} \cong \overline{QH_2}$, per dimostrazione precedente), allora sono equivalenti.

C.V.D.