FLAT*landia*

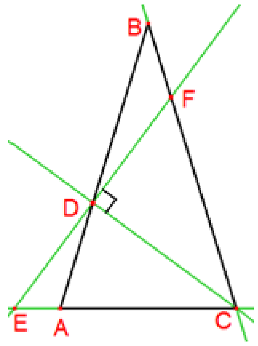
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia Problema 5 – 19 dicembre 2016 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia dato un triangolo isoscele ABC di base AC e sia CD la bisettrice dell'angolo in C, dove D è il punto in cui la bisettrice incontra il lato AB. Supponiamo che la retta passante per D e perpendicolare a DC intersechi la retta di AC nel punto E non appartenente al lato AC.

1) Detto M il punto medio di EC, provare che DM è parallelo a BC.
2) Provare che $EC = 2\,AD$.
3) In quali casi il punto E coincide con A oppure è interno al segmento AC ? Il risultato del punto 2 è ancora vero in questi casi?



Motivare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte 6 risposte, da classi II di tre Licei Scientifici, da una classe III di un Liceo Classico e da una classe II di un Istituto Tecnico Tecnologico.

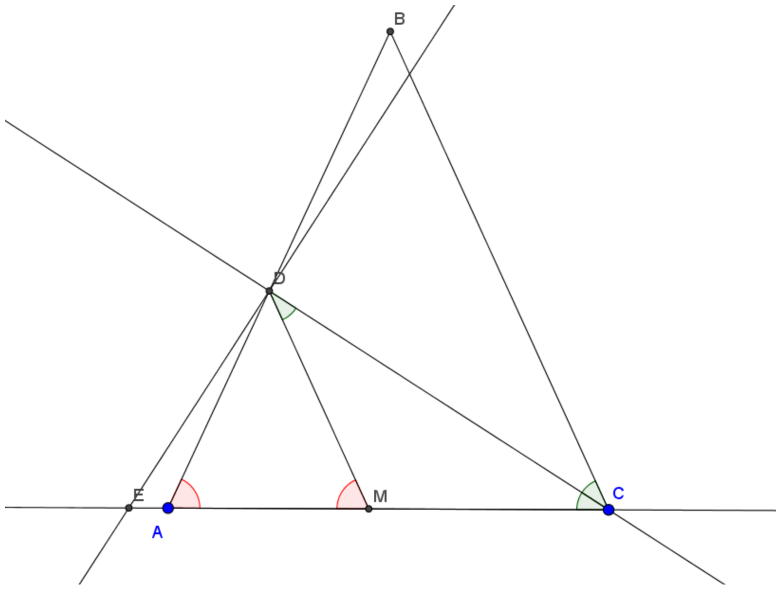
Il problema poneva tre quesiti relativi a un triangolo isoscele. Nel primo si chiedeva, basandosi sulla figura proposta, di dimostrare il parallelismo di due segmenti. Nel secondo di verificare una data congruenza tra segmenti, mentre nel terzo punto si chiedeva di discutere il problema al variare del triangolo isoscele.
Tutti rispondono correttamente, seguendo anche strade diverse, ai primi due quesiti. Per quanto riguarda il terzo, alcuni affermano che il punto E cade internamente ad AC solo quando ABC è ottusangolo in B, cosa non vera, perché ciò si verifica anche quando l'angolo in B è compreso tra 60 e 90°.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo "Aristosseno", Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
- Liceo Classico "Tito Livio", Milano (MI)
- Liceo "Bertrand Russell", Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)
- IIS "A. Badoni", ITT-Indirizzo Informatica e Telecomunicazioni, Lecco (LC)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

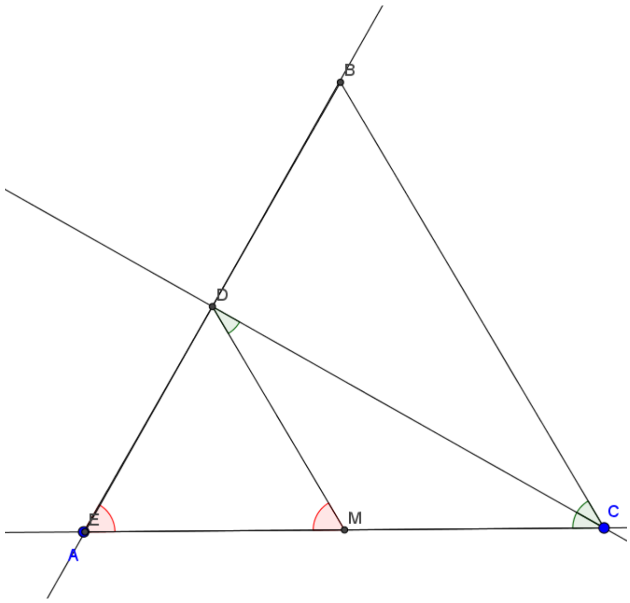
1) ***Classe I H ad indirizzo Liceo Scientifico del Liceo "Aristosseno" di Taranto***



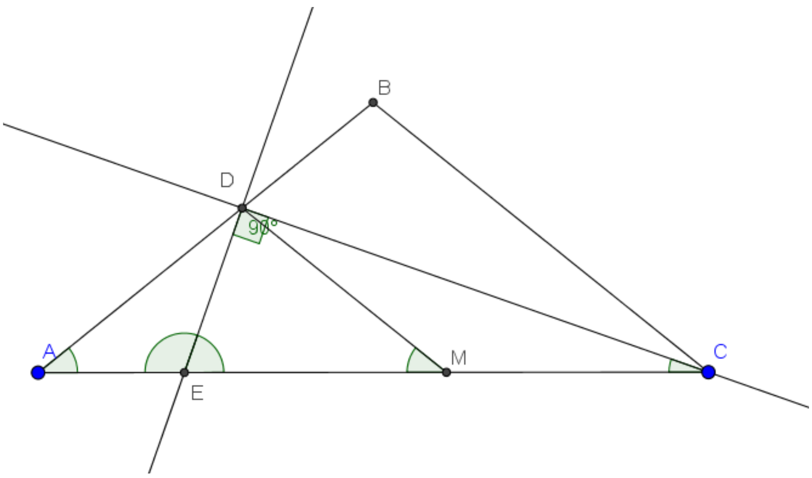
1)
Nel triangolo rettangolo CDE la mediana DM è congruente ad EM e ad [[EC]] , [MC] ,perciò il triangolo DMC è isoscele sulla base DC e quindi ha gli angoli alla base congruenti : $D\hat{C}M \cong C\hat{D}M$ .Essendo però $D\hat{C}M \cong D\hat{C}B$ (poiché CD è bisettrice dell'angolo [[ACB]] [$A\hat{C}B$] del triangolo) , per la proprietà transitiva della congruenza sarà $C\hat{D}M \cong D\hat{C}B$.
Da ciò si deduce che le rette dei segmenti DM e BC sono parallele ;esse infatti,tagliate dalla trasversale CD,formano angoli alterni interni congruenti (criterio di parallelismo).

2)
Essendo M il punto medio di EC, si ha che $EC \cong 2EM \cong 2DM$.
Ma $DM \cong AD$, perché essendo l'angolo $D\hat{M}A$ esterno al triangolo isoscele DMC, $D\hat{M}A \cong 2M\hat{C}D \cong A\hat{C}B \cong C\hat{A}B$ .Si ha quindi che $EC \cong 2DM \cong 2AD$.

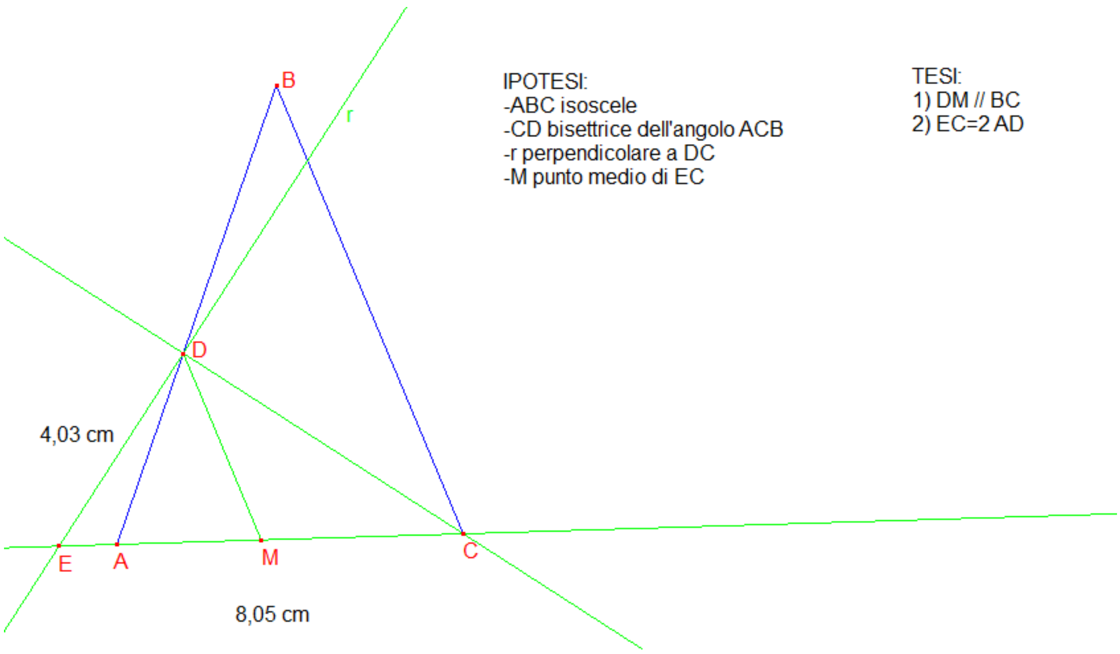
3)
Il punto E coincide con A quando la bisettrice CD dell'angolo $A\hat{C}B$ è perpendicolare al lato opposto AB,cioè quando CD è altezza oltre che bisettrice .



Questo accade se il triangolo ABC è equilatero e il punto 2 è vero ,perché nel triangolo equilatero le tre bisettrici degli angoli interni sono pure altezze e mediane e perciò : $EC \cong AC \cong AB \cong 2AD$.
Il punto E,infine, è interno al lato AC quando l'angolo $C\hat{D}A$ è ottuso e il triangolo isoscele ABC è ottusangolo. [In realtà E risulta interno ad AC anche quando l'angolo in B è compreso tra 60 e 90 gradi]. Essendo il triangolo CDE rettangolo si ha ancora che $EC \cong 2EM \cong 2DM$, e $DM \cong AD$ per considerazioni analoghe al punto 2) .Perciò $EC \cong 2AD$ e anche in questo caso il punto 2 è vero.



2) Beatrice Podini, 2T Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris" Casalpusterlengo (LO)



RISOLUZIONE:

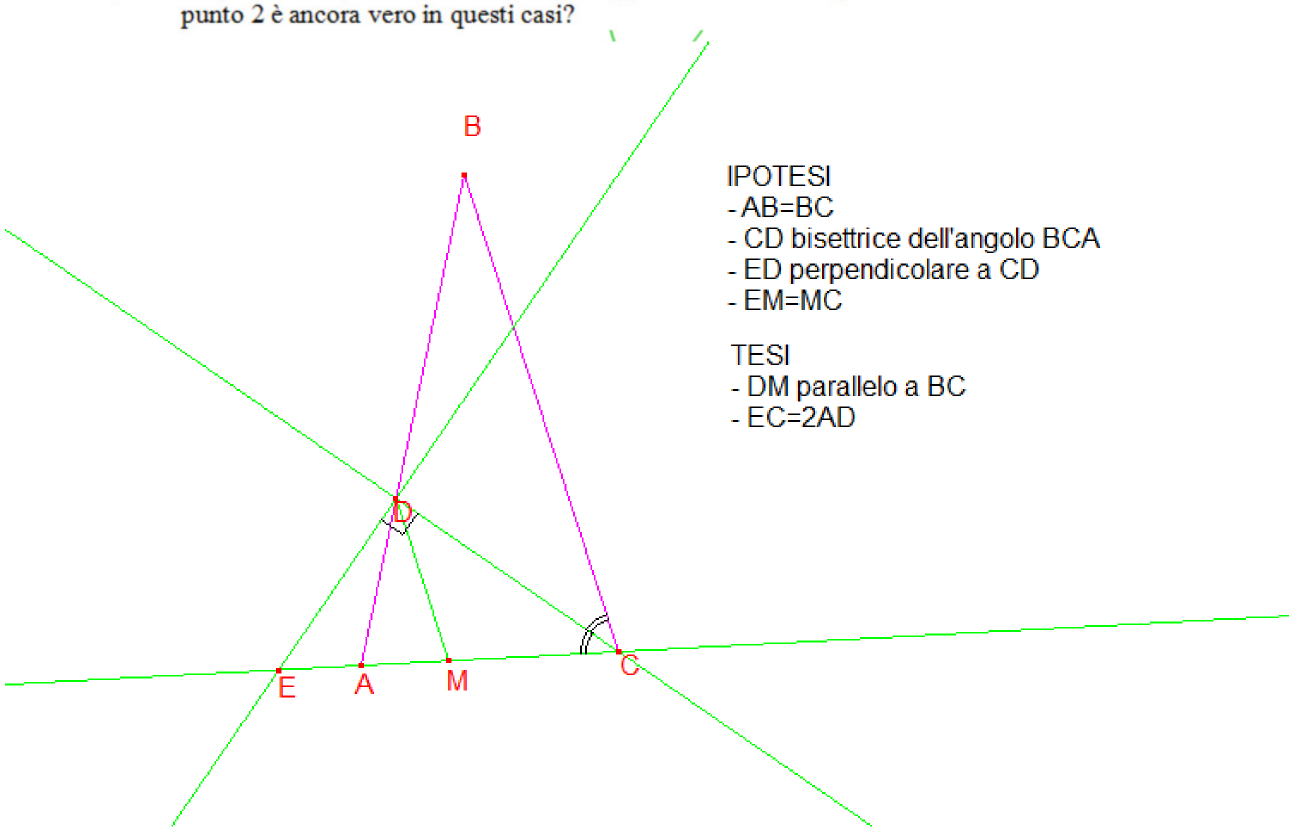
1) Considero il triangolo EDC, rettangolo per ipotesi. DM è la mediana relativa all'ipotenusa, che divide il triangolo rettangolo in due triangoli isosceli, MDC e MDE. Essendo MDC isoscele gli angoli alla base MCD e MDC sono congruenti. L'angolo MCD e l'angolo BCD sono congruenti per ipotesi, quindi per la proprietà transitiva l'angolo MDC è congruente all'angolo BCD: DM // BC perché tagliati da DC formano angoli alterni interni congruenti.
2) L'angolo AMD è congruente all'angolo ACB perché corrispondenti formati dalle parallele DM e BC (per dimostrazione precedente) tagliate da EC. Dato che l'angolo BAC è congruente a BCA per ipotesi, per la proprietà transitiva l'angolo AMD è congruente all'angolo BAC, quindi il triangolo DAM è isoscele perché gli angoli alla base sono congruenti: i lati AD e MD sono congruenti . Essendo MD=1/2 EC perché mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, anche AD=1/2 EC, cioè EC=2 AD.
3) Il punto E coincide con il punto A se il triangolo ABC è equilatero; è interno al segmento AC se il triangolo ABC rimane isoscele, ma ottusangolo [E risulta interno ad AC anche quando l'angolo in B è compreso tra 60 e 90 gradi]. Il risultato del punto 2 in questi casi è ancora vero perché variano solo le misure dei segmenti, mentre parallelismi e congruenze fra lati e angoli restano invariate.

3)Carola Cambielli, 2T Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris" Casalpusterlengo (LO)

Flatlandia – Problema 5-19 Dicembre 2016

Sia dato un triangolo isoscele ABC di base AC e sia CD la bisettrice dell'angolo in C, dove D è il punto in cui la bisettrice incontra il lato AB. Supponiamo che la retta passante per D e perpendicolare a DC intersechi la retta di AC nel punto E non appartenente al lato AC.

1) Detto M il punto medio di EC, provare che DM è parallelo a BC.
2) Provare che $EC = 2\,AD$.
3) In quali casi il punto E coincide con A oppure è interno al segmento AC ? Il risultato del punto 2 è ancora vero in questi casi?



DIMOSTRAZIONE PRIMO PUNTO

Considero il triangolo EDC. Essendo un triangolo rettangolo DM = EM per il teorema secondo cui la mediana [relativa all'ipotenusa] dei triangoli rettangoli è congruente a metà ipotenusa.
Quindi il triangolo DMC è isoscele in quanto DM = [[EM]] [MC]. Di conseguenza l'angolo MDC è congruente all'angolo [[EMD]] [MCD]. Ma l'angolo [[EDM]] [EMD] è congruente alla somma dell'angolo MDC e l'angolo MCD.
Quindi l'angolo EMD è congruente all'angolo MCB di cui l'angolo MCD è la metà. Essi sono angoli corrispondenti tagliati dalla trasversale MC. Quindi DM è parallelo a BC.

DIMOSTRAZIONE SECONDO PUNTO

L'angolo DAC è congruente all'angolo BCA perché BAC è un triangolo isoscele. Quindi per la proprietà transitiva l'angolo DAM è congruente all'angolo DMA. Perciò ADM è un triangolo isoscele e DM è congruente a DA. Quindi DA è metà di EC.

DIMOSTRAZIONE TERZO PUNTO

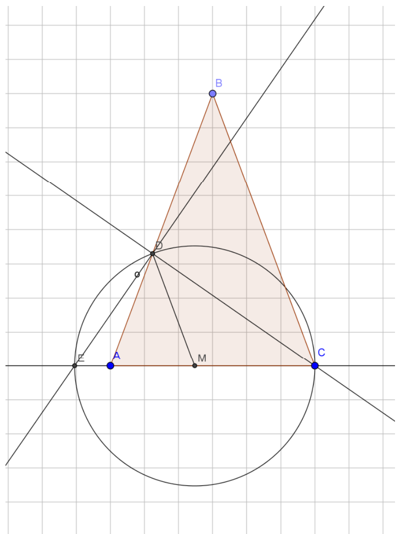
E coincide con A quando il triangolo è equilatero ed è interno al segmento AC quando il triangolo è ottusangolo [basta che l'angolo in B sia maggiore di 60°] e la dimostrazione precedente è ancora vera perché cambiano solo le misure dei segmenti, non la costruzione.

4)Giacomo Mastrosimone, III E, Liceo Classico "T. Livio", Milano

Giacomo Mastrosimone
Classe IIIE
Liceo Classico Statale "Tito Livio"
Milano

Flatlandia – Problema 5/19 Dicembre 2016

Dimostrazione 1

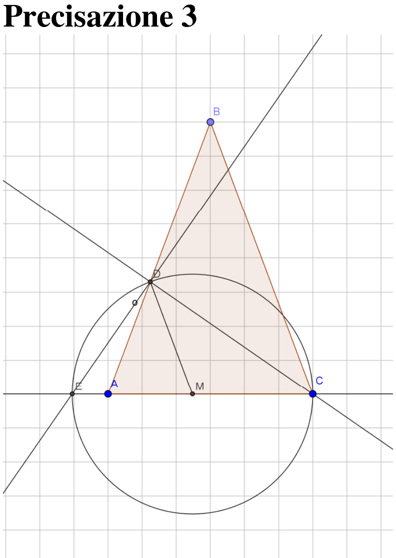


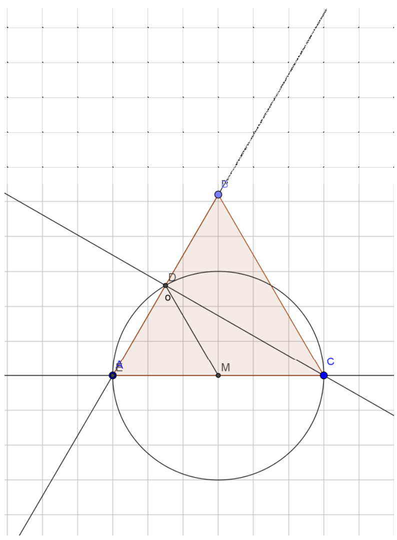
Il triangolo CDE è per costruzione rettangolo sul vertice D. Quindi, per il teorema degli angoli che insistono su una semicirconferenza, CDE è inscritto nella semicirconferenza o di diametro EC e centro M, dove M è il punto medio di EC. Allora EM = DM = CM perché tutti raggi di o. Il triangolo CDM risulta quindi isoscele sulla base CD, perché i lati DM e CM sono congruenti. Quindi MCD = CDM perché angoli adiacenti alla base CD. Consideriamo l'angolo MCB come α. L'angolo MCD vale ½ α, perché CD è per ipotesi bisettrice di MCB. Anche CDM vale quindi ½ α. Per il teorema degli angoli interni di un triangolo, si può esprimere l'angolo DMC come 180° - MCD - CDM ovvero 180° - α. Poiché angolo supplementare di DMC, l'angolo AMD vale 180° - DMC ovvero 180° - (180°- α) = α. Per la proprietà transitiva dunque MCB = AMD. Per il teorema della rette parallele tagliate da una trasversale, considerando gli angoli MCB e AMD come angoli corrispondenti, si dimostra che i segmenti BC e DM sono paralleli.

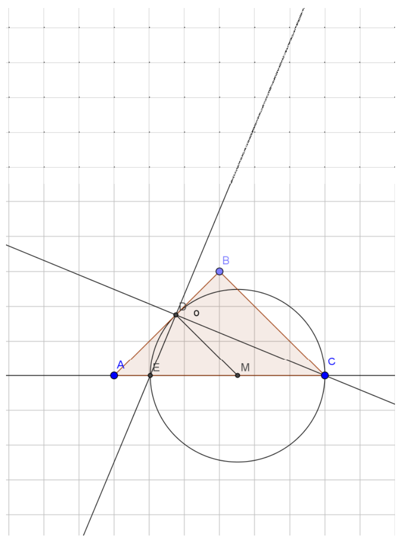
Dimostrazione 2

Consideriamo come dimostrato nel primo paragrafo che MCB = AMD. Siccome il triangolo ABC è isoscele su base AC, ACB = BAC perché angoli adiacenti alla base. Quindi per la proprietà transitiva AMD = BAC. Risulta che il triangolo AMD è isoscele con base AM. Quindi AD = MD perché lati opposti di angoli congruenti. Siccome MD è raggio della circonferenza o e EC ne è diametro, EC = 2MD e quindi anche EC = 2AD.

Precisazione 3



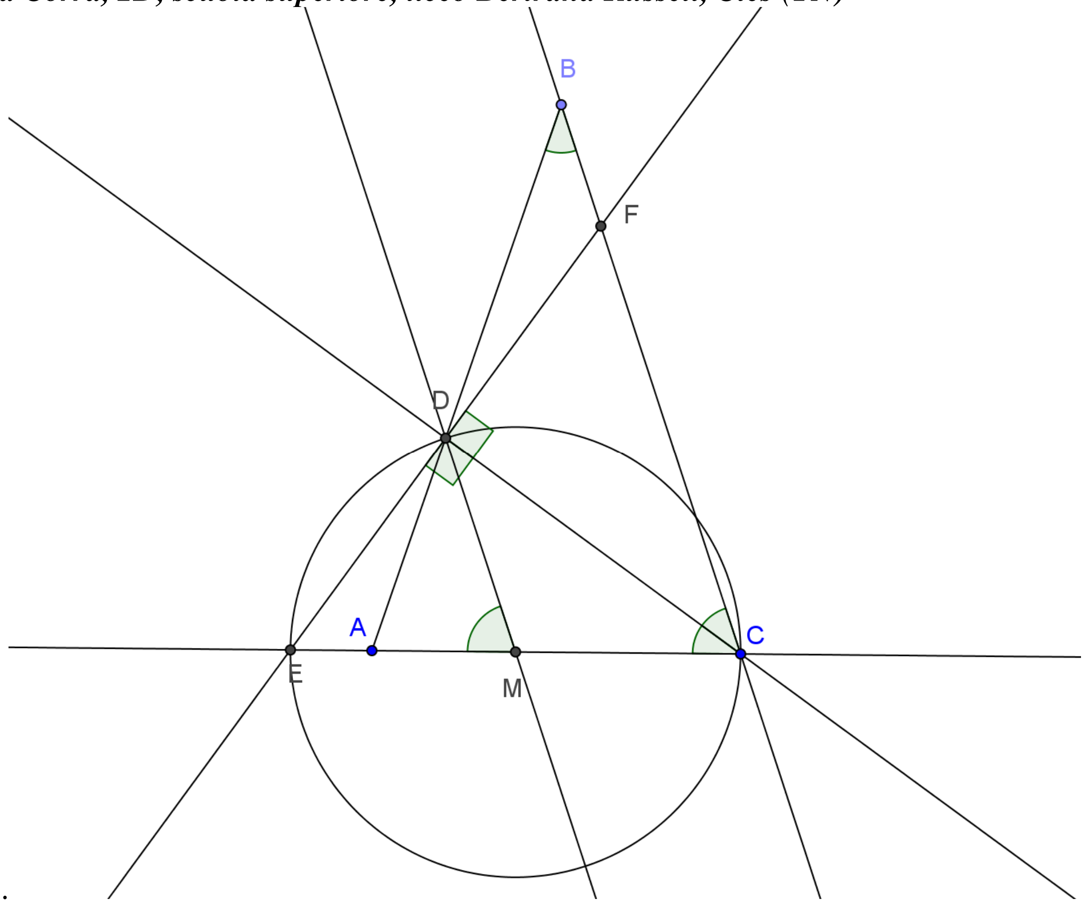




Il punto E è esterno ad AC se AC < AB, perché per il teorema degli angoli opposti a lati disuguali se AC < AB allora CBA < BAC. Considerando i triangoli ACD e CDB, si possono calcolare gli

angoli CDA = 180° - ACD - DAC e CDB = 180° - BCD - DBC. Poiché ACD = BDC e DAC > DBC, allora CDA < CDB. Essendo CDA e CDB supplementari, sicuramente CDA < 90°, quindi [[il suo asse]] [DA] cade all'interno dell'angolo CDE che è retto per ipotesi. Il punto A è quindi interno al segmento CE e viceversa E è esterno al segmento AC.
Similmente Il punto E è interno ad AC se AC > AB, perché per il teorema degli angoli opposti a lati disuguali se AC > AB allora CBA > BAC. Considerando i triangoli ACD e CDB, si possono calcolare gli angoli CDA = 180° - ACD - DAC e CDB = 180° - BCD - DBC. Poiché ACD = [[BDC]] [BCD] e DAC < DBC, allora CDA > CDB. Essendo CDA e CDB supplementari, sicuramente CDA > 90°, quindi [[il suo asse]] [DA] cade all'esterno dell'angolo CDE che è retto per ipotesi. Il punto A è quindi esterno al segmento CE e viceversa E è interno al segmento AC.
I punti E ed A coincidono se l'altezza relativa al lato AB coincide con la bisettrice dell'angolo ACB, condizione che si realizza se e solo se il triangolo ABC è isoscele sulla base AB. Il triangolo ABC può essere insieme isoscele sulla base AB e isoscele sulla base AC solo se è equilatero, quindi perché E coincida con A il triangolo ABC deve essere equilatero.
In questi tre casi il punto 2 della dimostrazione rimane valido perché i suoi presupposti (triangolo ABC isoscele su base AC; angolo retto in CDA; DC bisettrice di ACB) restano invariati.

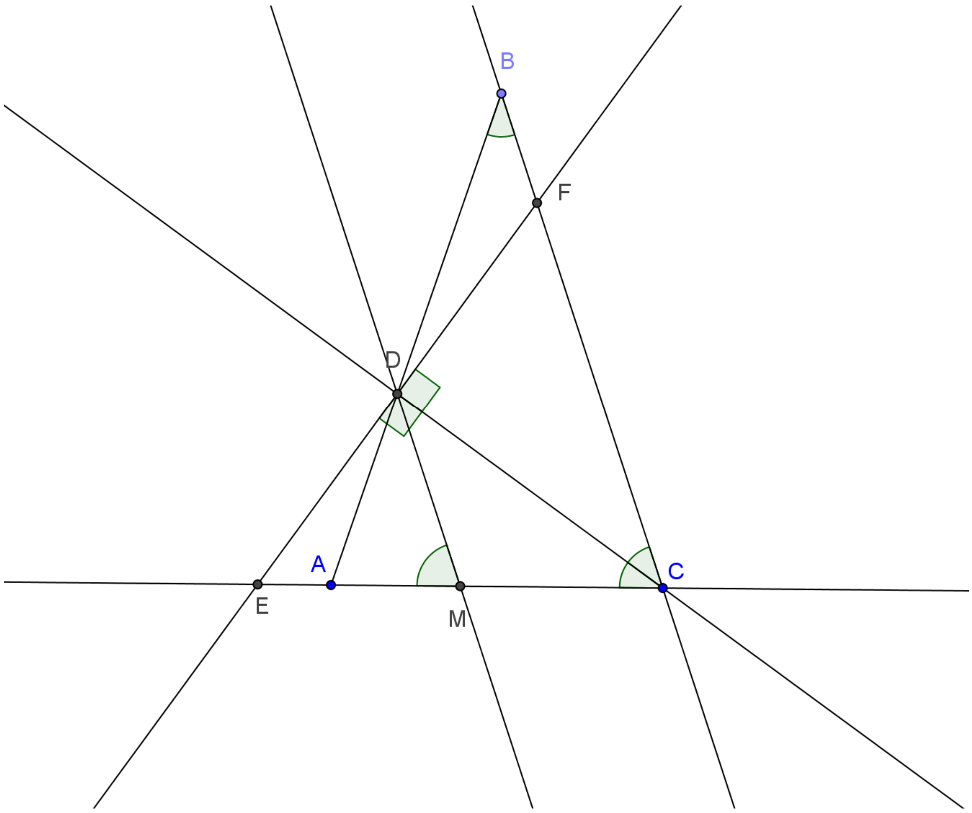
5)Mattia Corrà, 2D, scuola superiore, liceo Bertrand Russell, Cles (TN)



Punto 1.

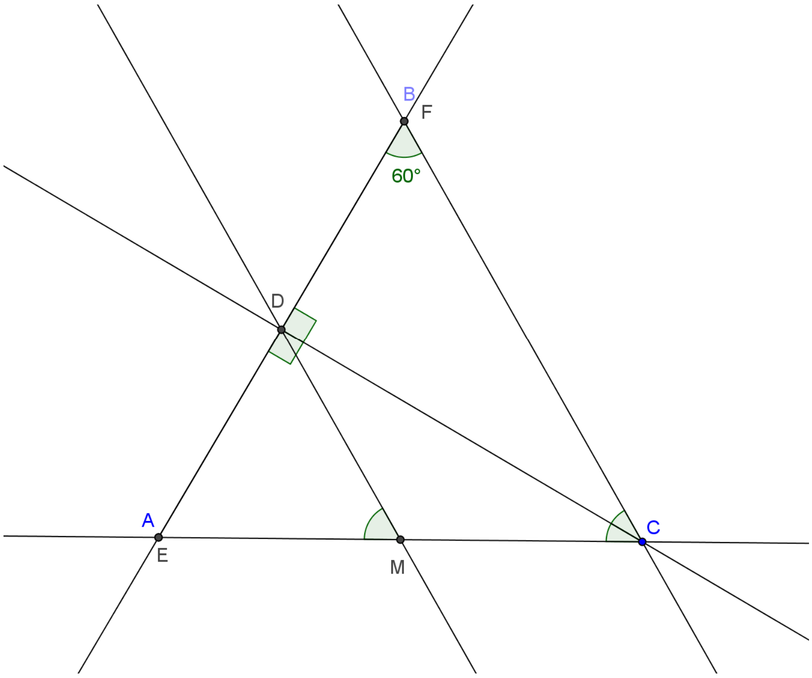
Ip: Il triangolo ABC è isoscele sulla base AC. CD è bisettrice dell'angolo in C. La retta passante per ED è perpendicolare alla bisettrice CD e interseca la retta passante per AC in E (esterno a CA). M è punto medio del segmento EC.
Ts: DM//CB.
DIM:
Il punto D deve appartenere alla circonferenza di centro M e raggio MC (o ME), se così non fosse l'angolo in D sarebbe diverso da 90° (infatti questo angolo sottende il diametro CE).
Allora EM è un raggio come lo è CM o ME quindi DM è congruente a EM e a CM e CE=2MD.
Allora il triangolo CMD è isoscele quindi gli angoli MCD e MDC sono congruenti.
Gli angoli MCD e DCB sono congruenti perché CD bisettrice allora l'angolo DCB è congruente all'angolo MDC per la proprietà transitiva.
DM//CB perché gli angoli alterni interni DCB e MDC sono congruenti.

Punto 2.

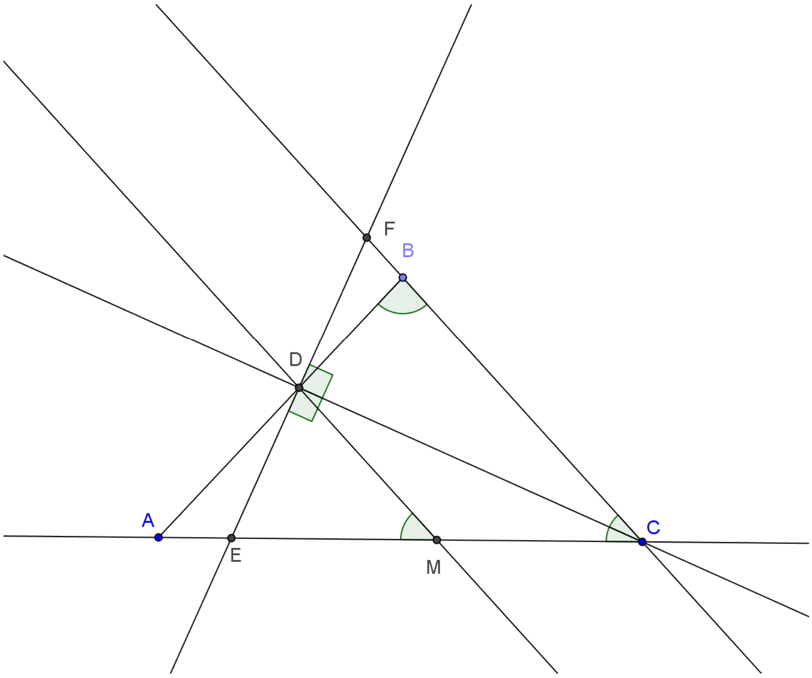


Ip: stesse del punto 1.
Ts: CE=2AD.
DIM:
L'angolo MCB è congruente all'angolo AMD perché MD//CB per dimostrazione precedente.
L'angolo CAB è congruente all'angolo ACB perché ABC isoscele.
Allora il triangolo AMD ha gli angoli alla base congruenti e quindi è isoscele, AD=MD.
Visto che CE=2MD per dim. precedente e AD=MD allora CE=2AD.

Punto 3.
In quali [[punti]] [casi] il punto E coincide con A oppure è all'interno del segmento [AC] ?
Ip: stesse del punto 1 a parte la condizione che E sia esterno al segmento AC.
Ts (secondo me): Quando il triangolo ABC è equilatero il punto E coincide con A, se l'angolo al vertice diventa maggiore di 60° il punto E va all'interno del segmento AC.
DIM:
Se il punto E coincide con A allora il segmento AB coincide con il segmento EB (ED sta su AB perché anche D appartiene ad AB).

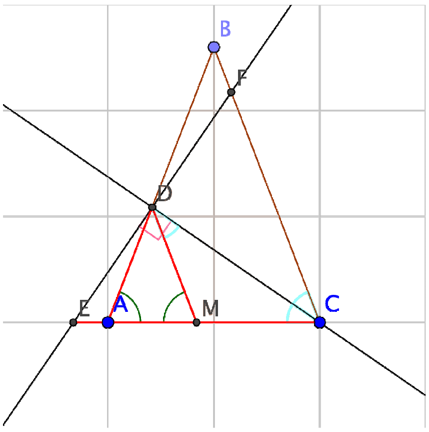


La bisettrice dell'angolo in C è perpendicolare alla retta passante per ED allora la bisettrice dell'angolo in C è perpendicolare ad AB. Allora CD è anche altezza e quindi ABC è isoscele anche sulla base EB.
L'unico triangolo che è isoscele su due basi (e quindi di conseguenza anche sulla terza) è quello equilatero perché AB=BC per ip. e AC=CB e quindi AC=AB.
Se aumentiamo l'angolo in B in modo che sia maggiore di 60°, la somma degli angoli CAB e ACD di conseguenza diminuisce di ampiezza e quindi l'angolo ADC aumenta (la somma degli angoli di un triangolo è costante).
Se quando l'angolo in B era 60° l'angolo ADC era 90° allora se aumentiamo l'angolo in B l'angolo ADC diventa maggiore di 90° mentre l'angolo EDC rimane 90°. Allora E deve per forza intersecare la retta passante per AC proprio all'interno di AC essendo l'angolo EDC<ADC.
Il risultato del punto 2 è ancora vero perché, seguendo lo stesso procedimento del punto 1, EM resta congruente a MC e a MD, le rette passanti per MD e per CB sono ancora // e quindi gli angoli ACB, AMD e MAD sono [[rimasti]] [ancora] congruenti.
Il triangolo AMD resta quindi isoscele e per lo stesso motivo usato nel punto 1 CE=2[[MD]] [AD].
C.V.D.


F
B
D
A
E
M
C

6)Federica Assisi, classe 2C, Istituto Tecnico Tecnologico – Indirizzo Informatica e Telecomunicazioni- IIS "A. Badoni" Lecco (LC)

Problema Flatlandia dicembre 2016:



IPOTESI:

ABC triangolo

$AB \cong BC$

$A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$

$E\hat{D}F = \pi$

$F\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$

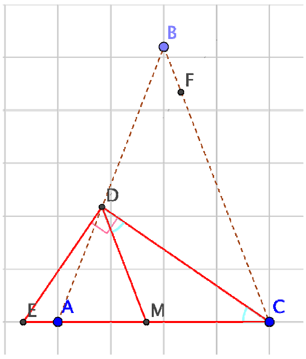
$M \in EC$

$EM \cong MC$

TESI 1:

$DM \parallel BC$

DIMOSTRAZIONE 1:



$E\hat{D}F = \pi$ per ipotesi

$CD \perp EF \Rightarrow E\hat{D}C \cong C\hat{D}F = \frac{\pi}{2}$

Perciò il triangolo EDC è rettangolo

Essendo DM la mediana relativa all'ipotenusa, essa è la metà dell'ipotenusa stessa, per proprietà del triangolo rettangolo.

$DM \cong \frac{EC}{2} \Rightarrow DM \cong MC$ perciò il triangolo DMC è isoscele

$D\hat{M}C = 180 - (M\hat{D}C + M\hat{C}D)$

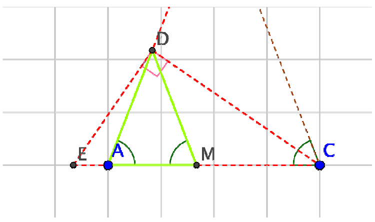
[[$M\hat{B}B \cong M\hat{D}C + M\hat{C}D$]] [$M\hat{C}B \cong M\hat{D}C + M\hat{C}D$]

. Questi due angoli sono coniugati interni delle rette *DM* e *BC* con *MC* trasversale e, poiché supplementari, sarà $DM \parallel BC$.

TESI 2:

$EC \cong 2AD$

DIMOSTRAZIONE 2:



- Per dimostrazione precedente so che [[$DM \cong \frac{EC}{2} = DM \cong MC$]]
  [$DM \cong \frac{EC}{2} \Rightarrow DM \cong MC$]
- $MC \cong EM$ Per ipotesi
- $EM \cong DM$ Per transitività

Considerando MC come trasversale e $DM \parallel BC$, gli angoli

$D\widehat{M}E \ e \ B\widehat{C}A$

sono corrispondenti perciò ;
poiché il triangolo ABC è isoscele per ipotesi;

per transitività, siccome gli angoli alla base del triangolo DAM sono congruenti, posso dire che il triangolo è isoscele. In particolare si ha:

$AD \cong DM$

$DM \cong \frac{EC}{2}$

Per transitività $AD \cong \frac{EC}{2} \Rightarrow 2AD \cong EC$.

TESI 3:

Indicare in quali casi il punto E coincide con A oppure è interno al segmento AC? Il risultato del punto 2 è ancora vero in questi casi?

DIMOSTRAZIONE 3:

1. Il punto *E* coincide con *A* quando il triangolo *ABC* è equilatero, in altre parole ha tutti gli angoli di 60°. In questo caso il risultato del punto 2 è ancora verificato, poiché valgono tutte le dimostrazioni del punto 2, con l'aggiunta che *EC* (in questo caso) coincide con *AC*.
2. Il punto *E* è interno al segmento *AC* quando gli angoli alla base del triangolo *ABC* hanno un'ampiezza minore di 60°. E anche in questo caso il risultato del punto 2 è verificato, poiché *DM* rimane sempre la metà di *EC*, e il triangolo *DAM* è sempre isoscele, posso così ancora utilizzare la dimostrazione del punto 2).