# FLAT*landia*

*"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)*

**Flatlandia 11 - 25 gennaio 2016 - Commento alle soluzioni ricevute**

## Il testo del problema

1) Sia $ABCD$ un trapezio isoscele e sia $P$ il punto d'incontro delle diagonali. Si tracci la parallela alle basi passante per il punto $P$ e siano $M$ ed $N$ i punti di incontro di essa con i lati obliqui; si dimostri che $MP$ ed $NP$ sono congruenti.

2) Si dimostri che il risultato precedente è ancora vero anche se il trapezio non è isoscele.

3) Dimostrare che in qualsiasi trapezio la misura del segmento $MN$ è la media armonica tra le misure delle basi $AB$ e $CD$ del trapezio.

Motivare tutti i passaggi.

Nota. La media armonica $c$ tra i numeri positivi $a$ e $b$ è definita dalla relazione $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

## Commento

Sono giunte sei risposte, due da classi terze, due da classi seconde e due da una classe prima di Liceo scientifico.

Il problema poneva tre quesiti. Nel primo si chiedeva di dimostrare che, in un trapezio isoscele, la parallela condotta per il punto di intersezione delle diagonali intercettatava con i lati obliqui un segmento dimezzato dal punto stesso. Nel secondo quesito si chiedeva di provare che tale proprietà era vera anche se il trapezio non era isoscele. Infine, si doveva dimostrare che la misura di tale segmento era la media armonica tra le misure delle due basi del trapezio.

Delle risposte giunte due rispondono correttamente a tutti e tre i quesiti. In altre risposte c'e' molta confusione tra le lettere riportate nelle figure e le lettere utilizzate nello svolgimento delle dimostrazioni e non sempre i passaggi sono sufficientemente motivati se non addirittura errati. Consigliamo perciò un'attenta rilettura degli elaborati per evitare problemi di questo tipo, soprattutto se si lavora in gruppo. Inoltre non possiamo accettare risoluzioni relative a un caso particolare del problema proposto. Diamo comunque priorità alle risoluzioni per via sintetica rispetto a quelle per via analitica.

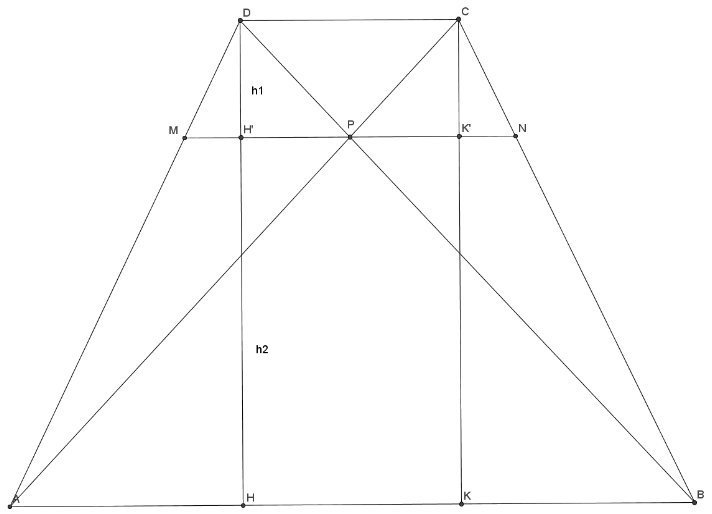
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "B. Russell", Cles (TN) (2 soluzioni)
- Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci", Casalecchio di Reno (BO)

*NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

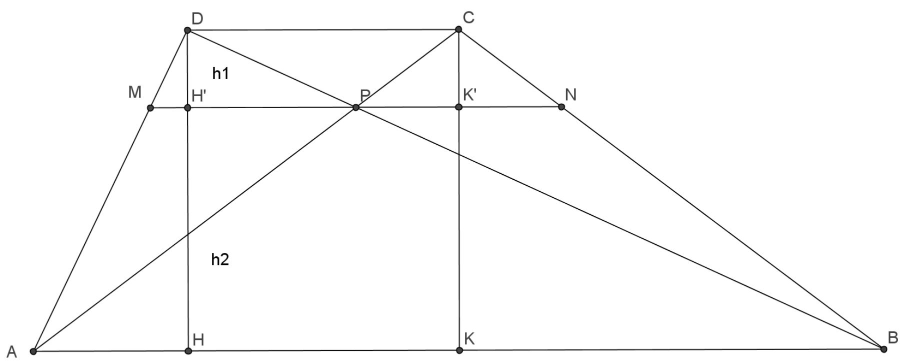
## Soluzioni

***Soluzione proposta dalla classe III N, Liceo "Aristosseno", Taranto***




1)Una conseguenza del teorema di Talete è il teorema secondo cui la parallela ad uno dei lati di un triangolo individua un triangolo ad esso simile. Nel trapezio isoscele ABCD i triangoli ABD ed MPD sono simili, e lo sono anche i triangoli ABC ed NPC .Poiché in triangoli simili le basi sono proporzionali alle rispettive altezze , possiamo scrivere le proporzioni seguenti : AB:MP = DH:DH' (per i primi due triangoli) e AB:NP =CK:CK' (per i secondi due triangoli). Ma $D\overline{H} \cong C\overline{K}$ e $D\overline{K}' \cong C\overline{K}'$ in quanto sono distanze fra rette parallele (AB è parallela a CD ed MN è parallela a CD) Perciò le due proporzioni hanno 3 termini [ordinatamente] uguali. Per il teorema della quarta proporzionale sarà allora : $M\overline{P} \cong N\overline{P}$ .

2)Analoghe considerazioni possiamo fare nel caso in cui il trapezio non sia isoscele. Infatti i triangoli ABD ed MPD e i triangoli ABC ed NPC sono ancora simili, pur non essendo ABD e ABC (e MPD ed NPC) congruenti fra loro come nel caso 1).



3)Poniamo ora DH=CK=h , DH'= CK'=h1 e H'H=K'K=h2 .Osserviamo che , oltre ai triangoli citati nei punti 1) e 2) ,anche i triangoli ADC e AMP sono simili e lo sono pure i triangoli DBC e BNP ( ancora per il teorema citato al punto 1))
Inoltre, se due triangoli sono simili, le basi e le altezze corrispondenti sono proporzionali. Possiamo quindi scrivere le seguenti proporzioni :

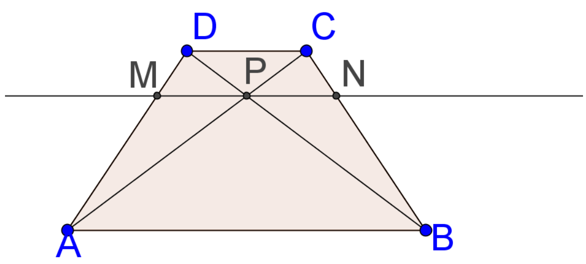
$AB : MP = h : h_1$ ( per i triangoli ABD e MPD)

$CD : MP = h : h_2$ ( per i triangoli ADC e AMP ) ;

è ,inoltre : $h = h_1 + h_2$ . Ricaviamo $h_1$ dalla prima proporzione ed $h_2$ dalla seconda :

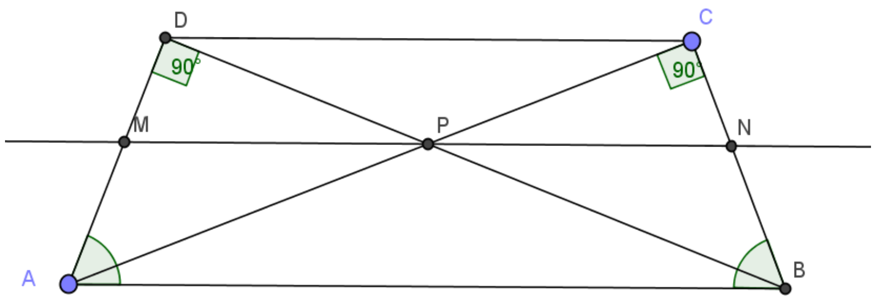
$h_1 = \frac{MP \cdot h}{AB}$ ; $h_2 = \frac{MP \cdot h}{CD}$ e sommiamo queste uguaglianze (mettendo in evidenza $MP \cdot h$ ): $h_1 + h_2 = MP \cdot h\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right)$. Ma $h = h_1 + h_2$ e perciò dalla : $h = MP \cdot h\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right)$ possiamo dividere per $h$ ambo i membri ,ottenendo : $1 = MP\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right)$.Ed essendo $MP = \frac{MN}{2}$ ,
abbiamo : $\frac{2}{MN} = \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right)$ .

***Soluzione proposta da Jassmine-Lahlou-Liceo Bertrand Russell-Cles (TN), Classe 1D***




1) [[…]] [Molti errori e affermazioni senza giustificazione]
2) [[…]]
3) [[…]] [Affermazioni non giustificate]

*Soluzione proposta da Mattia-Corrà, 1^D, Liceo "Bertrand Russell", Cles (TN)*




PUNTO 1

I triangoli [[ACD]] [ABD] e ACB hanno AB in comune, AD≅CB x ip. e gli angoli ABC e BAD

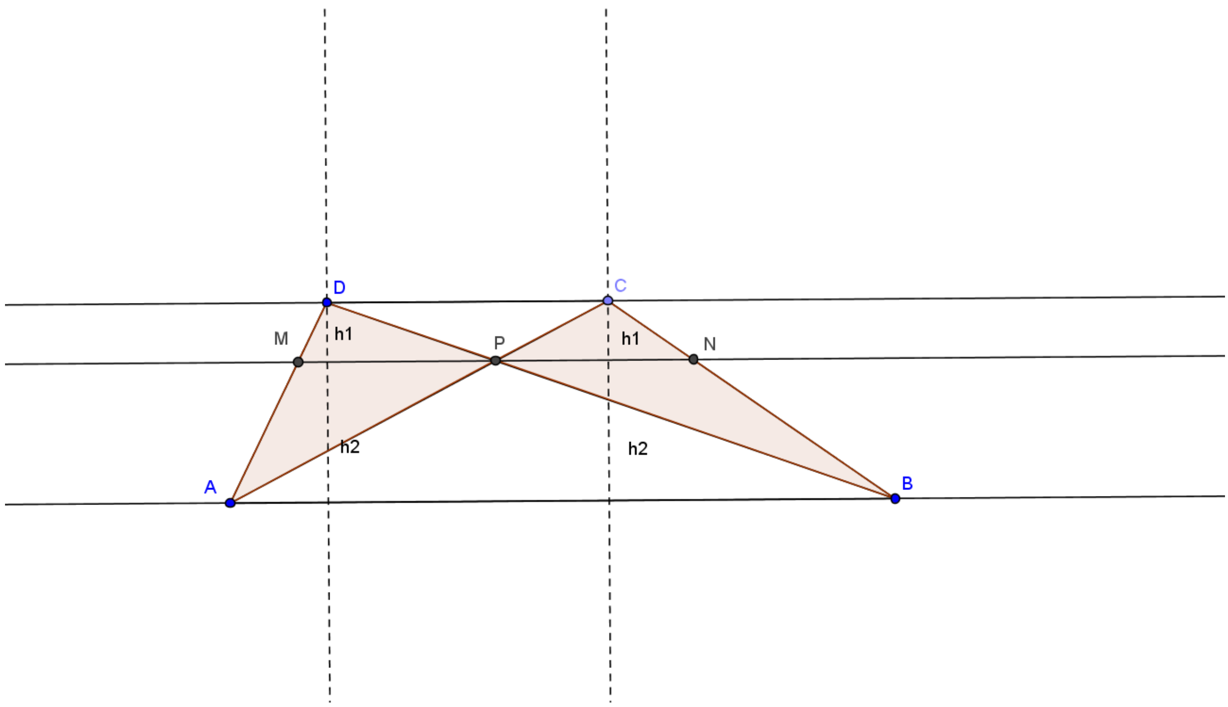
congruenti x ip.
Allora i due triangoli sono congruenti per il primo crit.

Il triangolo DPC è isoscele x' ha gli angoli alla base ≅ (diff. di angoli ≅) [spiegare piu' in dettaglio]

L'angolo NPC è ≅ ll'angolo MPD perché alterni interni di due angoli ≅[spiegare piu' in dettaglio]

DP≅PC perché di triangolo isoscele [DPC è isoscele su DC]

I triangoli MPD e PNC sono ≅ per il secondo crit. [e quindi ?]



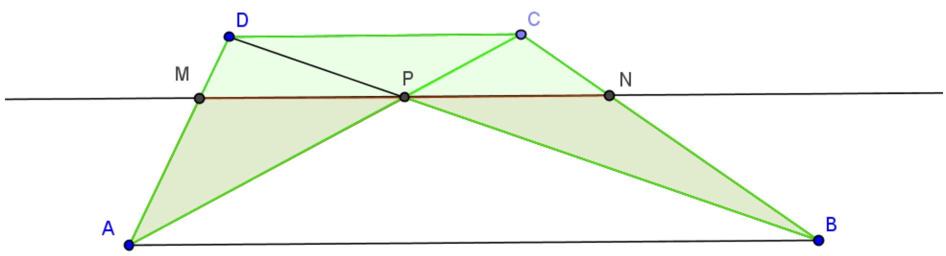

PUNTO 2

TS: MP=NP

Considero i triangoli ABC e ABD: essi hanno base in comune e altezza uguale perché la distanza tra due rette parallele è costante. Allora i triangoli ABC e ABD sono equivalenti.

Ora, il triangolo APB è in comune tra i due triangoli considerati sopra allora i triangoli ADP e BPC sono equivalenti perché nati dalla differenza di un area equivalente dai due triangoli (ABC e ABD). (le terne di lettere sono triangoli e = significa equivalente) MPD+APM=APD=BPC=PNC+PBN allora MPD+APM (MP in comune)= PNC+PBN (PN in comune). Scrivendo le aree mediante le basi e le altezze: MPx(h1+h2)=PNx(h1+h2) (le altezze sono costanti perché la distanza tra due rette parallele è costante), dividiamo tutto per (h1+h2) e il risultato è MP=PN.(In quest'equazione ho tralasciato il diviso 2 nell'area dei triangoli perché ho direttamente applicato il secondo prin. Di equivalenza) [può andare, ma è tutto detto molto male]

PUNTO 3




Si consideri ancora la corda MN passante per il punto *d'incontro* [[O]] [P] delle diagonali, parallela alle basi.

Dimostriamo che P è il punto medio di MN.

Dalla similitudine dei triangoli APM*,* ACD *e* [[DOM]] [DPM], DBA segue che:

$MP/CD = AM/AD$ e $MP/AB = DM/AD$

da cui

$AM = MP/CD \times AD$ e $DM = MP/AB \times AD$

Sommando membro a membro si ha:

$AM+DM = MP/CD \times AD + MP/AB \times AD$ quindi $AD = MP(1/CD+1/AB)AD$

e infine

$MP = 1:(1/CD+1/AB)$

Ragionando in maniera analoga sui triangoli BPN, BDC e CNP, CBA si conclude che

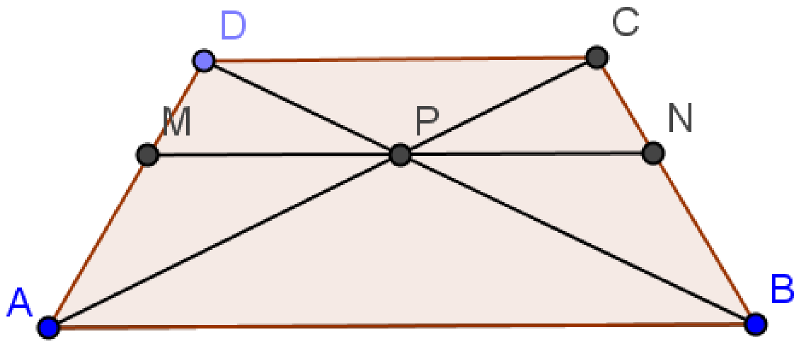
$NP=1:(1/CD+1/AB)$

Quindi $MP = NP$ e si conclude che

[[MP]] [MN] =2:(1/CD+1/AB)

cioé *MN* è media armonica tra le basi del trapezio.

***Soluzione proposta da Davide Giannico, Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci", Classe 3^A, Casalecchio di Reno (Bologna)***




IPOTESI:

AD=BC

AB//DC

MN//DC//AB

AC ⋂ DB≡P

M<P<N

TESI: MP=NP

DIMOSTRAZIONE

I triangoli ADC e DCB sono congruenti per il PRIMO CRITERIO

-DC è un segmento comune

-AD=BC per ipotesi

-gli angoli ADC e DCB sono congruenti per proprietà del trapezio isoscele

Si deduce quindi che gli angoli PAB e PBA sono congruenti perché differenza di angoli congruenti (infatti gli angoli DAC e DBC sono congruenti per la congruenza dei triangoli sopra dimostrata e DAB è congruente a CBA per proprietà del trapezio isoscele)

Da qui si deduce che il triangolo APB è isoscele perché gli angoli alla base sono congruenti (condizione necessaria e sufficiente). Quindi PA=PB

Gli angoli MPA e PAB sono congruenti perché alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale (MN//AB per ipotesi e la trasversale è la diagonale AC)

Analogamente sono congruenti gli angoli NPB e PBA. Per proprietà transitiva sono anche congruenti gli angoli MPA e NPB.

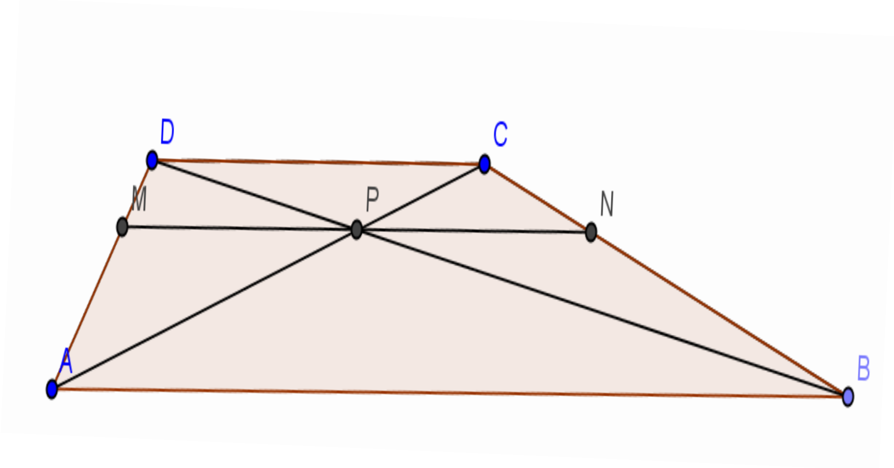
Da qui si deduce che i triangoli MPA e NPB sono congruenti per il SECONDO CRITERIO:

-AP=PB per dimostrazione precedente

-gli angoli MAP e PBN sono congruenti sempre per dimostrazione precedente

- gli angoli APM e BPN sono congruenti sempre per dimostrazione precedente

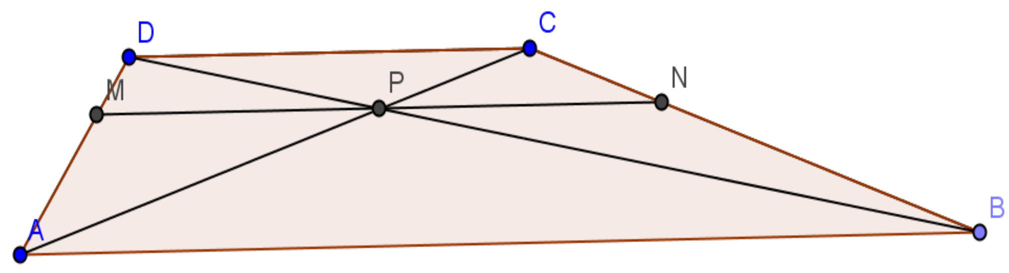
Da qui si deduce che MP=PN, come volevasi dimostrare




IPOTESI:
AB//DC
MN//DC//AB
AC ⋂ DB≡P
M<P<N
TESI: MP=NP
DIMOSTRAZIONE
I triangoli MDP e ADB sono simili per il PRIMO CRITERIO:

- L' angolo ADB è comune
- Gli angoli DMP e DAB sono congruenti perché corrispondenti di rette parallele (AB//MN) tagliate da DA

Quindi DM:DA=MP:AB
Analogamente i triangoli PCN e ACB sono simili e perciò CN:CB=NP:AB
Per il teorema di Talete DM:DA=CN:CB
Sapendo che DM:DA=MP:AB, CN:CB=NP:AB e DM:DA=CN:CB
Per proprietà transitiva MP:AB=NP:AB
Per la proprietà fondamentale delle proporzioni, il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi, ABxNP=MPxAB . dividendo per AB entrambi i membri si trova NP=MP, come volevasi dimostrare




IPOTESI:
AB//DC
MN//DC//AB
AC ⋂ DB≡P
M<P<N
TESI : 2/MN= 1/AB +1/DC
I triangoli MAP e DAC sono simili per il PRIMO CRITERIO

- DAC è un angolo comune

- Gli angoli MPA e DCA sono congruenti per sono corrispondenti di parallele (DC//MN) tagliate dalla diagonale AC

Quindi DC:MP=AC:AP
Analogamente i triangoli ABC e CPN sono simili. Quindi AB:PN=AC:CP
Essendo MP=PN e CP=(AC-AP), AB:PN=AC:(AC-AP)
Applicando lo scomporre (AB-PN):AB=(AC-AC+AP):AC
(AB-PN):AB=AP:AC
Sapendo che DC:MP=AC:AP e (AB-PN):AB=AP:AC, per proprietà transitiva (AB-PN):AB=MP:DC
Applicando la proprietà delle proporzioni: ABxMP= ABxDC – DCxPN
Essendo PN=MP: (AB+DC)xMP=ABxDC
MP=(ABxDC)/(AB+DC)
Essendo MP= ½ MN, facendo il reciproco dell'uguaglianza precedente e sostituendo MP, si ottiene 2/MN= (AB+DC)/(ABxDC) come volevasi dimostrare.