FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

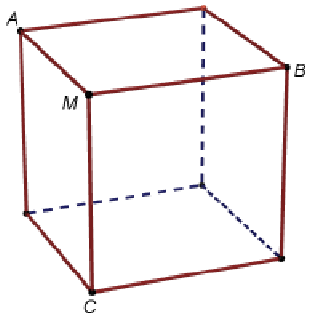
Flatlandia - Problema 10 - 26 aprile 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Siano MA, MB, MC i tre spigoli di un cubo che partono dal vertice M.
Se lo spigolo del cubo misura a, determinare

1) il volume del tetraedro $MABC$
2) l'area del triangolo ABC
3) la distanza di M dal piano ABC
4) il raggio della sfera circoscritta al tetraedro $MABC$.

Motivare tutte le risposte.



Commento

Sono giunte 5 risposte, da tre classi II di Liceo Scientifico, da una classe III di un Istituto Tecnico Tecnologico e da una classe III Liceo Scientifico.

Il problema poneva quattro quesiti relativi a un cubo.
Nel primo si chiedeva di determinare il volume di un tetraedro individuato da quattro vertici del cubo, estremi di tre spigoli del cubo stesso e concorrenti in uno stesso vertice.
Nel secondo quesito si chiedeva di determinare l'area di un triangolo (equilatero) ricavato dal cubo.
Nel terzo quesito si richiedeva di determinare la distanza tra un piano e un vertice del cubo.
Nell'ultimo quesito, infine, si richiedeva di determinare il raggio della sfera circoscritta al tetraedro iniziale.

Delle soluzioni pervenute alcune sono sostanzialmente corrette e giungono al risultato seguendo percorsi diversi, specialmente nella determinazione del volume del tetraedro, in relazione ad una diversa scelta della "base" e della relativa altezza.
Rileviamo però un uso non appropriato dei software di geometria dinamica per ottenere risultati che andrebbero invece dimostrati. Non è poi accettabile che venga trovata l'area di un triangolo equilatero usando la formula di Erone.

Consigliamo inoltre di rileggere sempre attentamente il proprio elaborato per evitare, come spesso accade, di incorrere in imprecisioni e sviste.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo "Aristosseno", Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria (AL)

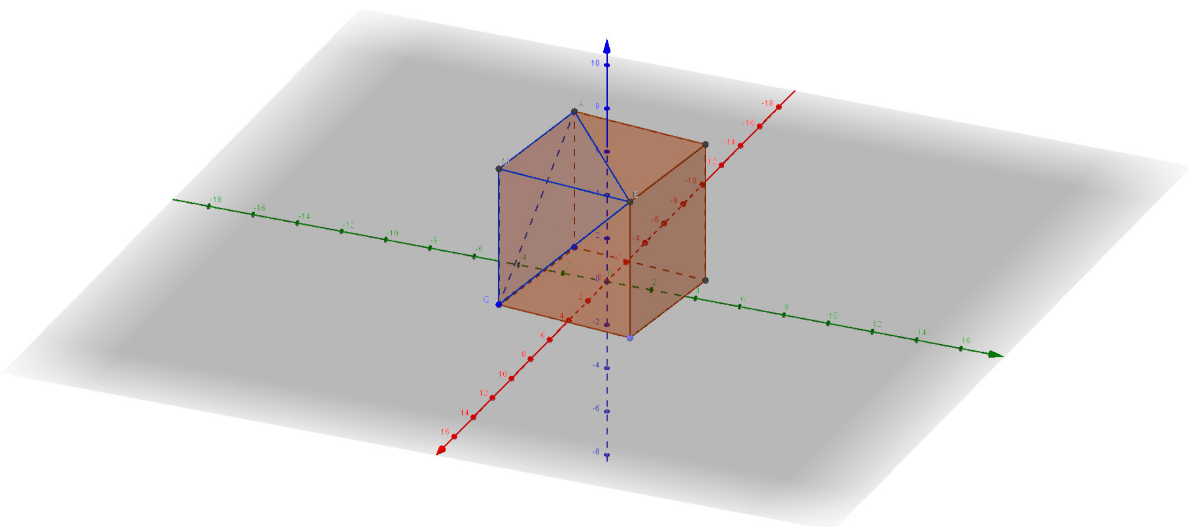
- Istituto Tecnico Tecnologico “Luigi Dell’Erba”, Castellana Grotte (BA)
- Liceo “Bertrand Russell”, Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)
- Liceo Scientifico Scienze Applicate “Arimondi-Eula”, Savigliano (CN)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) Classe III H, indirizzo Liceo Scientifico, Liceo “Aristosseno”, Taranto (TA)

1) Il volume del tetraedro è quello di una piramide a base triangolare. Possiamo assumere come base il triangolo rettangolo e isoscele AMB ,la cui area è la metà dell’area della faccia quadrata su cui giace , e la cui altezza è lo spigolo CM ad essa perpendicolare. Essendo la misura dello spigolo del cubo pari ad *a* ,si ottiene : V(MABC) = $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right)(a)=\frac{1}{6}a^3$.



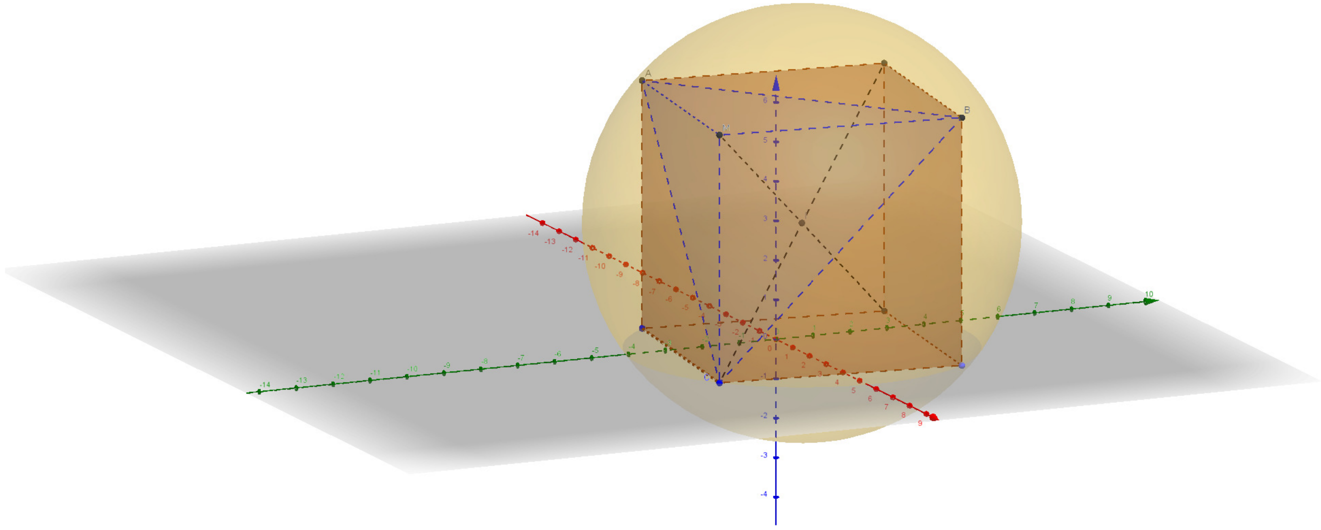
2)Il triangolo ABC è equilatero ;ogni suo lato è infatti diagonale della faccia del cubo cui appartiene.

Essendo AB=AC=BC = $a\sqrt{2}$, l’area del triangolo è S(ABC) = $(a\sqrt{2})^2\ \frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

3) La distanza del vertice M dal piano del triangolo ABC si può calcolare come altezza del tetraedro considerando il triangolo ABC come sua base. Dall’espressione del volume ricaviamo infatti :

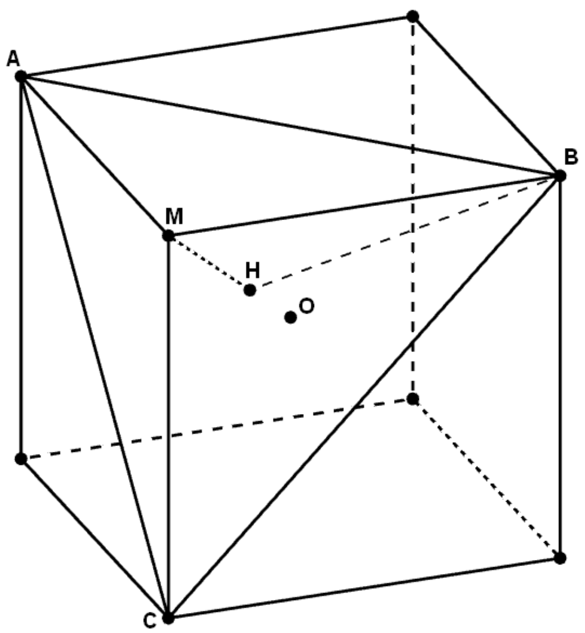
$$h=\frac{3V(MABC)}{S(ABC)}=\frac{3\,\frac{a^3}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

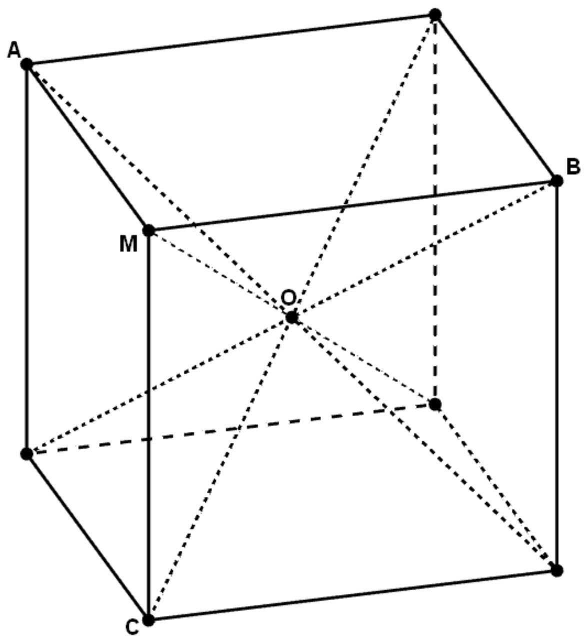
[manca un quadrato in S(ABC)]



4) La sfera circoscritta al tetraedro ha il centro nel punto di intersezione dei piani perpendicolari ai suoi spigoli nei loro punti medi. Il punto comune a questi piani è proprio il centro del cubo e perciò la sfera circoscritta al tetraedro è quella circoscritta al cubo stesso. Il suo raggio è dunque pari alla metà della diagonale del cubo e $d = a\sqrt{3}$, quindi R = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

2) *Luciano Spettoli, Classe 2^E, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria*





Ipotesi:

- $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ sono spigoli di uno stesso cubo.
- $\overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{CM} = a$

Determinare in funzione di a :

1) il volume del tetraedro $MABC$

2) l'area del triangolo ABC

3) la distanza di M dal piano per A, B e C

4) il raggio della sfera circoscritta a $MABC$

Dimostrazioni:

Nel triangolo ABC i lati $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sono diagonali di facce del cubo e perciò $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC} = a\sqrt{2}$ e il triangolo ABC è perciò equilatero. In un triangolo equilatero di lato b, l'area vale $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ e perciò l'area di ABC vale $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (Dimostrato punto 2)

La distanza di un punto da un piano è il segmento di perpendicolare condotto dal punto al piano; chiamiamo $\overline{MH}$ la distanza di M dal piano ABC. Per ipotesi $\overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{CM}$ e perciò M è equidistante da A, B e C e dunque lo è anche H ([[incentro]] [circocentro] del triangolo ABC che è equilatero) che per questo motivo giace nel centro del triangolo ABC, che è anche baricentro. Il baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due segmenti tali che quello uscente dal vertice è il doppio dell'altro. Poiché il triangolo ABC è equilatero, le sue mediane coincidono con le altezze e perciò $\overline{HB}$ è i due terzi delle altezze del triangolo ABC. L'altezza di un triangolo equilatero di lato b vale $\frac{b\sqrt{3}}{2}$ e dunque l'altezza del triangolo ABC vale $\frac{(a\sqrt{2})\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ e perciò si ha: $\overline{HB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Dato che, per costruzione, $\overline{MH}$ è perpendicolare al piano ABC, allora è perpendicolare anche a $\overline{HB}$ e per il Teorema di Pitagora si ha $\overline{MH} = \sqrt{\overline{MB}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)a^2} = a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (Dimostrato punto 3)

Il volume di una piramide è dato da $\frac{A_b \cdot h}{3}$ dove A_b è l'area di una faccia e h è l'altezza dalla faccia del rispettivo vertice opposto. Nella piramide $MABC$ consideriamo come base il triangolo ABC e altezza $\overline{MH}$, perciò il volume di $MABC$ vale $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a^3\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{9}} = a^3\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{a^3}{6}$. (Dimostrato punto 1)

Poiché il cubo è un poliedro regolare, allora è inscrivibile in una sfera: il centro O di questa sfera deve essere equidistante da tutti i vertici del cubo e in particolare è equidistante da tutte le coppie di vertici opposti e per tale motivo è il punto di intersezione delle quattro diagonali del cubo; infatti le diagonali di un cubo sono congruenti e concorrenti nei rispettivi punti medi. Detta d la lunghezza delle diagonali, il punto O dista $\frac{d}{2}$ da ogni vertice. In un cubo la diagonale è $\sqrt{3}$ volte lo spigolo: in questo caso lo spigolo misura a e perciò la diagonale misura $a\sqrt{3}$ e dunque il raggio della sfera circoscritta al cubo misura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. La superficie esterna della sfera circoscritta al cubo passa per tutti i vertici del cubo ed in particolare per M , A , B e C e dunque è circoscritta anche alla piramide $MABC$. Il raggio della sfera circoscritta al tetraedro $MABC$ misura dunque $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (Dimostrato punto 4)

C.V.D.

3) Damiano Castrignanò e Giovanni Pellegrino, 3^A Chimica, I.T.T. "Luigi Dell'Erba", Castellana Grotte (BA)

PARTE SCRITTA ELABORATA DA: Damiano Castrignanò II Cc I.T.T. "Luigi Dell'Erba"

PARTE GRAFICA ELABORATA DA: Giovanni Pellegrino III Ac I.T.T. "Luigi Dell'Erba"

IPOTESI

$\overline{MA}$=a

$\overline{MA}$ è lo spigolo di un cubo

MABC è un tetraedro

r è il raggio della circonferenza circoscritta al cubo di spigolo $\overline{MA}$

Consideriamo il tetraedro MABC:

1. $M\overset{\triangle}{A}B$ è la base del tetraedro ed è un triangolo rettangolo isoscele in cui $\overline{MA}$ è la base e $\overline{MB}$ è l'altezza ($\overline{MA}\cong\overline{MB}$ e $\overline{MA}\perp\overline{MB}$ in quanto $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$ sono spigoli del cubo)

2. $\overline{MC}$ è l'altezza del tetraedro ($\alpha_{AMC}\cap\beta_{MCB}=\{\overline{MC}\}$ e $\beta_{MCB}\perp\gamma_{MAB}$ e $\alpha_{AMC}\perp\gamma_{MAB}$ perché piani che costituiscono le facce di un cubo) $\overline{MC}\perp\gamma_{MAB}$

$V_{MABC} = \frac{\overline{MC} * A_{\overset{\triangle}{MAB}}}{3}$ (essendo il tetraedro una piramide)

$V_{MABC} = \frac{\overline{MA} * \overline{MB}}{2} * \overline{MC} * \frac{1}{3}$

$V_{MABC} = \frac{a * a * a}{2} * \frac{1}{3}$ (essendo $\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$ perché spigoli dello

stesso cubo) $V_{MABC} = \frac{a^3}{6}$

Consideriamo $\overset{\triangle}{ABC}$, esso ha:

1. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ perché diagonali di quadrati congruenti (essendo facce dello stesso cubo)

2. $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3} * \overline{BC}}{2}$ per il teorema di Pitagora applicato al triangolo isoscele [non detto che cos'è il punto H]

3. $\overline{MC}$=a ⟷ per il teorema di Pitagora applicato al quadrato

$A_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{\overline{BC} * \overline{AH}}{2}$

$A_{\overset{\triangle}{ABC}} = \sqrt{2}a * \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}a}{2} * \frac{1}{2}$

$A_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{4}$

$A_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$

Consideriamo il tetraerdo MABC, esso ha: [non detto che cos'è il punto K]

1. $A_b = A_{\overset{\triangle}{ABC}}$
2. $\overline{MK}$ è altezza del tetraedro relativo a $\overset{\triangle}{ABC}$

3. $V_{MABC} = \frac{a^3}{6}$ per precedente dimostrazione

$V_{MABC} = \frac{A_b * \overline{MK}}{3}$ $\qquad\qquad$ $V_{MABC} = \frac{A_{ABC} * \overline{MK}}{3}$

$\triangle$

$$\overline{MK} = \frac{3V_{MABC}}{A_{ABC}}$$

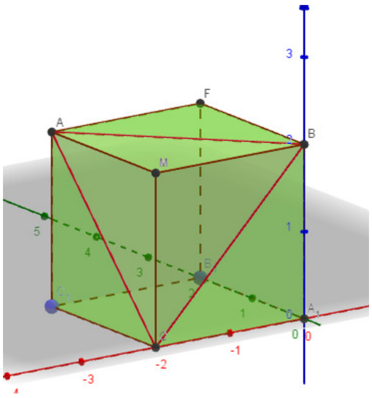
$$\overline{MK} = \frac{3 * 2 * a^3}{6\sqrt{3}a^2}$$

$$\overline{MK} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

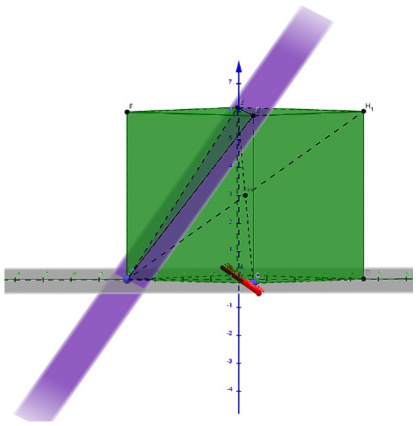
$$\overline{MK} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

[[…]] [semplificare]

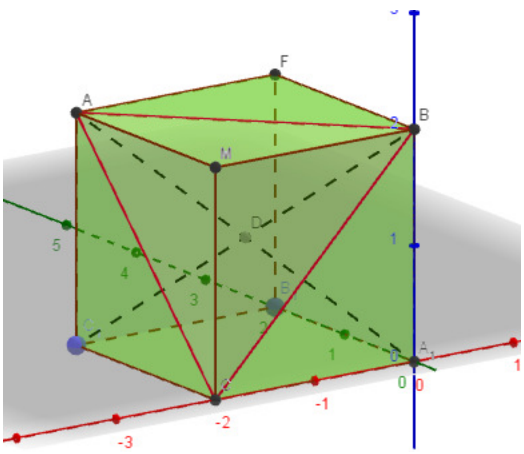
PER AVERE UNA LETTURA OTTIMALE DEL DOCUMENTO, TUTTE LE IMMAGINI RELATIVE SONO RIPORTATE QUI DI SEGUITO:

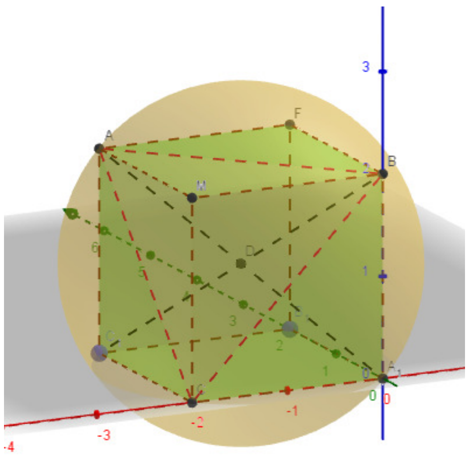


Cubo sezionato e relativo tetraedro MABC



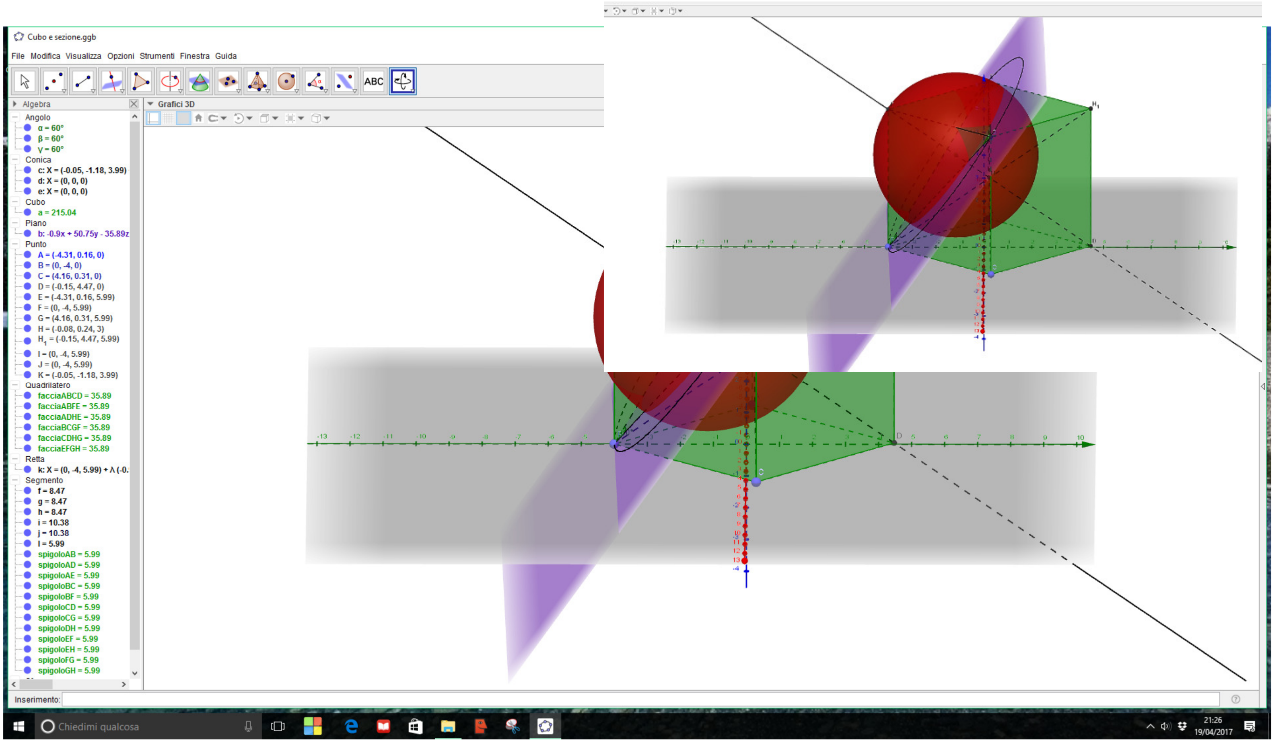
Sfera circoscritta al cubo nonché al tetraedro.

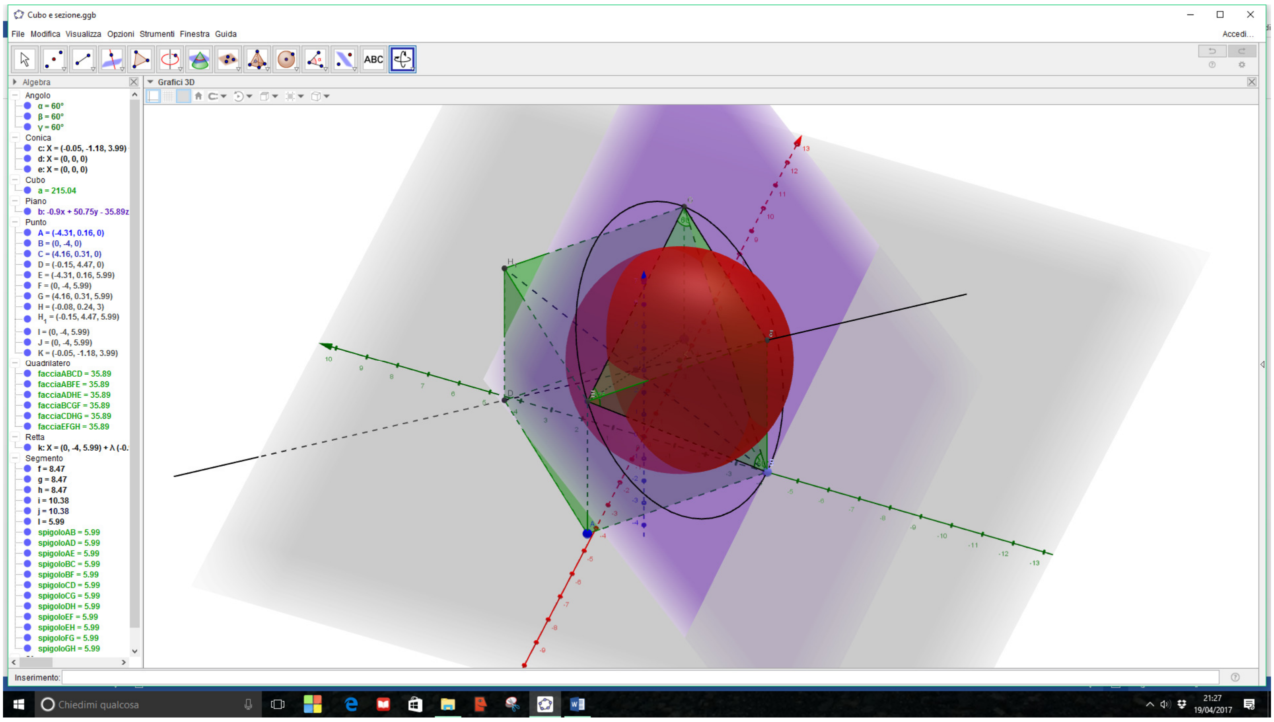




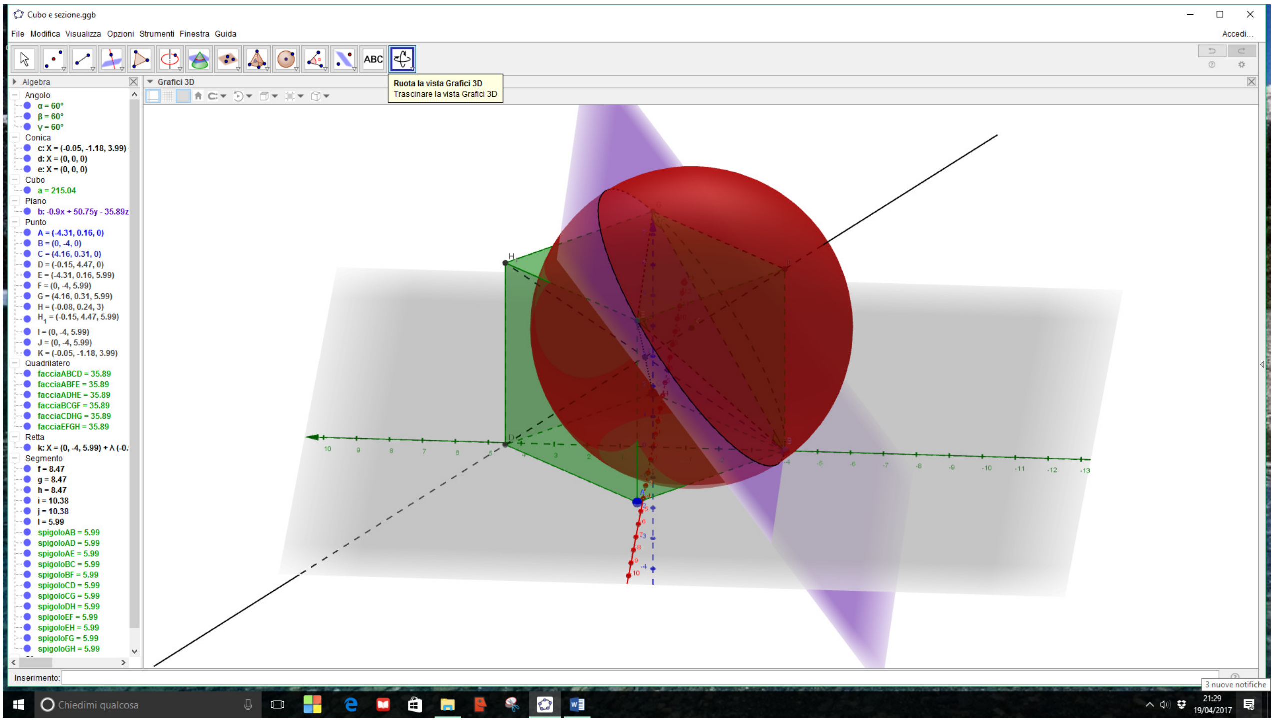
Sfera circoscritta alla base triangolare ma non al tetraedro.

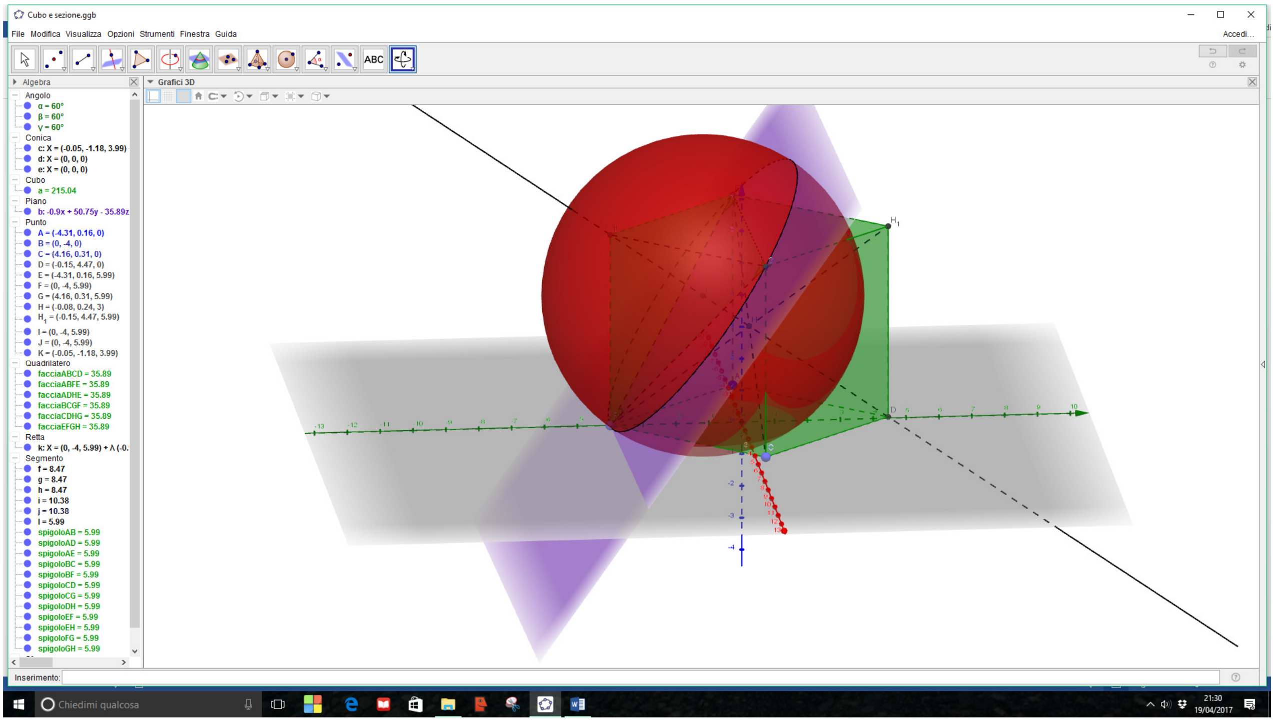
Dimostrazione [accurata] dell'ultima immagine





[[…]]


Cubo e sezione.ggb
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Accedi...
Algebra
Grafici 3D
Ruota la vista Grafici 3D
Trascinare la vista Grafici 3D
Angolo
α = 60°
β = 60°
γ = 60°
Conica
c: X = (-0.05, -1.18, 3.99)
d: X = (0, 0, 0)
e: X = (0, 0, 0)
Cubo
a = 215.04
Piano
b: -0.9x + 50.75y - 35.89z
Punto
A = (-4.31, 0.16, 0)
B = (0, -4, 0)
C = (4.16, 0.31, 0)
D = (-0.15, 4.47, 0)
E = (-4.31, 0.16, 5.99)
F = (0, -4, 5.99)
G = (4.16, 0.31, 5.99)
H = (-0.08, 0.24, 3)
H₁ = (-0.15, 4.47, 5.99)
I = (0, -4, 5.99)
J = (0, -4, 5.99)
K = (-0.05, -1.18, 3.99)
Quadrilatero
facciaABCD = 35.89
facciaABFE = 35.89
facciaADHE = 35.89
facciaBCGF = 35.89
facciaCDHG = 35.89
facciaEFGH = 35.89
Retta
k: X = (0, -4, 5.99) + λ (-0.
Segmento
f = 8.47
g = 8.47
h = 8.47
i = 10.38
j = 10.38
l = 5.99
spigoloAB = 5.99
spigoloAD = 5.99
spigoloAE = 5.99
spigoloBC = 5.99
spigoloBF = 5.99
spigoloCD = 5.99
spigoloCG = 5.99
spigoloDH = 5.99
spigoloEF = 5.99
spigoloEH = 5.99
spigoloFG = 5.99
spigoloGH = 5.99
Inserimento:
3 nuove notifiche
Chiedimi qualcosa
21:29
19/04/2017

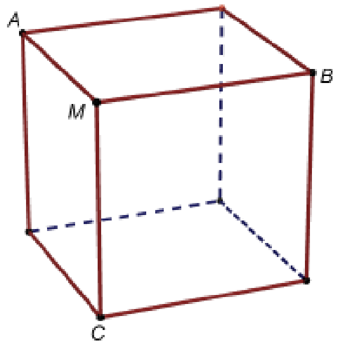

Cubo e sezione.ggb
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Accedi...
Algebra
Grafici 3D
Angolo
α = 60°
β = 60°
γ = 60°
Conica
c: X = (-0.05, -1.18, 3.99)
d: X = (0, 0, 0)
e: X = (0, 0, 0)
Cubo
a = 215.04
Piano
b: -0.9x + 50.75y - 35.89z
Punto
A = (-4.31, 0.16, 0)
B = (0, -4, 0)
C = (4.16, 0.31, 0)
D = (-0.15, 4.47, 0)
E = (-4.31, 0.16, 5.99)
F = (0, -4, 5.99)
G = (4.16, 0.31, 5.99)
H = (-0.08, 0.24, 3)
H₁ = (-0.15, 4.47, 5.99)
I = (0, -4, 5.99)
J = (0, -4, 5.99)
K = (-0.05, -1.18, 3.99)
Quadrilatero
facciaABCD = 35.89
facciaABFE = 35.89
facciaADHE = 35.89
facciaBCGF = 35.89
facciaCDHG = 35.89
facciaEFGH = 35.89
Retta
k: X = (0, -4, 5.99) + λ (-0.
Segmento
f = 8.47
g = 8.47
h = 8.47
i = 10.38
j = 10.38
l = 5.99
spigoloAB = 5.99
spigoloAD = 5.99
spigoloAE = 5.99
spigoloBC = 5.99
spigoloBF = 5.99
spigoloCD = 5.99
spigoloCG = 5.99
spigoloDH = 5.99
spigoloEF = 5.99
spigoloEH = 5.99
spigoloFG = 5.99
spigoloGH = 5.99
Inserimento:
Chiedimi qualcosa
21:30
19/04/2017

4) Mattia Corrà, Liceo "Bertrand Russell", Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)

Siano MA, MB, MC i tre spigoli di un cubo che partono dal vertice M.
Se lo spigolo del cubo misura a, determinare

1) il volume del tetraedro $MABC$
2) l'area del triangolo ABC
3) la distanza di M dal piano ABC
4) il raggio della sfera circoscritta al tetraedro $MABC$.

Motivare tutte le risposte.



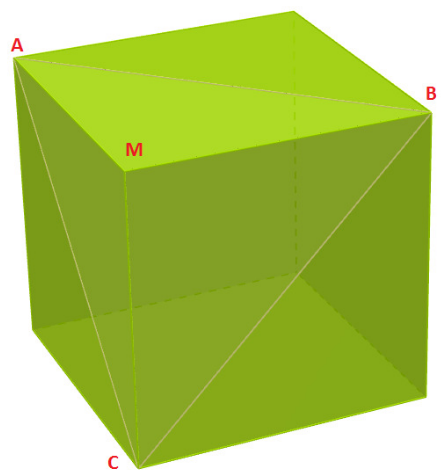
IP:MA, MB, MC sono i tre spigoli di un cubo di lato a.
Area ABC:
ABC è triangolo equilatero perché i suoi lati sono tutti lunghi a$\sqrt{2}$.

Allora la sua area è $\frac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4}$ l'altezza è infatti a$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi A=$a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Considero O la proiezione del punto M sul piano ABC.

$MO^2 = a^2 - (2/3\cdot\ a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ CO è infatti $\frac{2}{3}\cdot\ a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ perché il baricentro, che coincide con l'ortocentro di un triangolo equilatero divide l'altezza in due segmenti uno il doppio dell'altro [ma perché O è il baricentro ?]
Allora MO=1/$\sqrt{3}$ a.

Il volume del tetraedro MCBA è quindi V= $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{1}{6}a^3$.
Il raggio della sfera circoscritta al tetraedro MCBA e' lo stesso di quella che circoscrive l'intero cubo dato che tutti i vertici del tetraedro sono anche i vertici del cubo quindi esso vale come mezza diagonale, cioè [[$a\frac{\sqrt{2}}{2}$]] [$\frac{a\sqrt{3}}{2}$].

5) Bellino Enrico, 2°D, Liceo Scientifico Scienze Applicate Arimondi-Eula, Savigliano (CN)



Ipotesi: $MA \cong MB \cong MC = a$

Incognite: Volume MABC, Area ABC, Distanza di M da ABC, raggio sfera circoscritta MABC

Per facilitare la dimostrazione usiamo un software di geometria dinamica tipo Geogebra.

[[…]]

Per trovare l'area di ABC, trattandosi di un triangolo possiamo usare la formula di Erone: $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ dove $p = semiperimetro = \frac{a+b+c}{2}$

Dato che noi conosciamo solo gli spigoli ci serve trovare AB oppure BC oppure CA dato che sono congruenti perché diagonali di quadrati. Per ciò fare ci serve utilizzare il teorema di Pitagora: $a^2 + b^2 = c^2$
Quindi troviamo questi valori:
$CM^2 + MB^2 = BC^2 \rightarrow \ a^2 + a^2 = BC^2 \rightarrow BC = a\sqrt{2}$.
Abbiamo finalmente trovato il valore di BC. Dato che è congruente a AB e CA ora possiamo trovare il semiperimetro e calcolare l'area.

[[$p = \frac{3a}{2}$ … $A = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{3a}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{3a}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - a\right)^3 \cdot \frac{3a}{2}} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$]]

[$p = \frac{3\sqrt{2}}{2} a$]

Calcoliamo ora la distanza del punto M dal piano ABC. Dato che si tratta di una distanza sarà perpendicolare al piano e cioè sarà congruente all'altezza della piramide stessa.
Conoscendo volume e area di base calcoliamo l'altezza sapendo che il volume di un tetraedro è dato dalla formula: $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$, $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ [valore errato]

[[...]]