FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

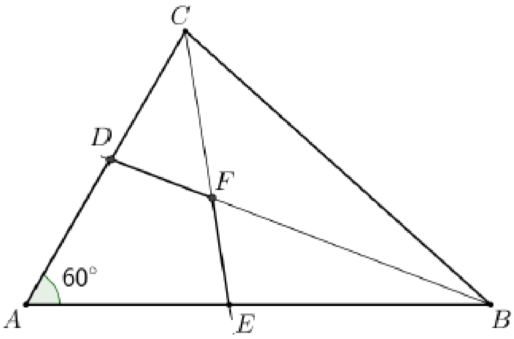
Flatlandia - Problema 8 - 22 maggio 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo con l'angolo in A di 60°. Siano BD e CE le bisettrici degli angoli in B e in C, che si incontrano nel punto F.

1) Provare che $AEFD$ è un quadrilatero ciclico (ovvero, un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza).

2) Provare che $BE + DC = BC$.
(Suggerimento: sia G il punto su BC tale che $DC=GC$, ...)



Motivare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte 4 risposte, da una classe I di Liceo scientifico e da tre classi II di Liceo Scientifico.

Il problema poneva due quesiti relativi a un triangolo con un angolo di 60°.
Nel primo si chiedeva di dimostrare che il quadrilatero, ottenuto dal triangolo tracciando le bisettrici dei due angoli diversi dall'angolo di 60°, è ciclico.
Nel secondo quesito si chiedeva di provare una particolare congruenza tra segmenti.

Tre delle risposte sono corrette, mentre la quarta parte dal presupposto, errato, che l'incentro di un triangolo abbia la proprietà di avere la stessa distanza dai piedi delle bisettrici, mentre invece l'incentro è equidistante dai lati del triangolo.
Non sempre è stato seguito il nostro consiglio di rileggere sempre attentamente il proprio elaborato per evitare, come spesso accade, di incorrere in imprecisioni e sviste.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico Scienze Applicate-IIS "A.Cesaris" Casalpusterlengo (LO)
- Liceo "Aristosseno", Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria (AL)
- Liceo "Bertrand Russell", Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

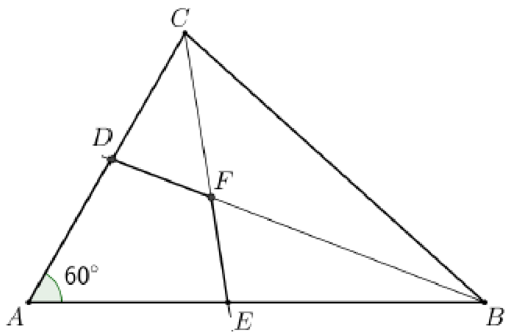
1) ***Carola Cambielli, Classe 2T, Liceo Scientifico Scienze Applicate-IIS "A.Cesaris" Casalpusterlengo (LO)***

Flatlandia - Problema 8 - 22 maggio 2017

Sia ABC un triangolo con l'angolo in A di 60°. Siano BD e CE le bisettrici degli angoli in B e in C, che si incontrano nel punto F.

1) Provare che $AEFD$ è un quadrilatero ciclico (ovvero, un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza).

2) Provare che $BE + DC = BC$.
(Suggerimento: sia G il punto su BC tale che DC=GC, ...)



1-DIMOSTRAZIONE PRIMO PUNTO

La somma degli angoli interni del triangolo ABC è 180 gradi. E' possibile affermare che:

$60° + 2\alpha + 2\beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 120°$

$\alpha + \beta = 60°$

L'angolo CFB siccome la somma degli angoli interni del triangolo è 180 gradi è:

$CFB = 180° - 60° = 120°$

Ma CFB è congruente all'angolo DFE perché angoli opposti al vertice quindi DFE=120°.

$DFE + DAE = 60° + 120° = 180°$

La somma degli angoli interni di un quadrilatero (ADFE) è 360°, perciò:

$360° - (DFE + DAE) = 360° - 180° = 180°$

LA SOMMA DEGLI ANGOLI OPPOSTI E' CONGRUENTE QUINDI IL QUADRILATERO ADFE E' INSCRIVIBILE IN UNA CIRCONFERENZA.

2-DIMOSTRAZIONE SECONDO PUNTO

Disegniamo il punto G su BC tale che DC = CG.

Considero il triangolo DCF e il triangolo CFG. Essi hanno:

2) L'angolo DCF congruente all'angolo FCG
3) CF in comune
4) CG = CD per ipotesi

Quindi per il primo criterio di congruenza il triangolo [[DCE]] [DCF] è congruente al triangolo [[DEG]] [CFG].

Ora considero il triangolo FGB e il triangolo FEB. Essi hanno:

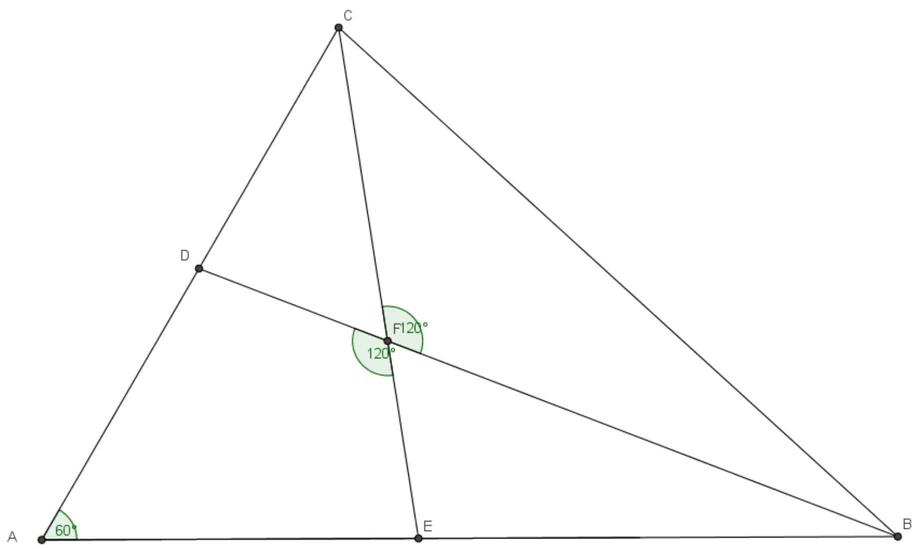
5) FB in comune
6) L'angolo FBE è congruente all'angolo FBG per ipotesi (BD bisettrice angolo ABC)
7) Angolo EFB è congruente all'angolo GFB per la seguente dimostrazione:
   DFE + EFB = 180° perché angolo piatto, quindi EFB=180-120=60°
   DFC = EFB perché angoli opposti quindi DFC=EFB=60°

DFC = CFG perché il triangolo [[CFC]] [CFD] è congruente al triangolo CFG per dimostrazione precedente, quindi DFC = CFG = 60°.
L'angolo GFB è uguale a 360°- (DFE+DFC+CFG+ EFB) = 360° - (120°+60°+60°+60°) =60°
GFB = EFB = 60°

Quindi per il secondo criterio di congruenza il triangolo FGB è congruente al triangolo FEB.
In particolare EB = GB.
Quindi:
CG + GB = CB
ma CG = DC e GB = EB
Per proprietà transitiva : BE+CD=BC.

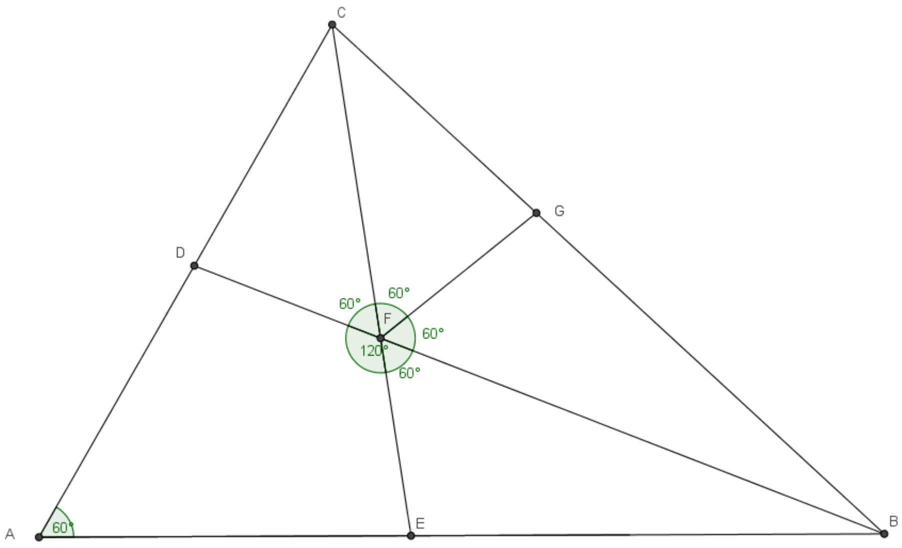
2-Classe I H, indirizzo Liceo Scientifico, Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)

Flatlandia –Problema Maggio 2017
Soluzione proposta dalla classe I H liceo Scientifico "Aristosseno" di Taranto



1) Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se gli angoli opposti sono supplementari.
La somma degli angoli del triangolo ABC è pari a 180° ,e poiché l'angolo in A ha ampiezza pari a 60° la somma degli angoli in B e in C sarà pari a 120°. Essendo BD e CE le bisettrici degli angoli in B e in C , si ha che : $C\hat{B}F + B\hat{C}F = 120°\frac{}{2} = \mathbf{60°}$ e quindi $B\hat{F}C = 180° - 60° = \mathbf{120°}$.
Ma $B\hat{F}C = E\hat{F}D$ perché sono angoli opposti al vertice , e quindi $E\hat{F}D = 120°$.
Nel quadrilatero AEFD la somma dei due angoli di vertici A e F è pari a 180° ed essendo la somma degli angoli interni di un quadrilatero pari a 360°,anche la somma degli altri due angoli opposti ,di vertici E e D, è pari a 180°. Questo dimostra che AEFD è un quadrilatero ciclico.

2) Consideriamo sul lato BC del triangolo il punto G tale che DC = GC .



Congiungendo il punto F con G ,osserviamo che i triangoli DFC e CFG sono congruenti per il I criterio di congruenza essendo :
CD = CG per costruzione
CF in comune
$D\hat{C}F = G\hat{C}F$, poiché CE è bisettrice dell'angolo di vertice C .
Dalla congruenza di questi triangoli si deduce che DFC = CFG e poiché $D\hat{F}C$ = 180°-120°=60° , anche $C\hat{F}G$ = 60°. Da questo deduciamo che FG è bisettrice dell'angolo $C\hat{F}B$,la cui ampiezza è 120°. Allora i triangoli GFB e BFE sono anch'essi congruenti per il II criterio di congruenza , infatti :
[[BE]] [BF] è in comune
$G\hat{F}B = B\hat{F}E$ = 60°
$G\hat{B}F = E\hat{B}F$, poiché BF è bisettrice dell'angolo di vertice B .
Dall'uguaglianza di questi due triangoli si deduce che BG = BE e quindi
Dall'essere BC = BG + GC, BG = BE e CG = DC si ha che BC = BE + DC .

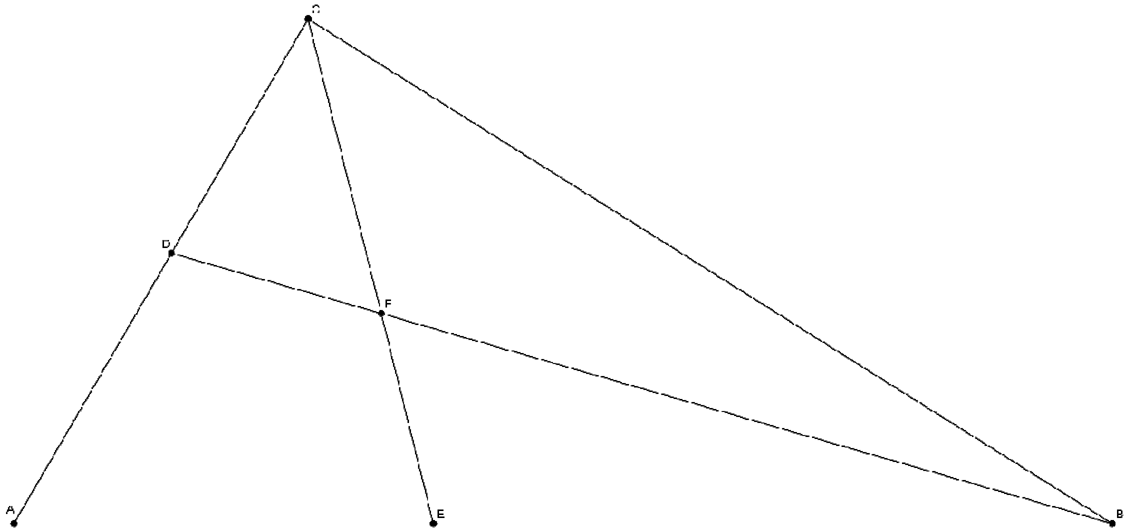
3) Luciano Spettoli, Classe 2^E, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria

Ipotesi

- $\widehat{ECB} \cong \widehat{ECA}$
- $\widehat{DBC} \cong \widehat{DBA}$
- $\widehat{CAB} = 60°$

Tesi:

- $AEFD$ è ciclico
- $\overline{BE} + \overline{CD} = \overline{BC}$



Dimostrazione tesi 1:

Scriviamo l'angolo $\widehat{ABC}$ in funzione di $\widehat{ACB}$: per la somma degli angoli interni nel triangolo ABC abbiamo $180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{CAB} \Rightarrow 180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + 60° \Rightarrow \widehat{ABC} = 120° - \widehat{ACB}$. Poiché, per ipotesi, si ha $\widehat{DBC} \cong \widehat{DBA}$ e poiché $\widehat{ABC} = \widehat{DBC} + \widehat{DBA}$, allora $\widehat{DBA} \cong \widehat{DBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{120° - \widehat{ACB}}{2} = 60° - \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Poiché, per ipotesi, abbiamo $\widehat{ECB} \cong \widehat{ECA}$ e poiché $\widehat{ACB} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA}$ (per costruzione), allora $\widehat{ECB} \cong \widehat{ECA} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Possiamo determinare la misura dell'angolo $\widehat{CFB}$ tramite la somma degli angoli interni nel triangolo CFB: $180° = \widehat{CFB} + \widehat{ECB} + \widehat{DBC} \Rightarrow 180° = \widehat{CFB} + \frac{\widehat{ACB}}{2} + \left(60° - \frac{\widehat{ACB}}{2}\right) \Rightarrow \widehat{CFB} = 120°$. L'angolo $\widehat{DFE}$ è opposto al vertice dell'angolo $\widehat{CFB}$, per cui $\widehat{DFE} \cong \widehat{CFB} = 120°$.

Condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che una coppia di angoli opposti sia supplementare; nel quadrilatero $AEFD$ gli angoli opposti $\widehat{CAB}$ e $\widehat{DFE}$ misurano rispettivamente $60°$ e $120°$: si ha dunque $\widehat{CAB} + \widehat{DFE} = 60° + 120° = 180°$, ovvero $\widehat{CAB}$ e $\widehat{DFE}$ sono supplementari e dunque il quadrilatero $AEFD$ è ciclico.

Dimostrazione tesi 2:

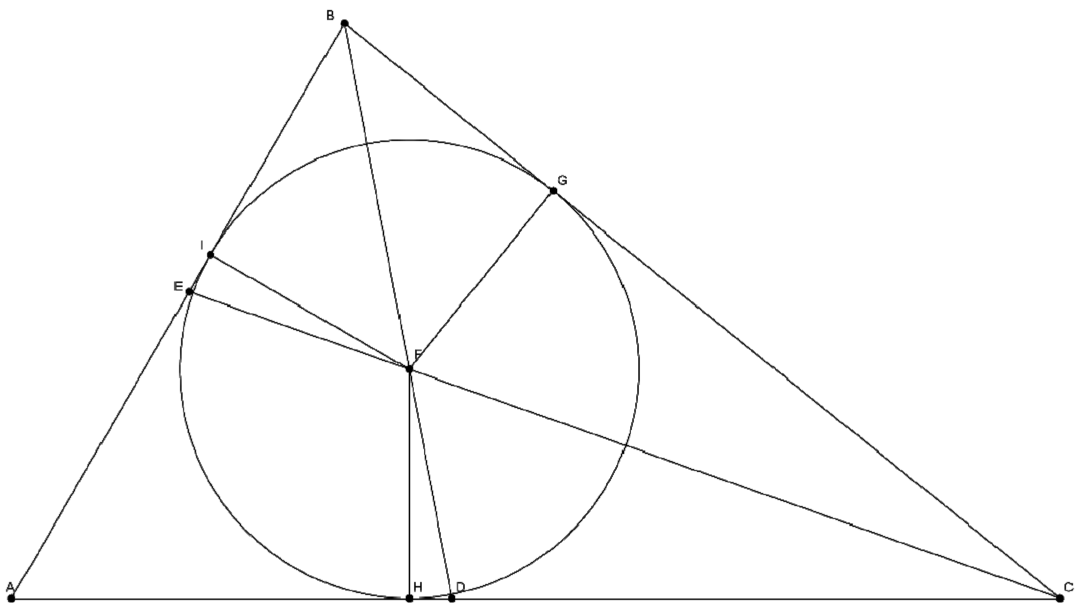
L'intersezione delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo è l'incentro del triangolo, ovvero il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Disegniamo la circonferenza inscritta nel triangolo ABC che ha dunque centro in F; essa tange il lato $\overline{BC}$ in G, il lato $\overline{AC}$ in H e il lato $\overline{AB}$ in I.

Determiniamo l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CEB}$ sfruttando la somma degli angoli interni del triangolo EBC: $180° = \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{CEB} \Rightarrow 180° = \frac{\widehat{ACB}}{2} + 120° - \widehat{ACB} + \widehat{CEB} \Rightarrow \widehat{CEB} = 60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Allo

stesso modo lavoriamo in $\widehat{ADB}$:
$180° = \widehat{CAB} + \widehat{DBA} + \widehat{ADB} \Rightarrow 180° = 60° + 60° - \frac{\widehat{ACB}}{2} + \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{ADB} = 60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$. L'angolo $\widehat{AEC}$ è supplementare di $\widehat{CEB}$, per cui $\widehat{AEC} = 180° - \widehat{CEB} = 180° - \left(60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}\right) = 120° - \frac{\widehat{ACB}}{2}$.
L'angolo $\widehat{CDB}$ è supplementare di $\widehat{ADB}$ e perciò $\widehat{CDB} = 180° - \widehat{ADB} = 180° - \left(60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}\right) = 120° - \frac{\widehat{ACB}}{2}$.

Distinguiamo tre casi (nonostante sia possibile analizzare solo un caso, in quanto non si perde generalità):

1) $\overline{AC} > \overline{AB}$
2) $\overline{AC} < \overline{AB}$
3) $\overline{AC} \cong \overline{AB}$



- *Primo caso* ($\overline{AC} > \overline{AB}$):

In un triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore, per cui, come conseguenza della condizione imposta, avremo: $\overline{AC} > \overline{AB} \Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow 120° - \widehat{ACB} > \widehat{ACB} \Rightarrow 2 \cdot \widehat{ACB} < 120° \Rightarrow \widehat{ACB} < 60°$. Da questa disuguaglianza ricaviamo: $\widehat{ACB} < 60° \Rightarrow \frac{\widehat{ACB}}{2} < 30° \Rightarrow 60° + \frac{\widehat{ACB}}{2} < 90° \Rightarrow \widehat{CEB} < 90°$.

Lemma 1: $I \in \overline{EB}$

Se per assurdo si avesse $I \in \overline{AE}$, allora nel triangolo IEF (il quale è rettangolo sul punto I, in quanto $\overline{FI}$ è raggio di tangenza nella circonferenza inscritta in ABC) l'angolo $\widehat{AEC}$ soddisferebbe la seguente condizione: $\widehat{CEB} < 90° \Rightarrow -\widehat{CEB} > -90° \Rightarrow 180° - \widehat{CEB} > 180° - 90° \Rightarrow \widehat{AEC} > 90°$, il che è assurdo poiché in un triangolo rettangolo non possono essere presenti angoli ottusi. Dunque $I \in \overline{EB}$.

Lemma 2: $H \in \overline{AD}$

Poiché (per precedente dimostrazione) $\widehat{ACB} < 60°$, allora $60° + \frac{\widehat{ACB}}{2} < 60° + \frac{60°}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} < 90°$ (in quanto, per precedente dimostrazione $\widehat{ADB} = 60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$); $\widehat{CDB}$ è supplementare di $\widehat{ADB}$ e perciò possiamo dire: $\widehat{ADB} < 90° \Rightarrow -\widehat{ADB} > -90° \Rightarrow 180° - \widehat{ADB} > 180° - 90° \Rightarrow \widehat{CDB} > 90°$. Se per assurdo $H \in \overline{DC}$, allora il triangolo DFH (il quale è rettangolo in H, in quanto $\overline{FH}$ è raggio di tangenza nella circonferenza inscritta in ABC) avrebbe $\widehat{CDB}$ come angolo interno, il che è assurdo in quanto $\widehat{CDB}$ è ottuso. Dunque $H \in \overline{AD}$.

Dimostriamo che $DHF \cong IEF$.

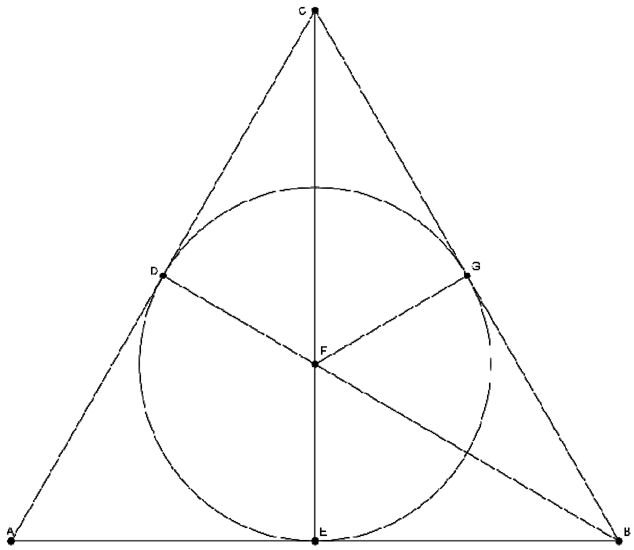
Abbiamo, per precedenti dimostrazioni, $\widehat{EIF} \cong \widehat{DHF} = 90°$, $\widehat{BEC} = 60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$ e $\widehat{ADB} = 60° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$, dunque per la proprietà transitiva dell'uguaglianza $\widehat{BEC} \cong \widehat{ADB}$; per la somma degli angoli interni del triangolo anche la terza coppia di angoli interni è congruente: $\widehat{IFE} \cong \widehat{DFH}$. Inoltre il lato $\overline{HF}$ di HDF è compreso tra l'angolo in H e quello in F; il lato $\overline{IF}$ in IEF è compreso tra l'angolo in I e l'angolo in F, e inoltre $\overline{IF} \cong \overline{HF}$ poiché sono raggi della stessa circonferenza (quella inscritta in ABC). Dunque per il secondo criterio di congruenza dei triangoli $DHF \cong IEF$. I due triangoli sono congruenti e hanno rispettivamente congruenti tutti i loro elementi ed in particolare $\overline{EI} \cong \overline{HD}$.

Poiché $I \in \overline{EB}$ (per precedente dimostrazione), allora $\overline{BI} = \overline{EB} - \overline{EI}$; poiché $H \in \overline{AD}$ (per precedente dimostrazione), allora $\overline{CH} = \overline{CD} + \overline{HD}$, e poiché $\overline{EI} \cong \overline{HD}$ (per precedente dimostrazione), allora riscriviamo come $\overline{CH} = \overline{CD} + \overline{EI}$. Inoltre $\overline{CG}$ e $\overline{CH}$ sono segmenti di tangenza condotti da C alla circonferenza inscritta in ABC e dunque sono congruenti: $\overline{CH} \cong \overline{CG}$ e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza $\overline{CG} = \overline{CD} + \overline{EI}$.

Analogamente $\overline{BI}$ e $\overline{BG}$ sono segmenti di tangenza condotti da B alla circonferenza inscritta in ABC e perciò sono congruenti: $\overline{BI} \cong \overline{BG}$ e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza $\overline{BG} = \overline{EB} - \overline{EI}$. Il segmento $\overline{BC}$ è costituito dai segmenti $\overline{CG}$ e $\overline{BG}$, ovvero $\overline{BC} = \overline{CG} + \overline{BG}$. Sappiamo che $\overline{BG} = \overline{EB} - \overline{EI}$ (per dimostrazione precedente) e che $\overline{CG} = \overline{CD} + \overline{EI}$ (per dimostrazione precedente) e dunque possiamo sostituire $\overline{CG}$ e $\overline{BG}$ ottenendo: $\overline{BC} = \overline{CG} + \overline{BG} = \overline{CD} + \overline{EI} + \overline{EB} - \overline{EI} = \overline{CD} + \overline{EB}$. Dunque abbiamo la tesi $\overline{BC} = \overline{CD} + \overline{EB}$.

- *Secondo caso* [[ragionamento identico al primo caso]]:

- *Terzo caso* ($\overline{AC} \cong \overline{AB}$):



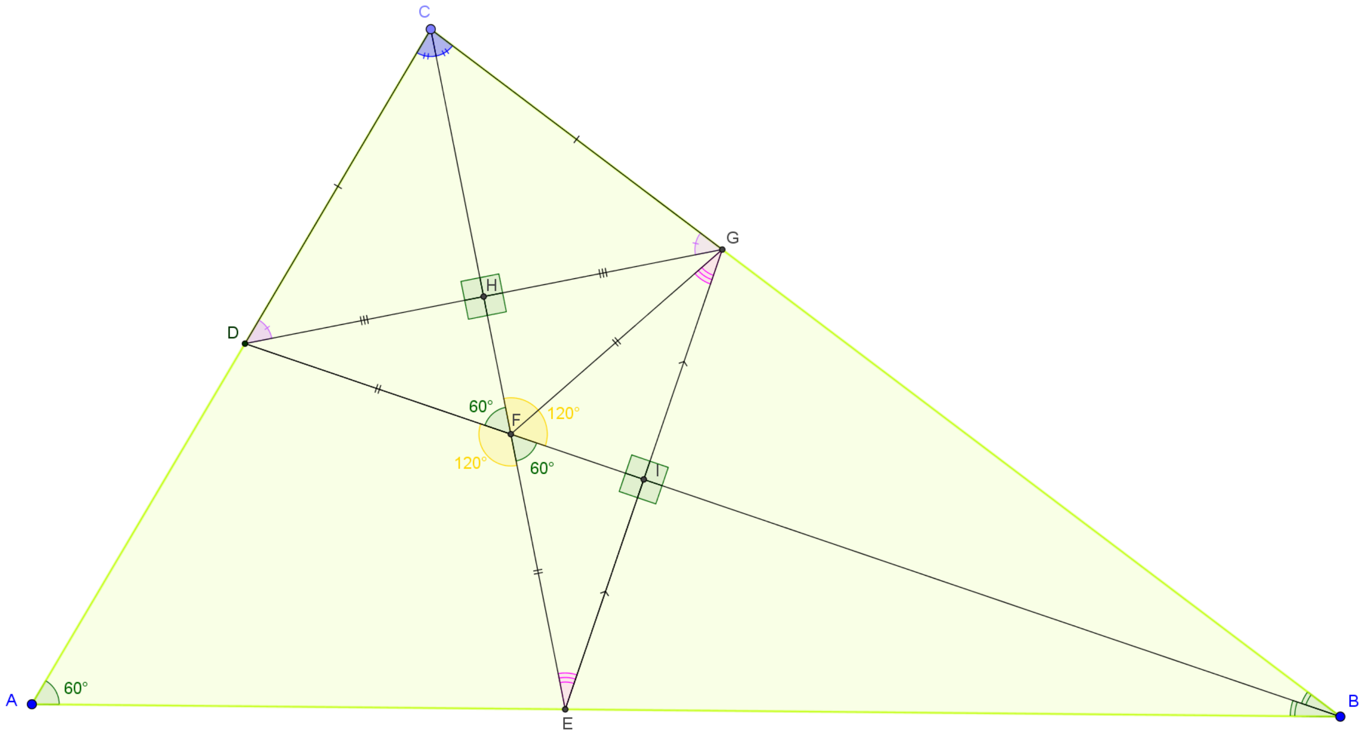
Poiché $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, allora ABC è isoscele su base $\overline{BC}$ e dunque $\widehat{ACB} \cong \widehat{ABC}$; per la somma degli angoli interni di ABC, abbiamo $180° = \widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 60° + 2 \cdot \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB} \cong \widehat{ABC} = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$: ciò vuol dire che ABC è equilatero e perciò $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$. In un triangolo equilatero bisettrici e mediane coincidono, e dunque le bisettrici cadono nei punti medi dei lati opposti, perciò si verificano le seguenti congruenze: $\overline{AD} \cong \overline{CD} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{AE} \cong \overline{BE} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, e poiché $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$, allora $\overline{AD} \cong \overline{CD} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{\overline{BC}}{2} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$ e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{AE} \cong \overline{BE} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$. Perciò possiamo affermare che $\overline{BE} + \overline{CD} = \dfrac{\overline{BC}}{2} + \dfrac{\overline{BC}}{2} = \overline{BC}$; dunque abbiamo la tesi $\overline{BE} + \overline{CD} = \overline{BC}$.

C.V.D.

4) Sofia Lorengo, Classe 2D - Liceo "Bertrand Russell", Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)

ipotesi: BD è bisettrice di B
CE è bisettrice di C
l'angolo A = 60°

tesi: AEFD è inscrivibile in una circonferenza
BE + DC = BC



CG ≅ DC per costruzione

[[DF ≅ FE per definizione dell'incentro F]] [l'incentro è equidistante dai lati del triangolo !!]
[[….]]