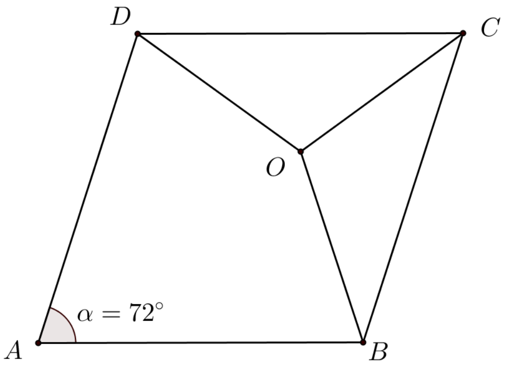
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *[(Edwin A. Abbott)]*

Flatlandia 10 - 24 Ottobre 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema
È dato un rombo *ABCD* di cui si conosce l'ampiezza dell'angolo di vertice *A*, pari a 72°, inoltre O è un punto interno al rombo tale che $\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ (vedi figura).



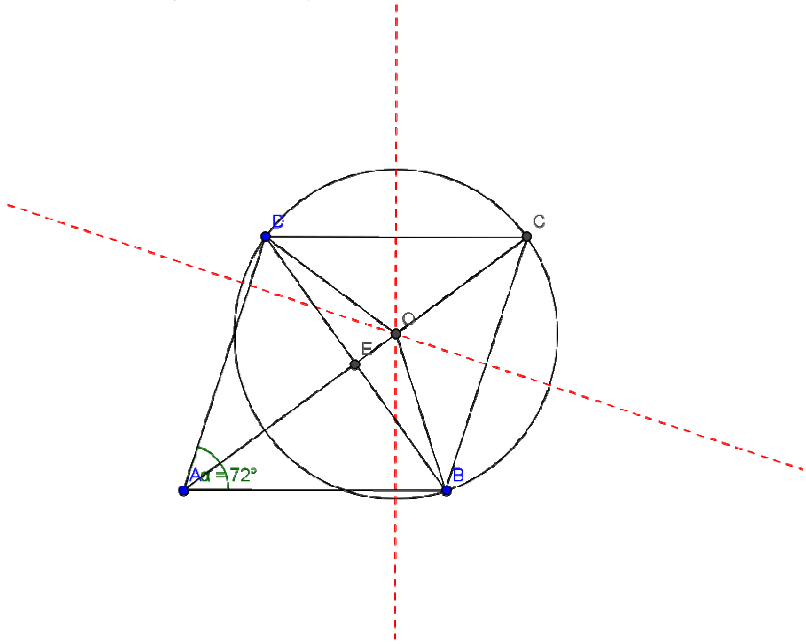
a) Costruire il punto *O* e dimostrare che A, *O* e *C* sono allineati.
b) Determinare le ampiezze di tutti gli angoli rappresentati in figura.
c) Dimostrare che i triangoli *ABC* e *COD* sono simili.
d) Dimostrare che il lato del rombo è la sezione aurea della diagonale AC.
e) Dimostrare infine che *OD* è la sezione aurea del lato del rombo.
Giustificare tutte le risposte.

Commento
Sono giunte due sole risposte, entrambe da classi terze di due diversi Licei Scientifici.
Il problema poneva cinque diversi quesiti tutti relativi alla stessa figura data, cioè un rombo di cui era nota l'ampiezza di uno dei suoi angoli e un punto interno caratterizzato da una particolare relazione con tre dei vertici del rombo. Nel primo quesito si chiedeva di costruire il punto determinato dalla predetta relazione e di dimostrare il suo allineamento con due vertici opposti del rombo. Nel secondo di determinare l'ampiezza di tutti gli angoli rappresentati nella figura. Nel terzo di dimostrare la similitudine di due particolari triangoli. Nel quarto di dimostrare che il lato del rombo era la sezione aurea della diagonale. Infine nel quinto di dimostrare che uno dei segmenti costruiti era la sezione aurea del lato del rombo.
In entrambe le risposte si rilevano diverse imprecisioni nelle risoluzioni dei differenti quesiti, probabilmente dovute anche a una scarsa attenzione al testo del problema e alla stesura della soluzione.
L'esiguo numero di risposte arrivate è forse dovuto non solo alla fase iniziale di "rodaggio", ma anche all'argomento (sezione aurea) non così sufficientemente trattato a livello didattico come ci si auspicherebbe.
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Aristosseno", Taranto (TA)
LS "Pitagora", Rende (CS)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 3E
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



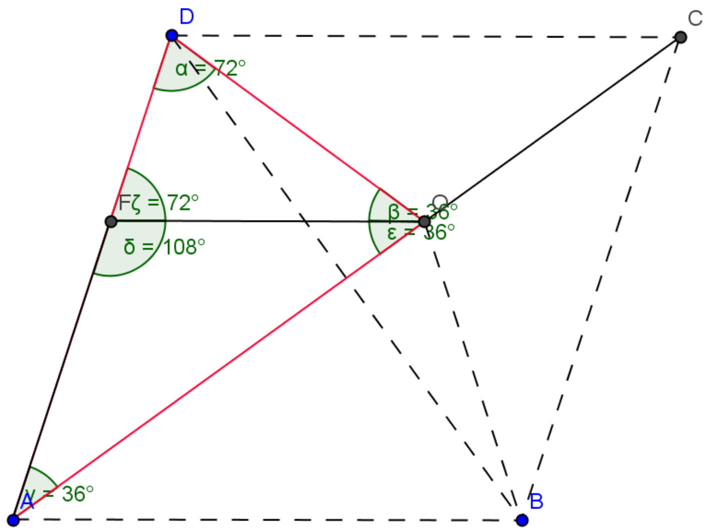
a)
Il punto O è il centro della circonferenza passante per i tre punti B,C e D.
Per costruirlo, tracciamo gli assi dei segmenti BC e CD. Essendo il loro punto d'incontro equidistante dagli estremi dei segmenti, sarà OB=OC=OD [$\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$].
Inoltre, poiché in un rombo le diagonali sono perpendicolari fra loro e si incontrano nel loro punto medio E, la diagonale AC è asse dell'altra diagonale, ovvero del segmento BD.
Essendo il punto O equidistante dagli estremi di tale segmento,esso appartiene all'asse di BD,cioè ad AC. Perciò i tre punti A,O e C sono allineati.

b)
Nella figura data, ricordando che il rombo è un parallelogramma particolare, riconosciamo che l'angolo di vertice B [C], opposto all'angolo di vertice A, ha anch'esso l'ampiezza di 72°; gli angoli di vertici B e D sono supplementari di quelli di vertici A e B [C] e quindi hanno ampiezza 108°. Essendo inoltre le diagonali del rombo bisettrici dei suoi angoli, gli angoli congruenti [[BDO=BOD]] [BCO e DCO] hanno ampiezza 36° e poiché i triangoli BOC e COD sono isosceli anche gli angoli OBC = [e] ODC hanno ampiezza 36°. Da questo discende che gli angoli [[OBD=ODA]] [OBA e ODA] hanno ampiezza data da 108°− 36° = 72°,ottenuta per differenza dalle ampiezze dei già citati angoli. Gli angoli BOC e COD hanno ampiezza 108° (la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a180°) e l'angolo concavo [convesso] BOD ha ampiezza pari a 144° (in quanto esplementare dell'angolo concavo BOD = [di ampiezza] 2·108°= 216°). Quest'angolo ha come bisettrice OA in quanto nel triangolo isoscele BOD, il segmento OE è altezza e mediana sulla base BD e quindi anche bisettrice dell'angolo al vertice. Per questo [per le ampiezze risulta] BOA = DOA = 72° e perciò i triangoli BOA e DOA sono isosceli: AB=AO=AD [$\overline{AB} = \overline{AO} = \overline{AD}$].(**)

c)

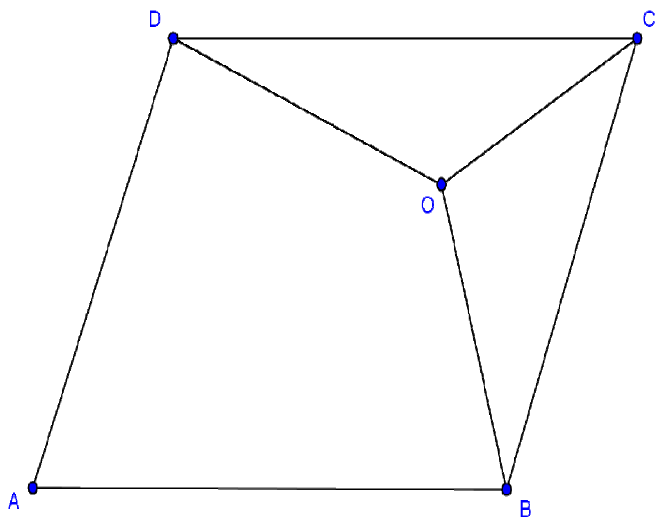
I triangoli ABC e COD sono simili perché sono entrambi isosceli e perché hanno gli angoli alla base congruenti, di ampiezza 36° ciascuno (primo criterio di similitudine).

d)
La proporzionalità fra lati omologhi ci porta a scrivere la proporzione: AC : AB = CD : OD [$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{OD}$]. Essendo AB=CD [$\overline{AB} = \overline{CD}$ perché AB e CD sono] lati del rombo, il lato del rombo è perciò medio proporzionale fra il segmento AC e il segmento OD.
Ma OD=OC=AC-AO [$\overline{OD} = \overline{OC} = \overline{AC} - \overline{AO}$ e per la (**) risulta] [$\overline{AC} - \overline{AO}$] = AC-AB [$\overline{AC} - \overline{AB}$] e allora :
AC:AB [$\overline{AC} : \overline{AB}$] = AB:AC-AB [$\overline{AB} : (\overline{AC} - \overline{AB})$] il che significa che il lato AB del rombo è la sezione aurea della diagonale AC.



e)
Il triangolo AOD è un "triangolo aureo", isoscele con gli angoli alla base di ampiezza 72° e l'angolo al vertice di ampiezza 36°. Se tracciamo la bisettrice OF dell'angolo AOD, per il teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo si ha che: AF:FD = OA:OD [$\overline{AF} : \overline{FD} = \overline{OA} : \overline{OD}$]
Poiché: FD = AD − AF scriviamo OD:(AD-AF)=OA:OD [$\overline{OD} : (\overline{AD} - \overline{AF}) = \overline{OA} : \overline{OD}$] ed essendo AD = AO [$\overline{AD} = \overline{AO}$] e AF = OF =OD [$\overline{AF} = \overline{OF} = \overline{OD}$], come si evince dalle ampiezze degli angoli in figura, risulta infine: OD:(AO-OD)=OA:OD [$\overline{OD} : (\overline{AO} - \overline{OD}) = \overline{OA} : \overline{OD}$] e, invertendo i medi [scambiando medi ed estremi]: AO:OD=OD: (AO-OD) [$\overline{OA} : \overline{OD} = \overline{OD} : (\overline{AO} - \overline{OD})$] cvd.

Domenico Corasiniti, Evelina Porco, Classe 3B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)
[Manca la costruzione del punto *O*]

I triangoli DOC e BOC sono isosceli poiché, per ipotesi $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$. Di conseguenza l'angolo (di misura 36°) [perché?]. Dunque il segmento OC diventa bisettrice del rombo.
In seguito,[Di conseguenza] [[l'angolo]] [e la loro ampiezza], per differenza di angoli, risulta di 108°.
Unendo il punto O con il punto A si formano due triangoli tra loro congruenti $AOD \cong AOB$, poiché:

- $AD \cong AB$ poiché lati congruenti del rombo;
- $OD \cong OB$ per ipotesi;
- per differenza tra angoli congruenti.

$\Updownarrow$

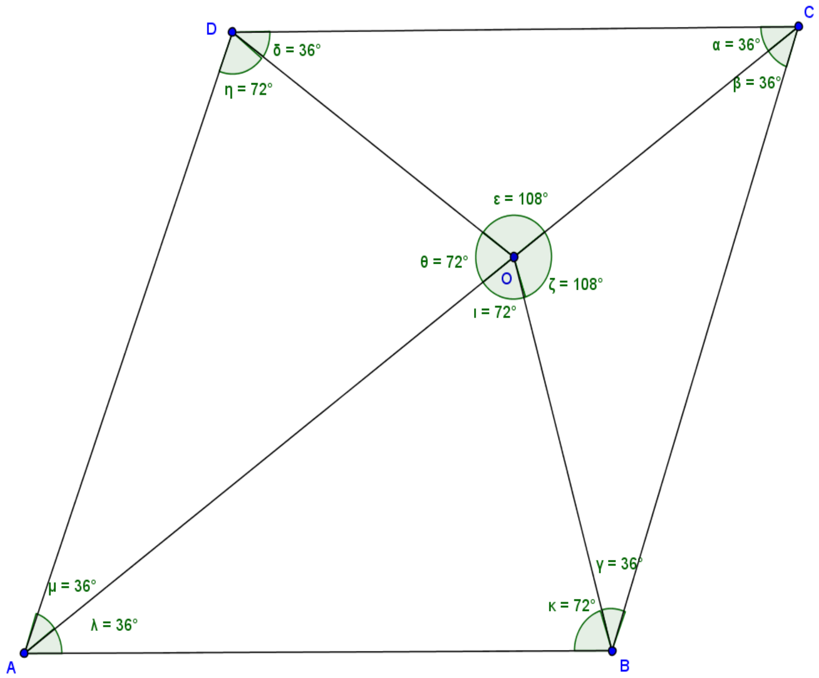
($\hat{D}$**[[≅]][di ampiezza pari a] 108°;** $A\hat{D}O \cong A\hat{B}O$[[≅]]**[e la lora a□piezza vale] 108° − 36° = 72°**)
Di conseguenza [[l'angolo]] [e la loro ampiezza vale per differenza di angoli 72°.

$\downarrow$

(

Poiché l'angolo vale 180° ($CO\hat{}D + DO\hat{}A = 108° + 72°$) allora i tre punti A,O e C sono allineati.

b)



→ ;
→ Poiché DOC ≅ COB ∨ l'ampiezza di $\hat{C}$**[[≅]] vale 72°** ;
$A\hat{B}O \cong A\hat{D}O$**[[≅]] e la loro ampie⍰za vale 72°** → Per dimostrazione precedente(punto a);
$D\hat{A}O \cong B\hat{A}O$**[[≅]] e la loro ampie⍰za vale 36°** → Poiché AC essendo diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti;
$A\hat{O}B \cong A\hat{O}D$**[[≅]] e la loro ampie⍰za vale 72°** → Per differenza di angoli (180°-109° [108°]).

c)
I triangoli ABC e COD sono simili poiché hanno:
$O\hat{D}C \cong C\hat{A}B$**[[≅]]e la loro ampiezza vale 36°**
$O\hat{C}D \cong A\hat{C}B$**[[≅]] e la loro ampiezza vale 36°**

d)
I triangoli AOB e AOD sono congruenti poiché [già detto prima]:
$OD \cong OB$ per ipotesi;
$AD \cong AB$ per ipotesi;
per dimostrazione precedente (punto b).
Di conseguenza AB è congruente ad AO [solo da quanto detto non è possibile questa conclusione].
AO, quindi, è la sezione aurea della diagonale del rombo poiché come dimostrato precedentemente i due triangoli ABC e ODC sono simili;
quindi vale la proporzione:
AC : DC = AB : OC → Poiché $AB \cong AO$ → AC : AO = AO : OC

e)
[[…]]