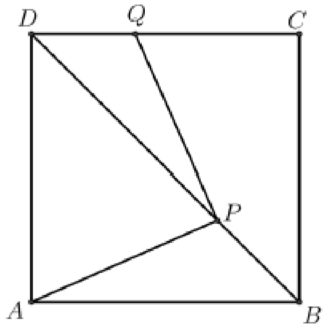
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 10 - 24 Novembre 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia P un punto sulla diagonale BD di un quadrato $ABCD$ e sia Q il punto sul lato CD tale che AP è perpendicolare a PQ (vedi figura).



a) Il punto Q su CD esiste per ogni posizione di P su BD?
b) Dimostrare che il quadrilatero $APQD$ è inscrivibile in una circonferenza.
c) Dedurre da quest'ultima proprietà che $\overline{AP} = \overline{PQ}$.
Giustificare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte quattro risposte così suddivise: una da una classe prima, due da classi terze e una da una classe quarta (ricordiamo che possono partecipare solo le classi del primo triennio delle Scuole Secondarie di secondo grado), la prima di Liceo Classico e le altre di Licei Scientifici.
Il problema poneva tre quesiti, tutti relativi alla stessa figura, cioè un quadrato e un punto sulla diagonale disposto in modo tale che, congiunto con un punto su un lato del quadrato e con uno dei vertici, determinasse una spezzata formata da due segmenti tra loro perpendicolari. Nel primo quesito si chiedeva di individuare per quali posizioni del punto sulla diagonale fosse possibile la costruzione, nel secondo di dimostrare l'inscrivibilità in una circonferenza di un quadrilatero risultante dalla costruzione e nell'ultimo di dimostrare l'uguaglianza delle lunghezze dei due segmenti della spezzata predetta.
Solo due rispondono in modo abbastanza corretto al primo quesito, mentre tutti arrivano a risolvere il secondo e il terzo, sia pure con qualche imprecisione o qualche mancanza di completezza nella conclusione. Permane sempre la tendenza a confondere una grandezza geometrica con la sua misura.
Un'ultima importante considerazione: non possiamo accettare soluzioni elaborate in formato pdf, in quanto ciò rende impossibile l'inserimento di qualsiasi osservazione o modifica. Infine è bene attenersi alle indicazioni date sull'invio della risposta, evitando in particolare di inserire la soluzione in un messaggio di posta elettronica.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LC "Machiavelli-Capponi", Firenze (FI)
LS "Aristosseno", Taranto (TA)

LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “Leonardo da Vinci”, Gallarate (VA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

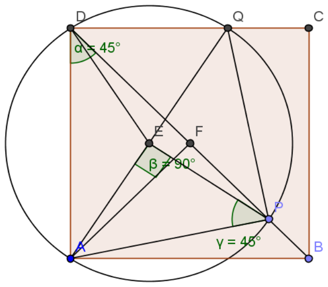
Classe 1E
Liceo Classico “Machiavelli-Capponi”, Firenze (FI)

a)
L'affermazione "a" possiamo verificarla dal momento che all'avvicinarsi di P a D, anche Q si avvicina [a D]; e inoltre se P coincide con il punto medio di DB, Q coincide con D, quindi non possiamo avvicinare ulteriormente P a D [quindi…].

b)
Il fatto che ADQP sia inscrivibile a un cerchio [in una circonferenza] lo si può dimostrare notando che il quadrilatero è l'accostamento dei due triangoli rettangoli ADQ e APQ: per il teorema di Talete sono entrambi inscrivibili a un cerchio [in una circonferenza] con il centro situato nel punto medio delle loro ipotenuse, ma poiché queste coincidono, si ricava che esiste un unico cerchio [circonferenza] circoscritto ad entrambi, quindi circoscritto a ADQP.

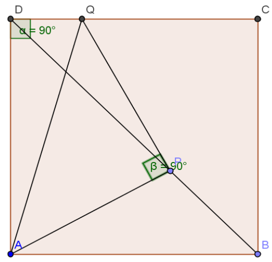
c)
Per la terza affermazione ho chiamato P' la proiezione di P su DA e P'' la proiezione di P su DC. DP'PP'' è un quadrato, quindi l'angolo QPP'' è congruente a APP'. infatti il primo è dato dalla differenza tra un angolo di 90 gradi e QPP', e anche il secondo a dato dalla differenza fra un angolo di 90 gradi (APQ) e QPP'. [Dove sono le figure?]
Di conseguenza i triangoli rettangoli PAP' e PQP' sono simili, anzi, poiché PP' = PP'' [$PP\square = PP\square$] sono congruenti. [A questo punto si può già concludere che $\overline{AP} = \overline{PQ}$.] Allora ho fatto il ribaltamento di PAP' usando come asse di simmetria il segmento PP', individuando il simmetrico di A (A') che ha tutte le caratteristiche per essere il simmetrico di Q rispetto al segmento DB. È quindi evidente che prendendo due punti simmetrici, e collegandoli entrambi a un punto sulla loro asse di simmetria (in questo caso il punto P), i due segmenti ottenuti sono uguali, perciò PA'=PQ [$PA\square = \overline{PQ}$] ed essendo PA' una simmetria di AP, AP = PQ [$\overline{AP} = \overline{PQ}$].

Classe 3E
Liceo Scientifico “Aristosseno”, Taranto (TA)



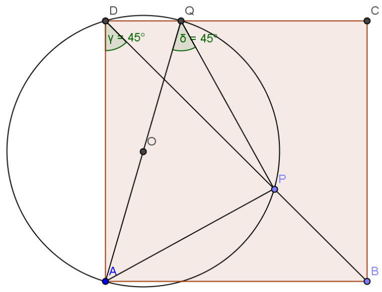
a)

Il punto Q sul lato CD del quadrato esiste fino a che il punto P assume posizioni comprese fra il vertice B e il centro F del quadrato [occorre spiegare]. Questo comporta che l'angolo APE [cos'è E?] ha l'ampiezza di 45°, la stessa ampiezza dell'angolo ADB e dell'angolo AQP. Entrambi i triangoli ADQ e APQ sono infatti triangoli rettangoli inscritti nella stessa circonferenza di diametro AQ e centro E (ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza avente per diametro l'ipotenusa del triangolo).



b)

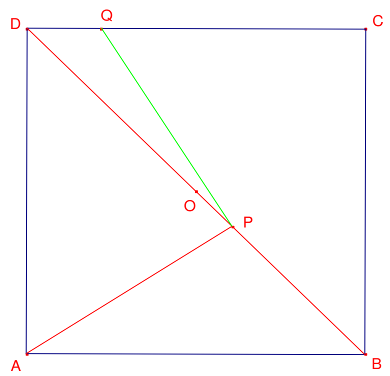
Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se ha gli angoli opposti a due a due supplementari. Il quadrilatero APQD è inscrivibile in una circonferenza poiché gli angoli opposti ADQ e APQ sono retti e quindi supplementari .Essendo poi la somma degli angoli interni di un quadrilatero pari a 360°, ne segue che anche gli altri due angoli opposti, DAP e PQD, sono supplementari.



c)

Poiché gli angoli ADQ e APQ sono retti, il segmento AQ è il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero. Entrambi i triangoli rettangoli ADQ e APQ che formano il quadrilatero APQD sono infatti inscritti nella stessa circonferenza avente per diametro la loro ipotenusa AQ (corollario del teorema relativo agli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro).
L'angolo ADB ha ampiezza 45° (nel quadrato le diagonali sono bisettrici degli angoli) e poiché in una circonferenza gli angoli che insistono su uno stesso arco sono congruenti, anche l'angolo AQP, che insiste sull'arco AP, ha ampiezza 45°. Da ciò si deduce che il triangolo APQ è un triangolo rettangolo e isoscele e perciò AP è congruente a PQ.

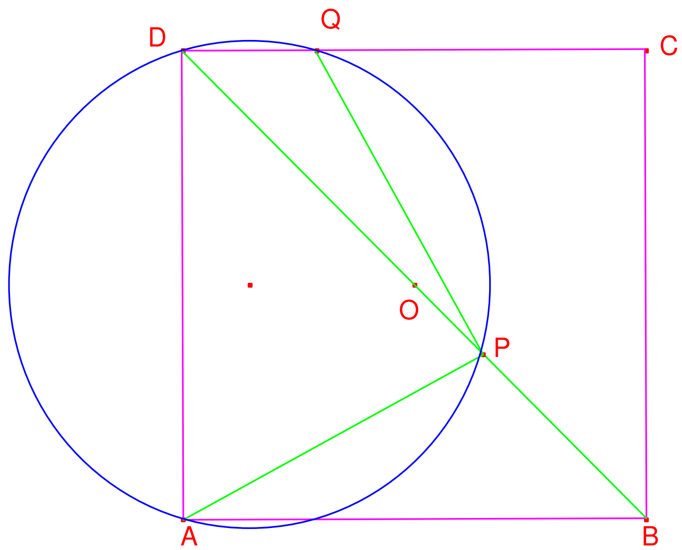
Domenico Corasiniti, Evelina Porco, Classe 3B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)
[[…]]

b)
$\widehat{D}$ = [ha ampiezza pari a] 90° e DB essendo diagonale è anche bisettrice allora:

Di conseguenza $\widehat{D}$ è supplementare a $\widehat{P}$ [ ], quindi il quadrilatero è inscrivibile ad [in] una circonferenza.



c)
in quanto sottendono lo stesso arco di circonferenza, di conseguenza: APQ è un triangolo rettangolo isoscele, in quanto ha:

$Q\widehat{A}P \cong A\widehat{Q}P$

[e quindi?]

Davide Maran, Classe 4F

Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci", Gallarate (VA)

[Impossibile da correggere perché spedito in formato PDF]