FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

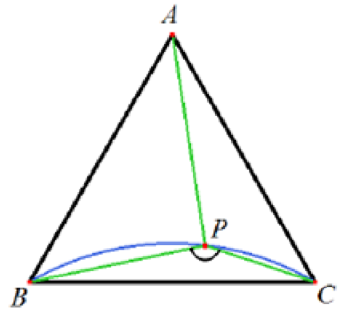
Flatlandia 13 - 27 Maggio 2016 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un punto interno al triangolo tale che l'angolo BPC sia di ampiezza 150°.

1) Costruire con riga e compasso un punto P che verifichi l'ipotesi.
2) Provare che il triangolo avente come lati i segmenti PA, PB, PC è un triangolo rettangolo (suggerimento: considerare la rotazione di centro B, in verso antiorario e di angolo 60°).

Motivare tutte le risposte.



Commento

Sono giunte 3 risposte, una da una classe prima e due da classi terze, tutte di Liceo Scientifico.

Il problema poneva due quesiti.

Nel primo si chiedeva di costruire con riga e compasso un punto P interno ad un triangolo equilatero ABC tale che l'ampiezza dell'angolo BPC fosse di 150°.

Nel secondo quesito si chiedeva di dimostrare che il triangolo avente per lati le misure dei segmenti PA, PB, PC era un triangolo rettangolo.

Le soluzioni arrivate rispondono in maniera sostanzialmente corretta ai due quesiti. Osserviamo però che alcune costruzioni elementari di base (quali la bisettrice dell'angolo formato da due semirette o la mediana di un lato di un triangolo) si possono dare per acquisite senza necessita' di riproporle per esteso.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "U.Dini", Pisa (PI)
- Liceo "B.Russell", Cles (TN)

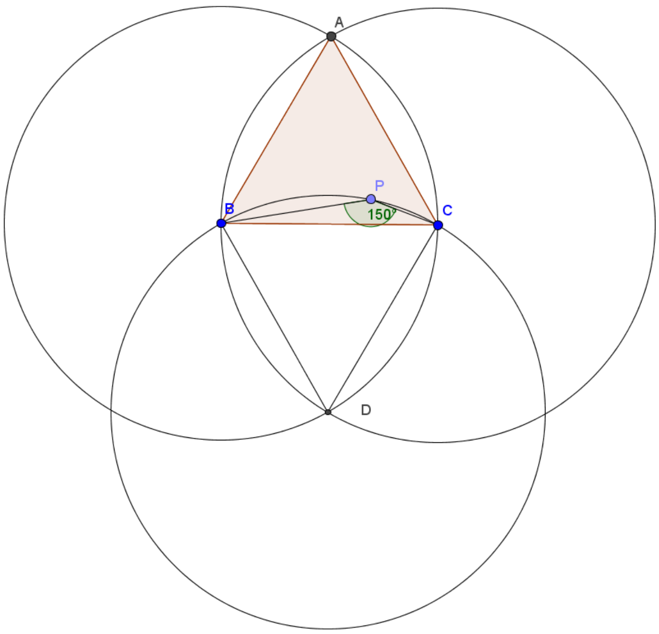
Come di consueto presentiamo tutti i commenti riuniti in questo unico file pdf (richiede Acrobat Reader).

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

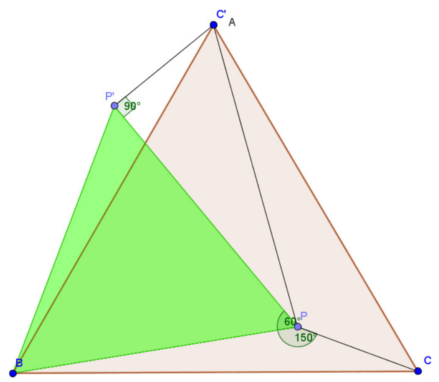
Soluzioni

Soluzione proposta dalla classe 3^ N, Liceo "Aristosseno", Taranto

1) Se consideriamo l'angolo BPC come un angolo alla circonferenza ,ottuso,inscritto nel minore dei due archi BPC, l'angolo al centro corrispondente avrà ampiezza 300°. Sul maggiore degli archi BPC insisteranno invece angoli di ampiezza 30° , e l'angolo al centro a questi associato avrà invece ampiezza 60°. Ecco perché ,per costruire [un] punto P [soddisfacente alla condizione richiesta] è sufficiente costruire il triangolo equilatero BCD di lato BC ,nel semipiano opposto a quello del triangolo ABC e tracciare la circonferenza di centro il suo vertice D e raggio il suo lato.



2) Effettuata una rotazione di centro in B , in verso antiorario e di ampiezza 60 °,il vertice C del triangolo ABC si porta in A (C' coincide con A), il punto P si sposta in P' e il triangolo BPC è congruente al triangolo BP'C' (la rotazione è una isometria) .
Il segmento BP è congruente a BP'e l'angolo PBP' ha ampiezza 60° per cui il triangolo PBP' è isoscele con l'angolo al vertice [in B] di 60 ° e perciò è equilatero.
Se ne deduce che l'angolo $BP'\hat{}P$ ha ampiezza 60° e poiché l'angolo $BP'\hat{}C' \cong B\hat{P}C$ =150° (data la congruenza del triangolo BP'C'con il triangolo BPC),l'angolo $PP'\hat{}C'$ =150°-60°=90° e perciò il triangolo PP'C' che ha come lati il segmento PA e i segmenti PP',congruente a PB,e P'C' congruente a PC, è un triangolo rettangolo.



2) Simmaco De Lillo, classe 3^G, Liceo Scientifico U. Dini, Pisa

[[Costruzione non richiesta]]

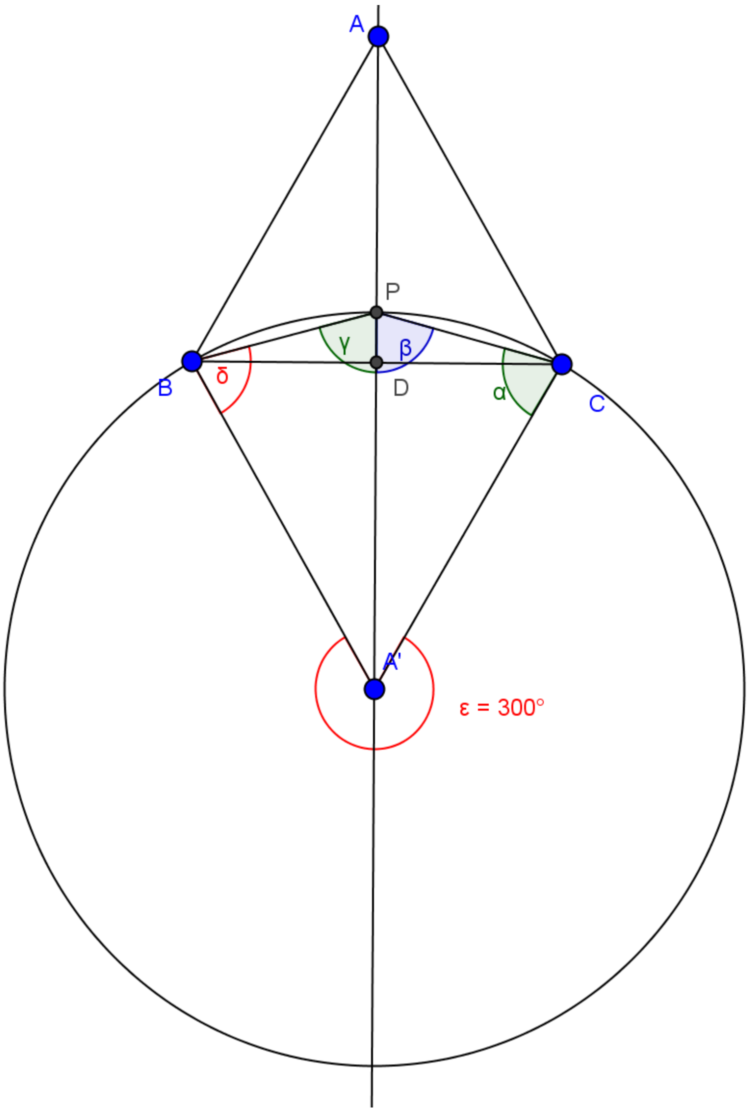
1.
Sia ABC un triangolo equilatero e sia m la mediana uscente da C (per costruire la mediana si punti in A e in B con uguale apertura (maggiore della metà della misura del segmento) e siano H e I i 2 punti di intersezione delle circonferenze. La mediana è la retta HI di intersezione perché questa retta è asse del segmento AB ($\overline{AH}=\overline{BH}$ = $\overline{AI}=\overline{EI}$ che è uguale all'apertura delle 2 circonferenze tracciate) e in un triangolo equilatero l'asse [[del segmento]] [di un lato] coincide con la mediana [relativa a quel lato]). La mediana è anche la bisettrice dell'angolo in C.
Sia E il punto di intersezione della bisettrice e il segmento AB
Con la costruzione spiegata all'inizio costruisco la bisettrice relativa all'angolo formato dalla semiretta CB e dalla semiretta CE.
Sia F il punto di intersezione della bisettrice appena costruita e il segmento AB.
L'angolo FCB misura 15° (è la quarta parte dell'angolo in C e poiché il triangolo è equilatero l'angolo in C misura 60°).
Con lo stesso metodo costruisco la mediana uscente da A e sia G il punto di intersezione della mediana con il segmento BC.
Sia P il punto di intersezione tra CF e la mediana uscente da A.
Il triangolo PGC è retto (AG è altezza del triangolo poiché altezza e mediana coincidono in un triangolo equilatero) e ha un angolo di 15° per questo motivo [[$\angle GPA$]] [GPC]= 75° (180° - 90° - 15° = 75°).
Anche l'angolo $\angle BPG$ = 75° poiché i triangoli BPG e GPA sono congruenti (BG = AG (G è il punto medio di AB essendo il punto di intersezione tra la mediana e il segmento), PG è in comune e entrambi hanno un angolo retto (AG è altezza relativa ad AC del triangolo ABC))
Da ciò segue che $\angle BPC$ = 150°. [E' questo l'unico punto interno al triangolo con la proprietà richiesta ?]

2.
Hp: ABC è un triangolo equilatero , $\angle BPC$ = 150°.
Th : il triangolo avente come lati i segmenti AP,PB e PC è retto.
Dim:
Sia P' il punto ottenuto dalla rotazione di 60° in verso antiorario attorno a B di P. $\angle BPC$ = 150° .
$\overline{BP}=\overline{BP'}$ (la rotazione è una isometria quindi conserva le distanze) quindi i 2 angoli appartenenti al segmento PP' sono uguali (il triangolo è isoscele) ma essendo [[$\angle BPP' = 60°$]] [PBP'=60°] (per costruzione), il triangolo BPP' è equilatero (ha 3 angoli di 60° ((180°- 60°)/2=60°)) quindi $\overline{BP}=\overline{PP'}$

Sia C' il punto ottenuto dalla rotazione di 60° in verso antiorario attorno a B di C [cioè A].
Sia B' il punto ottenuto dalla rotazione di 60° in verso antiorario attorno a B di B [cioè ancora B].
$\overline{CP} = \overline{C'P'}$ (la rotazione è una isometria quindi conserva le distanze)) ma C' coincide con A [[(essendo ABC un triangolo equilatero gli angoli del triangolo sono tutti uguali a 60°)]] quindi: $\overline{CP} = \overline{AP'}$
$\angle B'P'C'$ = $\angle BPC$ = 150° (la rotazione conserva l'ampiezza angolare) ma B' coincide con B (la rotazione ha un punto fisso il centro di rotazione) quindi $\angle BP'C'$ = $\angle BPC$ = 150°
ma $\angle BP'P = 60°$ (il triangolo BPP' è equilatero) .
$\angle PP'A = BP'C' - BP'P = 150° - 60° = 90°$.
Quindi il triangolo PP'A è rettangolo.
Il triangolo PP'A è un triangolo avente come lati i segmenti AP,PB e PC [[$(\overline{BP}) = (\overline{PP'})$, $(\overline{CP}) = (\overline{AP'})$]] . Q.E.D.

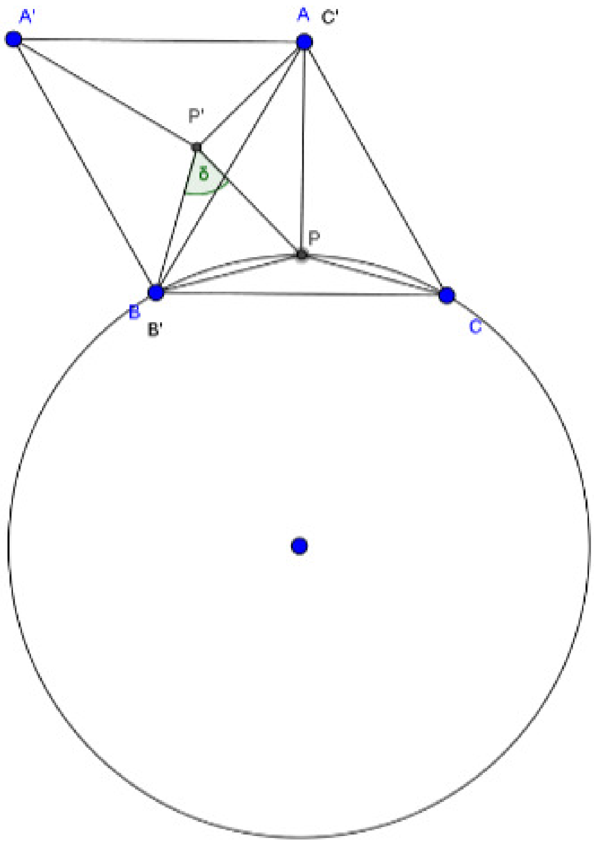
3) Mattia Corrà, Classe 1^D Liceo "Bertrand Russell" Scientifico Scienze applicate – Cles (TN)

PUNTO 1:



ip: ABC triangolo equilatero. P un punto tale che BPC angolo sia pari a 150°.
Bisogna costruire con riga e compasso un punto P che verifichi l'ipotesi.
COST: Costruisco un triangolo equilatero (disegno il segmento BC poi con il compasso di apertura BC traccio due archi di circonferenza con centro uno in B e l'altro in C così facendo il punto di intersezione dei due archi [[[sufficientemente lunghi da intersecarsi]]] è il vertice A del triangolo equilatero).
Ora costruisco il simmetrico del triangolo BCA rispetto alla retta passante per BC, B e C sono elementi uniti e coincidono con i rispettivi simmetrici e per il punto A, dopo aver trovato con il righello D che è punto medio [di BC] , traccio la mediana AD e la prolungo di un segmento lungo pari ad AD, trovando A'(o si costruisce un altro triangolo equilatero con base BC ma dall'altra parte con il metodo di prima se il righello non ha misure). A'CB quindi è triangolo equilatero.
Adesso traccio con il compasso [[una]] [la] circonferenza di raggio A'B e di centro A'.
I triangoli A'CP e A'PB sono congruenti per il primo CRIT. (Angoli CA'P e PA'B congruenti perché A'D mediana di triangolo equilatero e quindi bisettrice dell'angolo CA'B, i lati A'C, A'P e A'B sono raggi e quindi congruenti). [chi e' P ?]
Ora, CA'P= 30° perché A'P bisettrice, allora α = (180°-30):2= 75° perché CA'P è triangolo isoscele (A'C e A'P sono raggi) quindi anche β=75°. Per analogia δ=γ=75°. Allora L'angolo in questione, BPC è uguale a $\beta+\gamma$=150°. Questo vale per tutti i punti dell'arco di circonferenza all'interno del triangolo BAC perché insistente sullo stesso arco (infatti sono sempre la metà dell'angolo al centro ε che è uguale a 300°).

PUNTO 2:



ts: il triangolo formato dai [[lati]] [segmenti] PB, PA e PC è un triangolo rettangolo.

DIM: Costruisco il [[simmetrico]] [corrispondente] del triangolo ABC [[di una]] [nella] rotazione di 60° di centro B in senso antiorario trovando il triangolo A'B'C' (B' coincide con B e C' coincide con A).
L'angolo PBP' = 60° perché abbiamo effettuato una rotazione di 60°, infatti è compreso tra PB e il suo [[simmetrico]] [corrispondente] P'B', inoltre questi ultimi sono anche congruenti perché la rotazione è un'isometria.
Allora PBP' è un triangolo isoscele e quindi δ=BPP'=(180°-60°):2= 60° allora è anche equilatero quindi P'P congruente a BP.
Il triangolo [[PP'A]] [PP'C'] è formato dai lati [[PA]] [PC'=PA], P'C' che è congruente a PC perché [[isometria]] [P'C' e PC si corrispondono nella suddetta rotazione] e PP' che è congruente a BP perché BPP' triangolo equilatero. L'angolo PP'A= 150°- δ= 150°-60°=90° (BP'A = 150° perché congruente a BPC [[perché isometria, che sappiamo essere 150° per dim. Prec.]].).
Allora il triangolo [[PP'A sii può dire che]] [PP'C'] è formato dai lati [[PC, PB e PA (P'C' che è congruente a PC perché isometria e PP' che è congruente a BP perché BPP' triangolo equilatero)]] [PC' =PA, P'C' che e' congruente a PC e PP' che e' congruente a PB] ed è rettangolo perché [[PP'A]] [PP'C']=90°.
[[Questa dimostrazione vale per tutti i punti dell'arco di circonferenza all'interno del triangolo.]]