FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 14 - 28 Aprile 2016 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo acutangolo, sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.

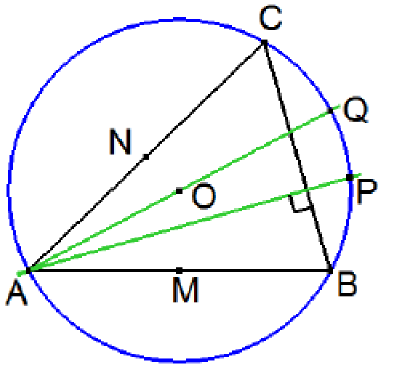
Si dimostri che:

a) gli angoli $B\hat{A}P$ e $Q\hat{A}C$ sono congruenti;

b) i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;

c) detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero $ABPC$ è quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.

Giustificare tutte le risposte.



Commento

Sono giunte 9 risposte, 2 di classi prime, 2 di seconde, 3 di terze e 2 di quarte (che accettiamo in via del tutto eccezionale), provenienti 8 dal Liceo Scientifico e 1 dal Liceo Classico

Il problema poneva tre quesiti. Nel primo si chiedeva di dimostrare che, dato un triangolo acutangolo e la circonferenza circoscritta ad esso, risultavano fra loro congruenti due opportuni angoli alla circonferenza. Nel secondo quesito si chiedeva di dimostrare la congruenza di due triangoli inscritti nella circonferenza, mentre nel terzo si chiedeva di provare, anche eventualmente sfruttando il secondo risultato, che le aree di due quadrilateri nella figura erano una il quadruplo dell'altra.

La maggior parte delle soluzioni arrivate risponde in maniera sostanzialmente corretta ai tre quesiti. Osserviamo però che alcuni file sono risultati difficili da leggere (soprattutto le formule, scritte con diverse versioni di Equation Editor per Word) per cui chiediamo ancora una volta ai risolutori di attenersi scrupolosamente alle indicazioni date per l'invio dei file. Notiamo inoltre che in alcune risoluzione viene usato un "linguaggio telegrafico" che sicuramente non aiuta la comprensione del testo.

Come di consueto presentiamo tutti i commenti riuniti in questo unico file pdf (richiede Acrobat Reader).

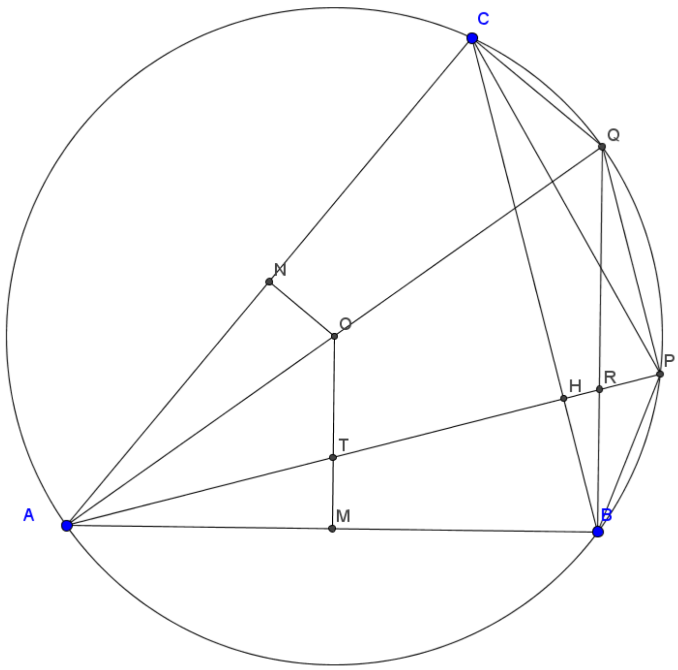
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "U.Dini", Pisa (PI)
- Liceo Classico e Scientifico "Euclide", Cagliari (CA)
- Liceo "B.Russell", Cles (TN)
- Liceo Scientifico - Linguistico "Pitagora" , Rende (CS)
- Liceo Scientifico "Alberti", Cagliari (CA)
- Liceo Scientifico "Cafiero", Barletta (BT)
- Liceo Scientifico "Alessi", Perugia (PG)
- Liceo Classico "F.Stabili", Ascoli Piceno (AP)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

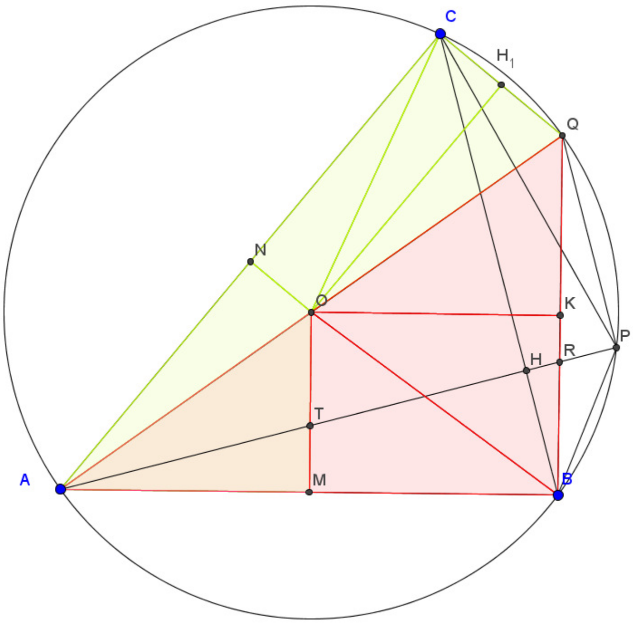
Soluzioni

1) Soluzione proposta dalla classe 3^ N, Liceo "Aristosseno", Taranto



a) Gli angoli $B\hat{A}P$ e $Q\hat{A}C$ sono congruenti perché i triangoli rettangoli AON e ATM sono simili, avendo gli angoli $A\hat{O}N$ e [[$A\hat{T}N$]] [$A\hat{T}M$] congruenti. Infatti : gli angoli $Q\hat{A}C$ e $Q\hat{B}C$ sono congruenti poiché insistono sullo stesso arco QC e gli angoli $A\hat{O}N$ e [[$A\hat{T}N$]] [$A\hat{T}M$] sono anch'essi congruenti in quanto : $A\hat{T}M \cong A\hat{R}B$ (corrispondenti delle parallele [[QM]] [OM] e QB, entrambe perpendicolari ad AB); $A\hat{O}N \cong A\hat{Q}C$ (corrispondenti delle parallele ON e QC ,entrambe perpendicolari ad AC) e $H\hat{R}B(A\hat{R}B)$ è complementare di $R\hat{B}H(Q\hat{B}C)$.

b)I triangoli BCP e CBQ sono congruenti per il quarto criterio di congruenza . Essi hanno infatti BC in comune ,gli angoli $B\hat{P}C \cong B\hat{Q}C$ insistono sullo stesso arco BAC, e gli angoli $Q\hat{B}C \cong B\hat{C}P$ insistono sugli archi congruenti QC e BP.



c) Il quadrilatero *ABQC* è decomponibile nel triangolo *ABC* e nel triangolo *BCQ*, il quadrilatero *ABPC* è decomponibile nel triangolo *ABC* e nel triangolo *BPC* ;e siccome *BCQ* e *BCP* sono equivalenti [perché congruenti] , lo sono anche i quadrilateri *ABQC* e *ABPC* (somme di figure equivalenti).
Basta allora [[trovare]] [provare] che *ABQC* ha area quadrupla di quella del quadrilatero *AMON*.
Congiungiamo O con C e tracciamo da O il segmento OH_1 perpendicolare a *QC* e il segmento *OK* perpendicolare a *BQ*. I quadrilateri [[ONH_1C]] [$ONCH_1$] e *OMBK* sono rettangoli e i raggi *OC* e *OB* li dividono nei triangoli *ONC* e OH_1C il primo e *OKB* e *OMB* il secondo ; tali triangoli sono congruenti a due a due ed equivalenti.
Ma OH_1C è congruente a OH_1Q (perché il triangolo COQ è isoscele e [[OH]] [OH_1] è la sua altezza) e *ONC* è congruente ad *AON* (perché AOC è isoscele e ON è la sua altezza).Perciò i quattro triangoli *AON,ONC*, OH_1C e OH_1Q sono congruenti fra loro ed equivalenti.
Analogamente i quattro triangoli *OKQ,OKB,OMB e OMA* risultano congruenti fra loro ed equivalenti. Quindi il quadrilatero *ABQC* è decomposto in otto triangoli rettangoli ; quattro di questi sono congruenti ed equivalenti al triangolo AON e gli altri quattro al triangolo *AOM* e dunque :

AREA(ABPC) = [[AREA(ABCQ)]] [AREA(ABQC)] = 4AREA(AON) + 4AREA(AOM) = 4AREA(AMON) .

2) Simmaco De Lillo, classe 3^G, Liceo Scientifico U. Dini, Pisa

Hp: Il triangolo ABC è acutangolo.

O circocentro triangolo ABC ($(AO)^{-} = (BO)^{-} = (CO))$.
P è il punto d'intersezione diverso da A tra l'altezza uscente da A e la circonferenza circoscritta al triangolo.
Q è il punto di intersezione diverso da A tra il prolungamento del raggio AO e la circonferenza circoscritta al triangolo

Th: $B\hat{A}P = Q\hat{A}C$

Dim: Sia H il punto d'intersezione tra i segmenti BC e AP.

Analizziamo i triangoli ABH e AQC:

entrambi hanno un angolo retto ($A\hat{H}B$ AH per ipotesi è altezza uscente da A quindi è perpendicolare al lato opposto ad A (BC) , $A\hat{C}Q$ è un angolo alla circonferenza che insiste su un diametro (AQ) quindi è retto

$H\hat{B}A = C\hat{Q}A$ (entrambi gli angoli sono angoli alla circonferenza che insistono sulla medesima corda (AC))

I due triangoli sono simili per il 1° criterio di similitudine dei triangoli (2 angoli rispettivamente congruenti) quindi $B\hat{A}P = Q\hat{A}C$ Q. E. D.

Th$_2$: I triangoli BCP e CBQ sono congruenti

Dim: $\overline{BP} = \overline{CQ}$ (nel punto a abbiamo dimostrato che $B\hat{A}P = Q\hat{A}C$ quindi anche le corde su cui insistono i 2 angoli sono congruenti)

$P\hat{A}C = B\hat{A}Q$ infatti $P\hat{A}C = Q\hat{A}C + P\hat{A}Q$ e $B\hat{A}Q = P\hat{A}Q + B\hat{A}P$ ma $B\hat{A}P = Q\hat{A}C$ (punto [[b)]] [a)] quindi $P\hat{A}C = B\hat{A}Q$ da questa uguaglianza segue che $\overline{CP} = \overline{QB}$ infatti i 2 angoli insistono rispettivamente su queste corde.

I triangoli BCP e CBQ sono congruenti per il 3° criterio (3 lati ordinatamente congruenti) Q. E. D.

Per semplificare la dimostrazione per indicare l'area di un poligono scriverò i nomi dei vertici tra parentesi quadre (es. [XYZ] equivale a scrivere L'area del triangolo XYZ)

Hp$_2$: M punto medio di AB.

N punto medio di AC

Th$_3$: [ABPC] = 4 [AMON]

Dim: [ABPC]=[ABC]+[BPC] ma i triangoli BPC e BQC sono congruenti (punto b) quindi:

[ABPC]=[ABC]+[BQC]= [AQC]+[AQB].

I triangoli ABQ e AMO sono simili per il 2° criterio di similitudine dei triangoli (una coppia di lati in proporzione e l'angolo compreso congruente) infatti hanno una coppia di lati in proporzione $\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = 2\ (M\ per\ ipotesi\ è\ il\ punto\ medio\ di\ AB)\ e\ \frac{\overline{AQ}}{\overline{AO}} = 2\ \ (AQ\ è\ diametro\ e\ AO\ è\ raggio)\right)$ e l'angolo QAB (quello compreso tra la coppia di lati) è in comune ne consegue che $\frac{[ABQ]}{[AMO]} = 4\ \ da\ cui\ si\ ricava\ che\ [ABQ] = 4[AMO]$ (il rapporto fra le aree di 2 triangoli simili è il quadrato del rapporto di proporzione che esiste tra i lati di 2 triangoli simili)

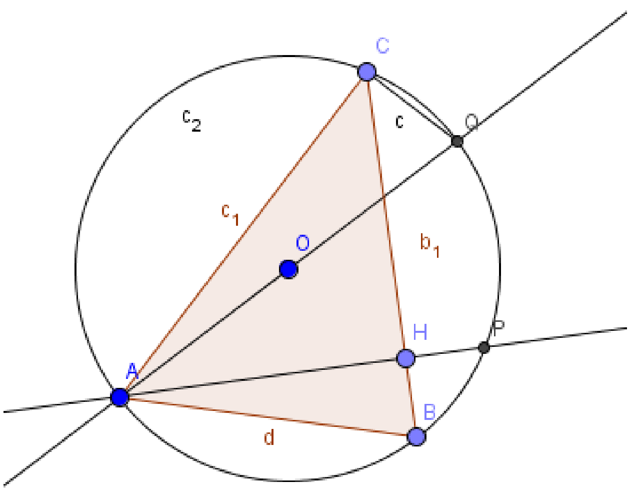
I triangoli ACQ e ANO sono simili per il 2° criterio di similitudine dei triangoli (una coppia di lati in proporzione e l'angolo compreso congruente) infatti hanno una coppia di lati in proporzione $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = 2\ (N\ per\ ipotesi\ è\ il\ punto\ medio\ di\ AC)\ e\ \frac{\overline{AQ}}{\overline{AO}} = 2\ (AQ\ è\ diametro\ e\ AO\ è\ raggio)\right)$ e l'angolo CAQ (quello compreso tra la coppia di lati) è in comune ne consegue che $\frac{[ACQ]}{[ANO]} = 4\ \ da\ cui\ si\ ricava\ che\ \ [ACQ] = 4[ANO]$ (il rapporto fra le aree di 2 triangoli simili è il quadrato del rapporto di proporzione che esiste tra i lati di 2 triangoli simili)).

[ABPC]= [AQC]+[AQB] =4[ANO]+4 [AMO] = 4 ([ANO]+[AMO]) ma [ANO] + [AMO] = [AMON] quindi [ABPC]=4[AMON] Q. E. D.

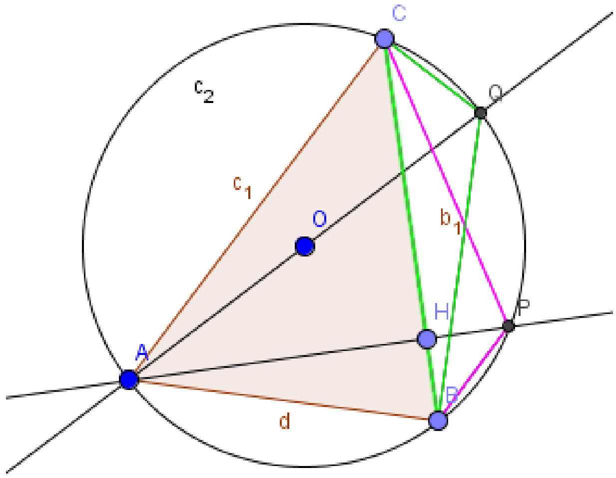
3) **Risoluzione di Francesca Vacca – classe IV B scientifico Liceo Classico e Scientifico "Euclide" Cagliari (con altri studenti del gruppo "Matematici Euclidei" del Liceo Euclide di Cagliari)**

a) Uniamo C con Q e consideriamo il triangolo AQC. Esso è rettangolo in C, in quanto è inscritto nella semicirconferenza di diametro AQ. Indichiamo con H il piede dell'altezza relativa al lato BC.

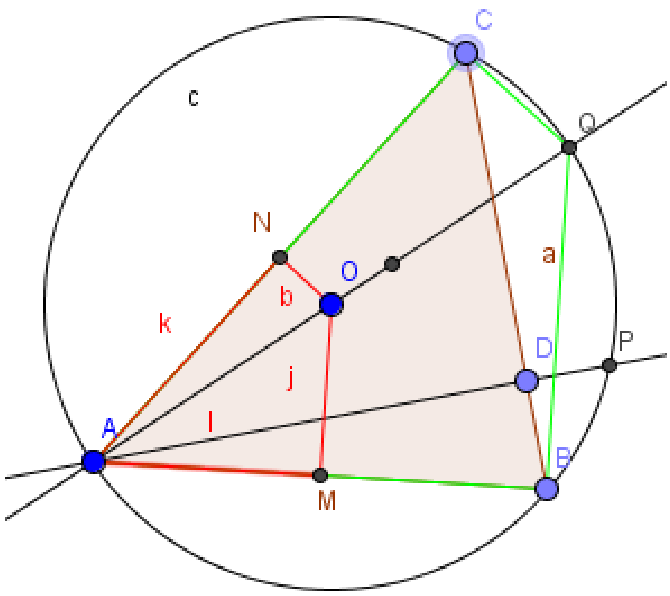
Il triangolo AHB è rettangolo in H. Gli angoli $A\hat{Q}C$ e $A\hat{B}C$ insistono sullo stesso arco CA (orientato in senso antiorario), quindi sono congruenti. Poiché i triangoli ABH e AQC sono rettangoli, gli angoli $Q\hat{A}C$ e $B\hat{A}P$ sono congruenti in quanto sono rispettivamente complementari degli angoli congruenti $A\hat{Q}C$ e $A\hat{B}C$.



b) I triangoli CBQ e PCB hanno il lato BC in comune. Dato che corde sottese da angoli congruenti sono congruenti, essendo $QA^{C} \cong BA^{P}$, si deduce che $CQ \cong BP$. Inoltre, essendo $BA^{P} + PA^{Q} \cong CA^{Q} + PA^{Q}$, sono congruenti anche le corde BQ e PC perché sottese da angoli alla circonferenza congruenti. Quindi possiamo dire che i triangoli PCB e CBQ sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, avendo un lato in comune e gli altri due rispettivamente congruenti.

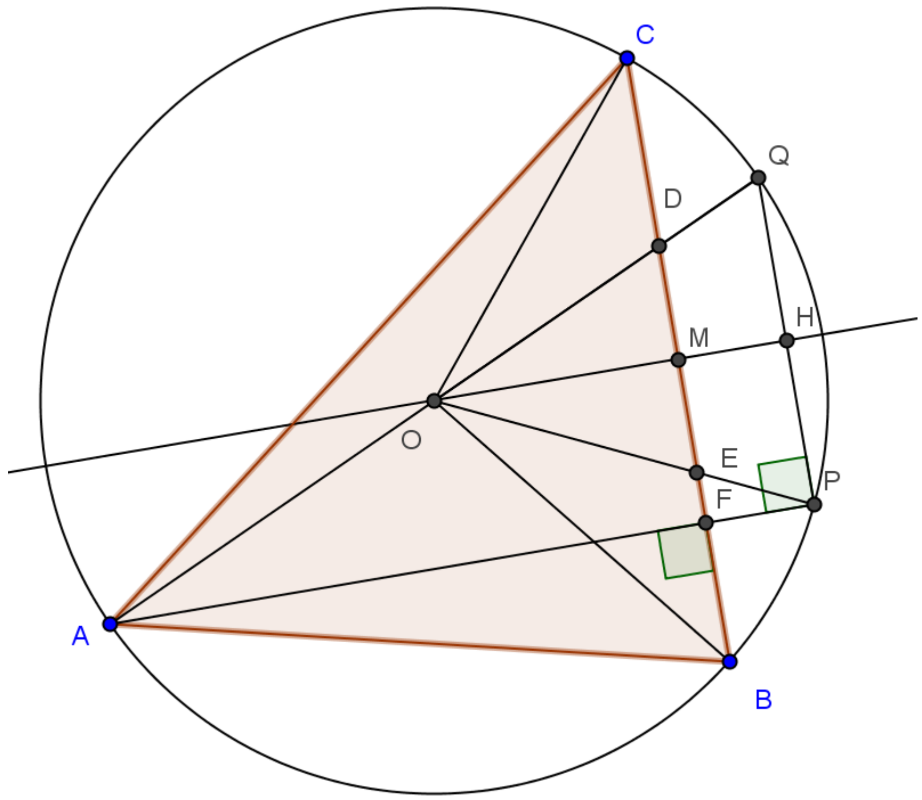


c)Poiché i triangoli CBQ e PCB del punto (b) sono congruenti, essi sono anche equivalenti, quindi invece del quadrilatero ABPC, somma del triangolo ABC e del triangolo BPC, possiamo considerare il quadrilatero ABQC. Infatti i due quadrilateri sono equivalenti perché somme di triangoli congruenti.
Nel triangolo CQA, ON unisce il punto medio di CA con il punto medio di AQ, ed è pertanto congruente alla metà di CQ e parallelo ad esso. Dunque i triangoli CQA e AON sono simili (per avere un angolo in comune e gli altri angoli corrispondenti congruenti) e i lati di AQC sono in rapporto 2:1 con i lati corrispondenti di AON. Dato che le aree di due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi, esse sono in un rapporto di 4:1. Il ragionamento si può ripetere per i triangoli ABQ e AMO, le cui aree stanno nello stesso rapporto.
Complessivamente, poiché ABQC è la somma dei triangoli ABQ e AQC, mentre AMON è somma di AMO e di AON, la somma di aree nello stesso rapporto ci permette di stabilire che le aree dei poligoni ABQC e AMON sono nel rapporto 4:1.
Infine, per l'equivalenza tra i quadrilateri ABQC e ABPC, osservata sopra, si può concludere che l'area di ABPC è quadrupla di quella di AMON.



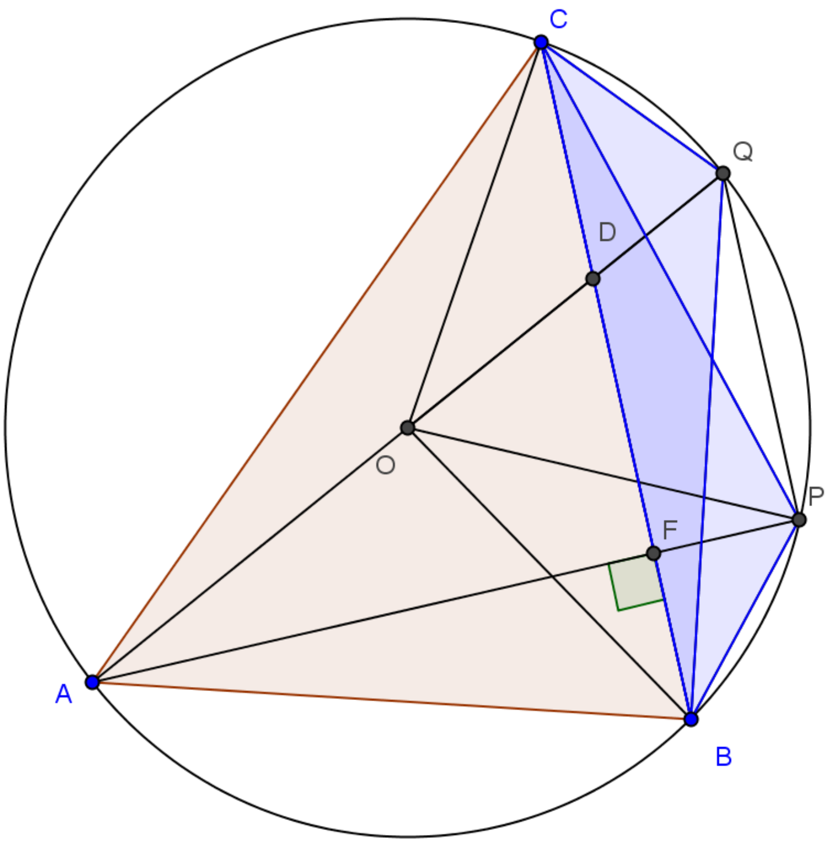
4) Mattia Corrà, Classe 1^D Liceo "Bertrand Russell" Scientifico Scienze applicate – Cles (TN)

DOMANDA 1:



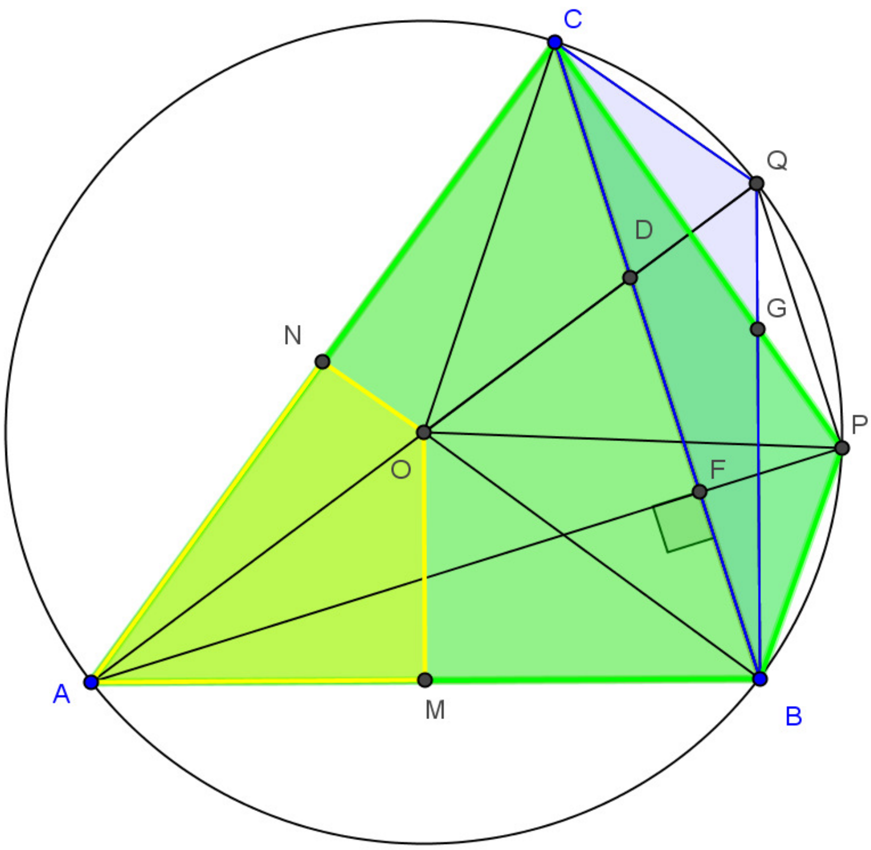
IP: O circocentro del triangolo ABC (acutangolo) e AF altezza del triangolo (sulla base BC).
TS: Gli angoli BAP e QAC sono congruenti.
DIM:
O è anche centro della circonferenza che circoscrive il triangolo visto che è il suo circocentro.
Noi sappiamo che un angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro insistente sullo stesso arco.
Quindi per dimostrare che gli angoli BAP e QAC siano congruenti basta dimostrare che gli angoli BOP e QOC siano congruenti.
L'angolo APQ = 90° perché il triangolo APQ è inscritto in una semicirconferenza.
Allora la retta passante per PQ è parallela a quella passante per BC perché gli angoli QPF e DFP sono supplementari (DFP è opposto a BFA).
La retta passante per OM è parallela a quella passante per AP perché gli angoli AFM e OMF sono entrambi di 90° (OMF=90° perché la retta passante per OM è asse del segmento BC)
Il triangolo POQ è isoscele perché ha come lati due raggi e la retta passante per OM è la sua altezza (MHP=90° perché coniugato interno di FPQ) e quindi bisettrice (gli angoli EOM e MOD sono congruenti).
Il triangolo BOC è isoscele perché ha come due lati il raggio del cerchio, la sua altezza è OM perché è perpendicolare a BC e quindi bisettrice (gli angoli BOM e MOC sono congruenti).
Gli angoli BOP e QOC sono congruenti per sottrazione di angoli congruenti (BOM-POM e COM-QOM).
Allora gli angoli BAP e QAC sono congruenti. CVD [I punti M e H come sono stati ottenuti ?] [Risoluzione prolissa e pesante]

DOMANDA 2:

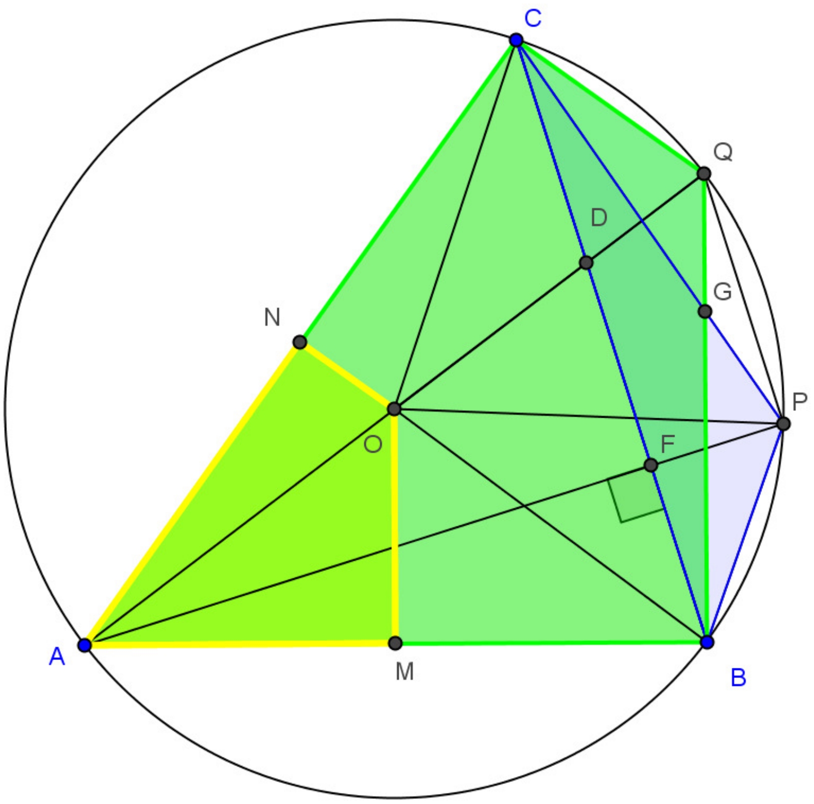


TS: I triangoli BCQ e BPC sono congruenti.
DIM:
I triangoli BOP e QOC sono congruenti per il primo CRITERIO (BO, PO, QO, CO sono raggi quindi fra loro congruenti e gli angoli BOP e QOC sono congruenti per dimostrazione precedente).
Allora BP congruente a QC [[quindi PBCQ è un trapezio isoscele (angoli alla base congruenti e PQ parallelo a BC per dim.prec.).]] [quale ?].
I triangoli BCQ e BPC sono congruenti per il terzo CRITERIO (i lati BP e QC sono congruenti, CB in comune e PC congruente a QB perché diagonali di un trapezio isoscele).

DOMANDA 3:



IP: M e N sono punti medi dei segmenti AB e AC.
TS: L'area del quadrilatero ABPC è 4 volte quella del quadrilatero AMON.
Considero i triangoli BPG e GQC, essi hanno:
l'angolo BGP congruente all'angolo QGC perché opposti al vertice. Visto che BPQC è un trapezio (dim. Prec.) [quale ?] allora le diagonali (BQ e CP) oltre ad essere congruenti si tagliano [[in modo da formare due triangoli isosceli (infatti CQB e CBP sono congruenti per dim. Precedente)]] [in parti congruenti] quindi i due triangoli sono congruenti per il primo CRITERIO.
Quindi possiamo considerare il quadrilatero ABQC al posto di ABPC perché equiscomponibili e perciò equivalenti. [Bastava osservare che CBQ=BPC, come richiesto nel secondo punto, per concludere].

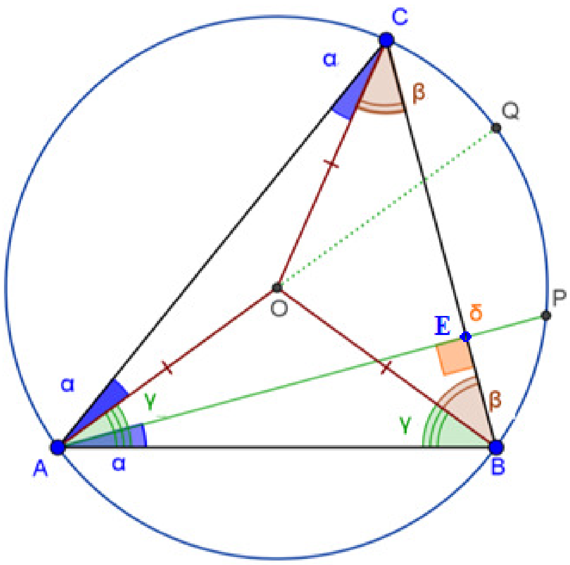


Ora, il triangolo AMO è simile al triangolo ABQ perché AM è la metà di AB (M è punto medio di AB per ip.), AO è la metà di AQ perché uno raggio e l'altro diametro della stessa circonferenza e l''angolo BAQ in comune [[(inoltre ABQ= 90° e ACQ = 90° perché angoli alla circonferenza di angoli piatti)]] [per quale criterio di similitudine ?).
Lo stesso ragionamento vale per i triangoli AON e AQC, infatti essi sono simili (angolo QAC in comune e AN è la metà di AC e AO è la metà di AQ).
Quindi visto che AM è la metà di AB, l'area del triangolo AMO è un quarto di quella del triangolo ABQ e visto che AN è la metà di AC allora l'area del triangolo AON è un quarto di quella del triangolo AQC.
Quindi [[$\frac{1}{4}A(ABQ) + \frac{1}{4}A(AQC) = x[A(ABQ) + A(AQC)]$ dove x è uguale naturalmente a $\frac{1}{4}$.]]

A(AMON)=A(AMO)+A(AON)=1/4 A(ABQ)+1/4 A(AQC)=1/4[A(ABQ)+AQC)]=1/4 A(ABQC).
Allora l'area del quadrilatero ABPC è 4 volte quella del quadrilatero AMON. CVD

5) Liceo Scientifico - Linguistico "Pitagora" di Rende (CS) Daniela Barbuscio – Fabiola Magliocco- classe III E - Scientifico

A)



- Disegnando i raggi dai vertici otteniamo tre triangoli isosceli con base un lato di ABC, in quanto gli altri lati sono congruenti in quanto raggi, ne segue che ognuno dei tre triangoli presenta i rispettivi angoli alla base congruenti. La somma degli angoli del triangolo ABC è data quindi dalla somma degli angoli alla base dei tre triangoli. Ne segue che:

  $$(\alpha+\alpha) + (\beta+\beta) + (\gamma+\gamma)= 180°$$

  poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

  da cui $2\alpha + 2\beta + 2\gamma= 180°$

  Dividiamo tutto per 2: $\alpha + \beta + \gamma= 90°$

  da cui $\alpha + (\beta + \gamma)= 90°$

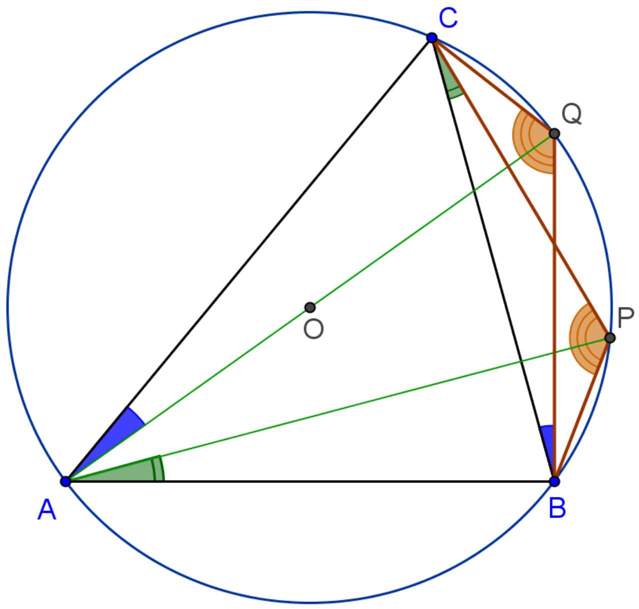
  Ne segue che α è complementare di $\beta + \gamma$

- Consideriamo il triangolo ABE, che è rettangolo in AEB poiché formato dalla perpendicolare AP su CB.

  Ne segue che l'angolo acuto EAB è complementare di ABC = $\beta + \gamma$, ma anche α è complementare di $\beta + \gamma$, quindi :

  $$BAP = QAC$$

B)



Premesso che

- CBQ = CAQ   poiché [[incidono]] [insistono] sullo stesso arco CQ;
- CAQ= PAB   per dimostrazione precedente;
- PAB = PCB   poiché [[incidono]] [insistono] sullo stesso arco PB;

Concludiamo che CBQ = PCB.

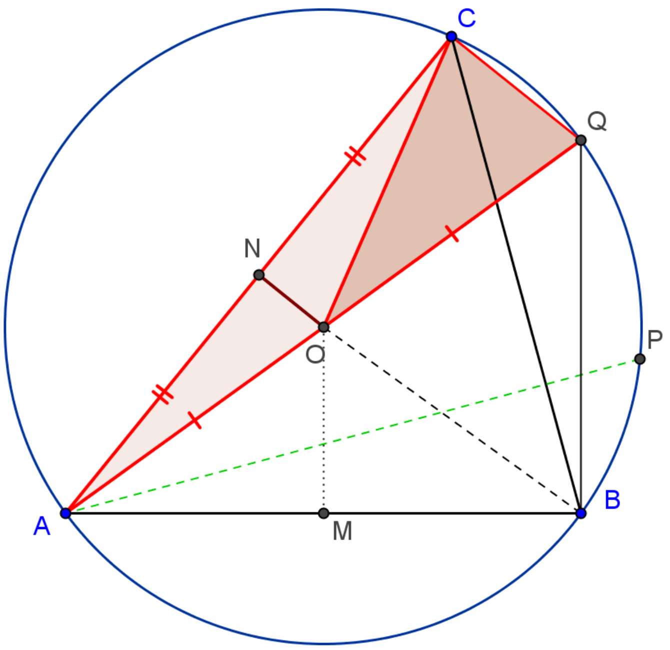
- Consideriamo i triangoli CQB e BPC, essi hanno:
  - CB in comune;
  - CQB = BPC   poiché [[incidono]] [insistono] sullo stesso arco CB;
  - CBQ = PCB.   per dimostrazione precedente.

  - [Saranno allora congruenti anche BCQ e BPC.]

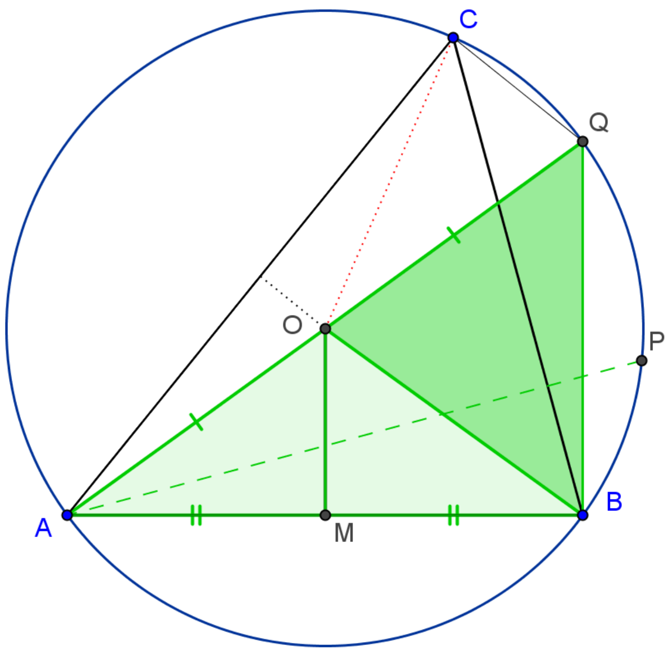
I triangoli CQB e PBC risultano congruenti per il secondo criterio di congruenza, avendo due angoli e [[un lato congruente]] [e il lato fra essi compreso congruenti].

CQB e PBC risultano equivalenti in quanto congruenti.

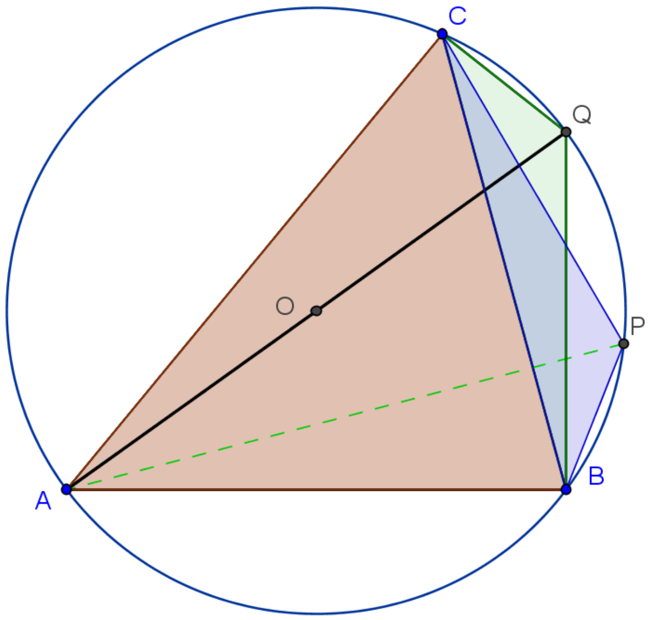
C)



Consideriamo il triangolo AOC diviso dalla mediana ON, risulta che AON = NOC, ovvero AOC = 2AON. Consideriamo anche ACQ diviso dalla mediana [[AC]] [CO], quindi AOC = [[COA]] [COQ] ovvero ACQ = 2AOC. Da questo risulta ACQ = 2AOC = 2(2AON) = 4AON.



Allo stesso modo, si dimostra che AOB = 2AOM e ABQ = 2AOB per cui ABQ = 4AOM.
Sommiamo membro a membro ACQ = 4AON e ABQ = 4AOM
otteniamo [[ACD]] [ACQ] + ABQ = 4(AON + AOM), ovvero ABQC = 4AMON.

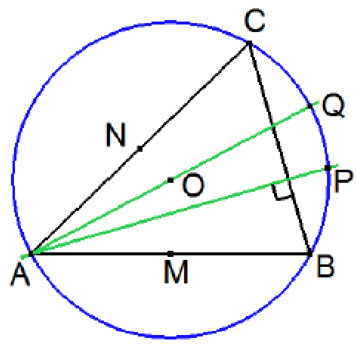


Consideriamo ora ABQC e ABPC, essi sono equiscomponibili e pertanto equivalenti, infatti hanno ABC in comune e BCP ≅ CBQ per dimostrazione precedente (punto a). Ne segue che:

[[ABCP]] [ABPC]= 4AMON

C.V.D.

6) Risoluzione di Stefano Troffa, classe IV E Liceo Scientifico "Alberti" Cagliari



a) Sia K il piede dell'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC.
   Consideriamo i triangoli ACQ e ABK.
   L'angolo AKB è retto per costruzione. L'angolo ACQ è retto perché è un angolo alla circonferenza che insiste sul diametro AQ.
   Inoltre gli angoli AQC e ABK sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda AC.
   Quindi i triangoli ACQ e ABK, avendo due angoli ordinatamente uguali, hanno uguali anche gli altri angoli BAP e QAC.

b) Consideriamo i triangoli BCP e BCQ:
   i lati BP e CQ sono uguali perché sottendono uguali angoli alla circonferenza;
   il lato BC è on comune;

gli angoli BCP e CBQ sono uguali perché angoli alla circonferenza sottesi da corde uguali.
[[Quindi i triangoli BCP e BCQ sono uguali per il 1° criterio di congruenza]] [Gli angoli congruenti non sono quelli compresi tra i lati congruenti].

c) Indichiamo con [ABPC] e con [AMON] rispettivamente le aree dei quadrilateri ABPC e AMON.
AO = ½ AQ perché il raggio è metà del diametro;
AM = ½ AB per costruzione;
AN = ½ AC per costruzione.
Quindi il quadrilatero ABQC si ottiene con un'omotetia di centro A e rapporto 2 dal quadrilatero AMON.
Allora [ABQC] = 2^2 [AMON].
Inoltre [ABQC] = [ABPC] perché i quadrilateri ABQC = ABPC sono entrambi formati dal triangolo ABC e rispettivamente dal triangolo BCQ e dal triangolo BCP che sono uguali come precedentemente dimostrato.
Quindi [ABPC] = [ABQC] = 4 [AMON].

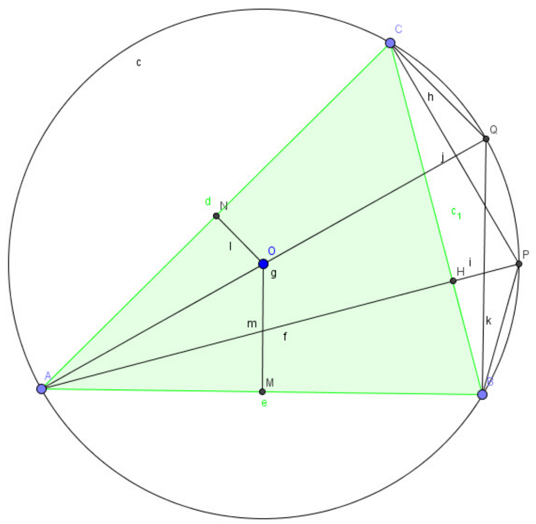
7) Risoluzione di VITO GRIMALDI 2 B LICEO "C. CAFIERO" BARLETTA

VITO GRIMALDI 2° B LICEO C. CAFIERO BARLETTA

a),b),c) [[…]]

[Risoluzione purtroppo incomprensibile sia nei simbolismi che nei ragionamenti. Uso massiccio di abbreviazioni non necessarie.]

8) Risoluzione di Alessia Filugelli, Pignattini Jairo, Spaccapelo Arianna, Vannucci Michele Classe II G Liceo Scientifico "Alessi" Perugia



Ipotesi

ABC triangolo inscritto in una circonferenza
O= centro circonferenza
AQ =diametro
P,Q$\in$ circonferenza
AP $\perp$ BC
AP $\cap$ BC= {H}
M= punto medio di AB
N= punto medio di AC

Tesi

$B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C$

$CBP \cong CBQ$

$Area_{(ABPC)}=4Area_{(AMON)}$

1) Considero i triangoli AQC e ABH, essi hanno:
  $A\hat{C}Q$ =90° perché ACQ è inscritto in una semicirconferenza
  $A\hat{H}B$=90° per ipotesi

  $C\hat{Q}A \cong H\hat{B}A$ perché insistono entrambi sull'arco $\overset{\frown}{CA}$

Quindi AQC≈ABH per il 1° Criterio di similitudine, in particolare $B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C$

2) Considero gli angoli $B\hat{A}Q$ e $P\hat{A}C$: $B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C$ per dimostrazione precedente, perciò $B\hat{A}Q \cong P\hat{A}C$

per somma di angoli congruenti ($B\hat{A}P + P\hat{A}Q \cong Q\hat{A}C + P\hat{A}Q$); quindi BQ ≅ CP perché corde su cui

insistono angoli congruenti ($B\hat{A}Q$⍰ $P\hat{A}C$).
Considero i triangoli CBP e CBQ, essi hanno:
  CB in comune;

  BP ≅ CQ perché corde su cui insistono angoli alla circonferenza congruenti ($B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C$ per

  dimostrazione precedente);

  $B\hat{C}Q \cong P\hat{B}C$ perché angoli alla circonferenza che insistono su corde congruenti per dimostrazione

  precedente [si poteva usare subito il terzo criterio di congruenza].

quindi CBP ≅ CBQ per il 1° Criterio di congruenza

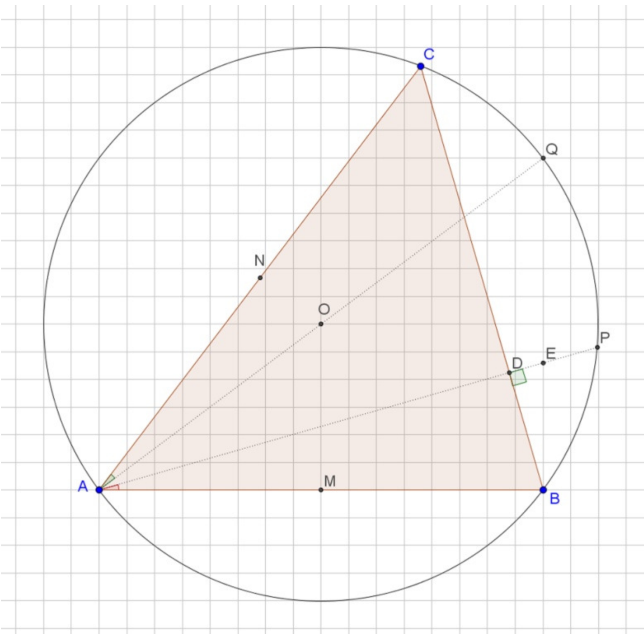
3)Considero i quadrilateri ABPC e ABQC: il triangolo ABC è in comune e CBP ≅ CBQ per

dimostrazione precedente, quindi ABPC è equivalente ad ABQC perchè somme di triangoli congruenti.

Considero i triangoli AMO e ABQ, essi hanno:
BÂQ in comune;
AM/AB=1/2 perché M è il punto medio di AB per ipotesi;
AO/AQ=1/2 perché O centro e AQ diametro, quindi AM/AB=AO/AQ per la proprietà transitiva,
di conseguenza AMO ~ ABQ per il 2° Criterio di similitudine, e l'area di ABQ è 4 volte l'area di AMO.
Considero i triangoli AON e AQC essi hanno:
QÂC in comune;
AN/AC=1/2 perché N è il punto medio di AC per ipotesi;
AO/AQ=1/2 perché O centro e AQ diametro, quindi AN/AC=AO/AQ per la proprietà transitiva,
di conseguenza ANO ~ ACQ per il 2° Criterio di similitudine, e l'area di ACQ è 4 volte l'area di ANO

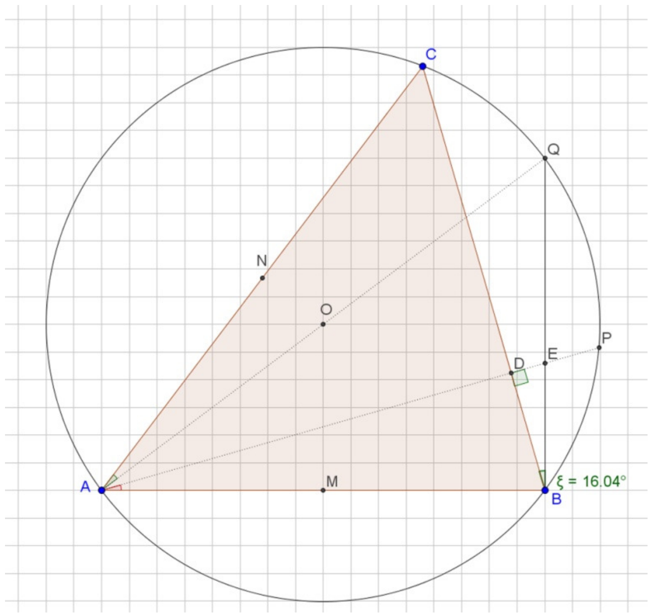
Di conseguenza l'area di AMON è quattro volte l'area di ABQC per somma di aree.
I quadrilateri ABQC e ABPC sono equivalenti per dimostrazione precedente perciò per la proprietà transitiva l'area di AMON è quattro volte l' area di ABPC.

8) Gianluca Giani. Classe 1 B del Liceo Classico "F. Stabili", Ascoli Piceno.



Hp: - ABC triangolo acutangolo
- O circocentro
- c circonferenza in centro O
- $A\hat{O}Q = \pi$[1]
- $AP \perp BC$
- $A; B; P; Q; C \in c$

Th: - $B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C$
- $BCP \cong CBQ$
- $A_{ABPC} = 4A_{AMON}$

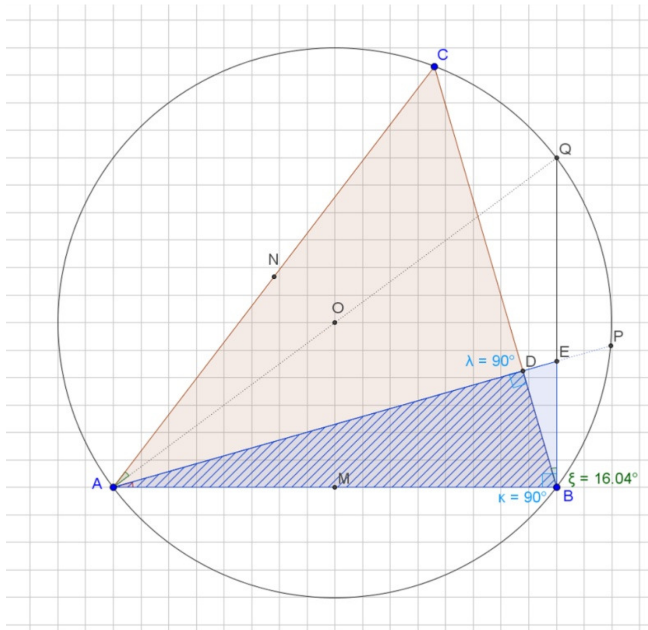


DIMOSTRAZIONE

- Si tracci il segmento BQ .

$Q\hat{B}C \cong Q\hat{A}C$ perché angoli alla circonferenza corrispondenti allo stesso angolo al centro $Q\hat{O}C$.

Sia D l'intersezione tra BC e AP e sia E quella tra BQ e AP .



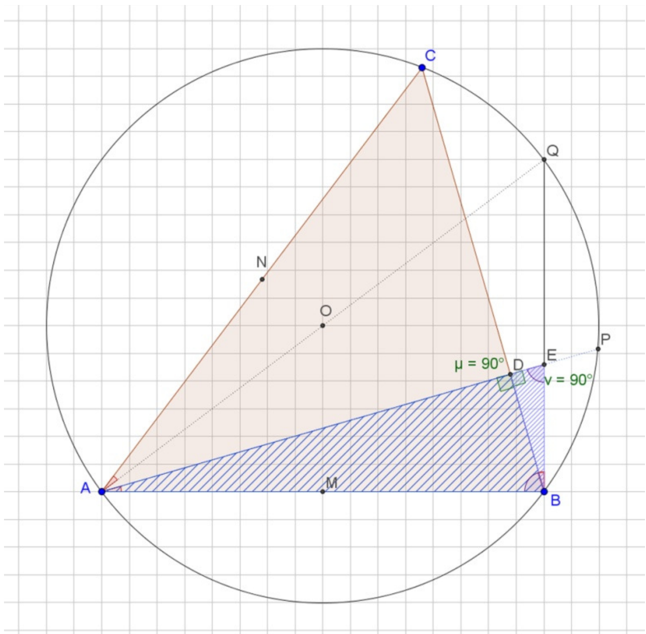
Si considerino ora i triangoli BDA ; BEA e BED .

$\boldsymbol{BDA \sim BEA}$ poiché:

- $\boldsymbol{B\hat{A}P}$ **in comune**
- $\boldsymbol{A\hat{B}E \cong A\hat{B}Q \cong \pi/2}$ perché angolo opposto all'ipotenusa AQ in CQA rettangolo poiché insiste su una semicirconferenza [[anche ABQ insiste su una semicirconferenza]].

Anche $\boldsymbol{B\hat{D}A \cong \pi/2}$ per ipotesi dunque $\boldsymbol{A\hat{B}E \cong B\hat{D}A}$.

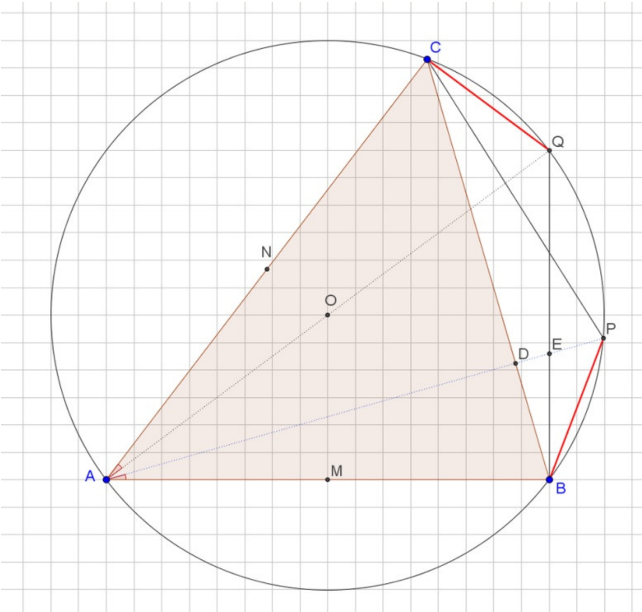
Di conseguenza $\boldsymbol{B\hat{E}A \cong A\hat{B}D}$



$\boldsymbol{BDA \sim BED}$ in quanto:

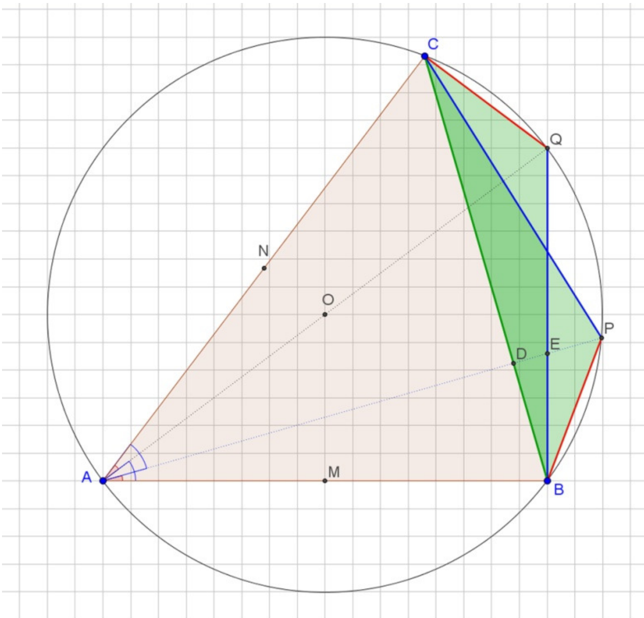
- $B\hat{D}A \cong E\hat{D}B \cong \pi/2$ per ipotesi
- $\boldsymbol{A\hat{B}D \cong B\hat{E}D}$ per precedente dimostrazione.

Dunque $\boldsymbol{E\hat{B}D \cong B\hat{A}P}$ e infine, per la proprietà transitiva della congruenza, poiché $E\hat{B}D \cong Q\hat{A}C$ per la precedente dimostrazione ($E\hat{B}D$ è chiamato $Q\hat{B}C$ ma si tratta dello stesso angolo), anche $\boldsymbol{B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C}$



Si traccino i segmenti BP ; QC e PC .
Si considerino dapprima BP e QC .
Esse sono corde di ***c*** che insistono rispettivamente sugli archi di circonferenza $\overset{\frown}{BP}$ e $\overset{\frown}{QC}$ i quali a loro volta insistono su angoli alla circonferenza (e quindi anche al centro) uguali.

$\boldsymbol{B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C \to B\hat{O}P \cong Q\hat{O}C \to BP \cong QC}$.



Con procedimento analogo si deduce che

$$BQ \cong PC$$

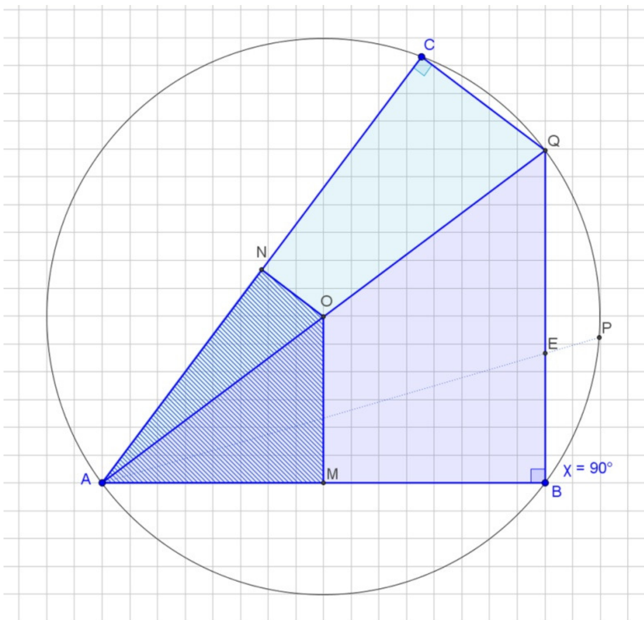
se si considera che:

$\boldsymbol{B\hat{A}Q = B\hat{A}P + P\hat{A}Q}$ e $\boldsymbol{P\hat{A}C = P\hat{A}Q + Q\hat{A}C}$

dove $\boldsymbol{P\hat{A}Q}$ **è in comune e** $\boldsymbol{B\hat{A}P \cong Q\hat{A}C}$ per la precedente dimostrazione.
Dunque $\boldsymbol{B\hat{O}Q \cong P\hat{O}C \to BQ \cong PC}$.

$\boldsymbol{BCP \cong CBQ}$ **per il 3° Criterio** di Congruenza dei Triangoli in quanto:

- **CB in comune**
- $\boldsymbol{BP \cong QC}$ per la precedente dimostrazione
- $\boldsymbol{BQ \cong PC}$ per la precedente dimostrazione



- Si osservino dapprima i quadrilateri $ABPC$ e $ABQC$:

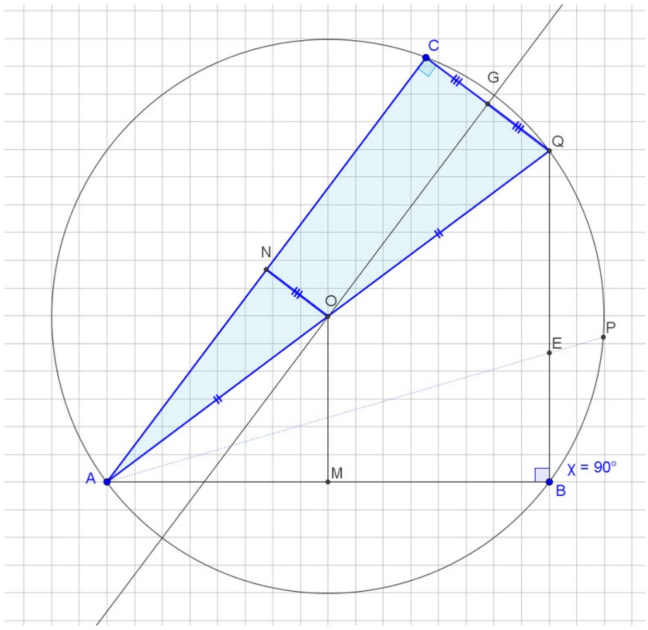
$$\boldsymbol{ABPC = ABC + BCP}$$

mentre $\boldsymbol{ABQC = ABC + CBQ}$.

Poiché per la precedente dimostrazione

$BCP \cong CBQ$, allora $A_{ABPC} = A_{ABQC}$.

$ABQC$ e $AMON$ possono essere rispettivamente scomposti nei triangoli ABQ e AQC il primo e AMO e AON il secondo.

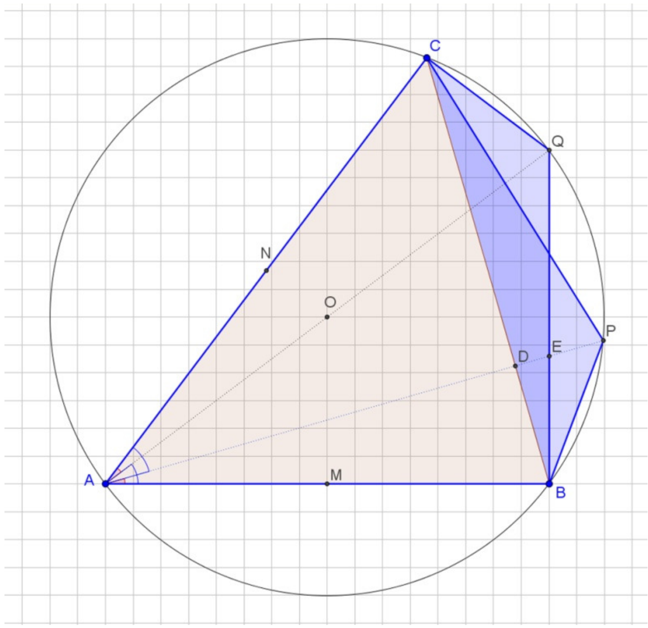


Si prendano in esame inizialmente solo AQC e AON.

ON ha estremi nei punti medi di due dei lati di AQC e dunque sarà sufficiente condurre la retta parallela ad AC passante per O e chiamare l'**intersezione** tra questa e QC G per dedurre che, per il Teorema di Talete, poiché $AO \cong OQ$ anche $QG \cong GC$.

Essendo $OGCN$ un parallelogramma e in particolare un rettangolo anche

$$ON \cong GC \cong QG$$.



Poiché infine $AN = {}^{1}/_{2} AC$ **ed** $ON = {}^{1}/_{2} QC$ **;**

allora $A_{AON} = {}^{1}/_{4} A_{AQC}$.

Con lo stesso procedimento in riferimento ad ABQ ed AMO **si arriva alla relazione**

$$A_{AMO} = {}^{1}/_{4} A_{ABQ}$$

e dunque anche

$$A_{AMON} = {}^{1}/_{4} A_{ABQC} = {}^{1}/_{4} A_{ABPC}$$

ovvero $A_{ABPC} = 4\, A_{AMON}$

come si voleva dimostrare.