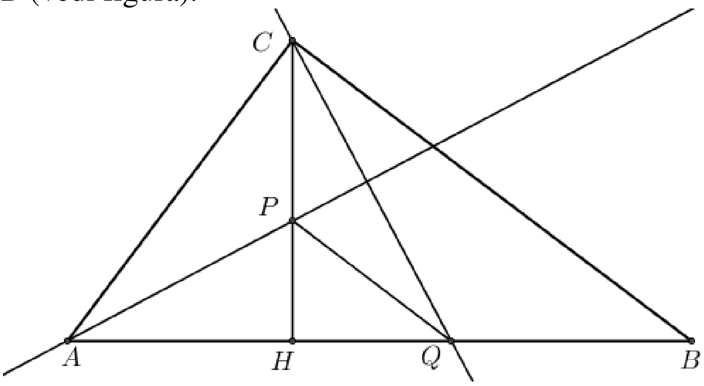
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 12 - 26 Gennaio 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia *P* un punto sull'altezza *CH* del triangolo *ABC*, rettangolo in *C* e sia *Q* il punto sul lato *AB* tale che *PQ* è parallelo a *CB* (vedi figura).



a) Dimostrare che se *AP* è la bisettrice dell'angolo in *A*, allora la retta *AP* è perpendicolare alla retta *CQ*.

b) Dimostrare che, qualunque sia la posizione di *P* sul segmento *CH*, la retta *AP* è ancora perpendicolare alla retta *CQ*.

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte cinque risposte così suddivise: quattro da classi seconde e una da una classe terza, tutte di Licei Scientifici [ma uno studente di classe seconda ha potuto essere individuato solo grazie al quesito di dicembre in quanto non ha precisato né la scuola né la classe].

Il problema poneva due quesiti, tutti relativi alla stessa figura, cioè un triangolo rettangolo sulla cui altezza relativa all'ipotenusa veniva fissato un punto. Tale punto era un estremo del segmento parallelo a uno dei cateti che incontrava l'ipotenusa nell'altro estremo. Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare, nell'ipotesi che il punto fissato appartenesse alla bisettrice di uno degli angoli acuti del triangolo, che tale bisettrice era perpendicolare alla retta passante per il vertice corrispondente all'angolo retto e per il punto sull'ipotenusa estremo del predetto segmento. Nel secondo di dimostrare che tale relazione di perpendicolarità sussisteva per qualsiasi posizione del punto fissato sull'altezza relativa all'ipotenusa, indipendentemente dal fatto che la retta passante per tale punto e per un vertice del triangolo fosse o meno la bisettrice dell'angolo corrispondente.

Solo due rispondono in modo abbastanza corretto a entrambi i quesiti e uno risponde con qualche imprecisione solo al primo. Ci preme sottolineare la necessità di esplicitare come sono stati costruiti tutti i punti e, in generale, gli enti geometrici utilizzati nelle dimostrazioni, ma che non compaiono nella figura iniziale.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS "Bocchi-Galilei", Adria (RO)

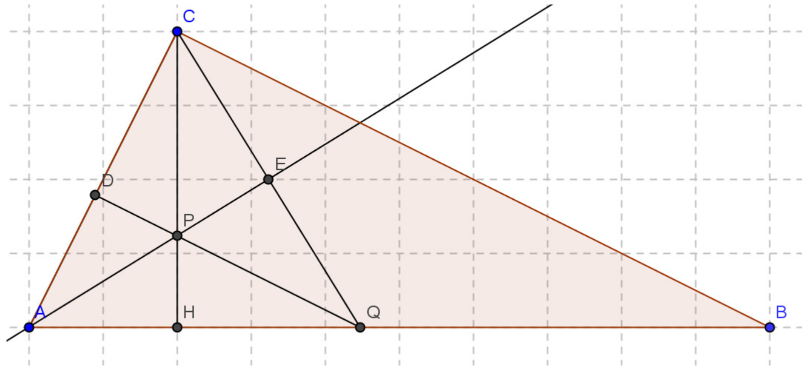
LS Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

LS "Aristosseno", Taranto (TA)

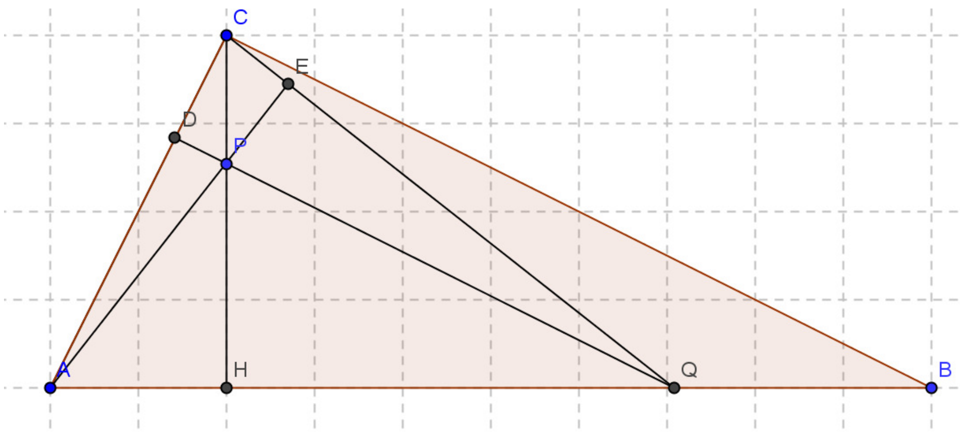
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Sara Varljen, Classe 2A
Liceo Scientifico "Bocchi-Galilei", Adria (RO)

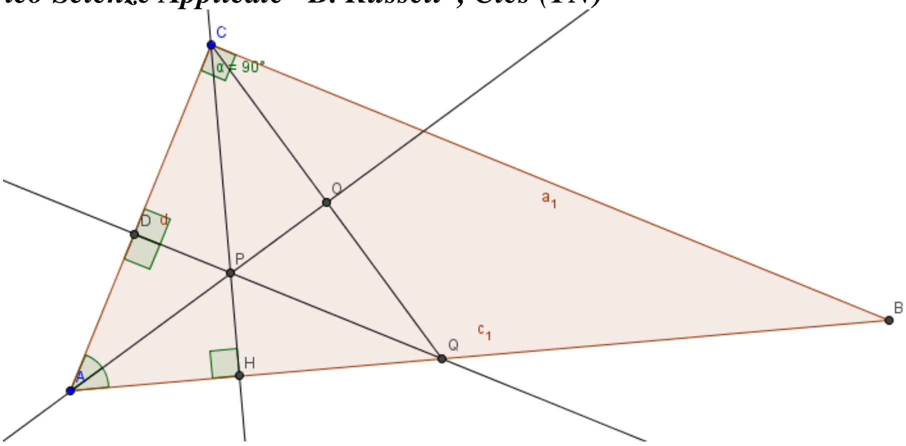


a)
Prolungo il segmento PQ fino ad intersecare il segmento AC in D. PQ è parallelo BC per ipotesi, ma a sua volta BC è perpendicolare ad AC perché per ipotesi l'angolo ACB è retto, quindi anche la retta passante per PQ [i punti P e Q] è perpendicolare ad AC [[per proprietà transitiva]]. Di conseguenza gli angoli ADP e PDC sono retti. Considero ora i due triangoli rettangoli ADP e APH, essi hanno: - gli angoli DAP e PAH congruenti perché la retta che contiene AP è bisettrice dell'angolo CAB per ipotesi; - il segmento AP in comune; - gli angoli ADP e PHA congruenti perché entrambi retti. I due triangoli rettangoli ADP e APH sono quindi congruenti per il secondo criterio generalizzato di congruenza dei triangoli. In particolare è dimostrato che i segmenti DP e PH sono congruenti, come anche gli angoli DPA e APH. Considero ora i triangoli rettangoli DCP e PHQ, essi hanno: - gli angoli DPC e HPQ congruenti perché angoli opposti al vertice; - i segmenti DP e PH congruenti per dimostrazione precedente; - gli angoli CDP e PHQ congruenti perché entrambi retti. I triangoli DCP e PHQ sono quindi congruenti per secondo criterio di congruenza dei triangoli. In particolare è dimostrato che i segmenti PC e PQ sono congruenti. Considero infine i triangoli CPE e PEQ, essi hanno: - i segmenti PC e PQ congruenti per dimostrazione precedente; - gli angoli CPE e EPQ congruenti perché angoli opposti al vertice di angoli congruenti per dimostrazione precedente; - il segmento PE in comune. I triangoli CPE e PEQ sono pertanto congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli. In particolare è verificato che gli angoli CEP e PEQ sono congruenti. Essendo gli angoli CEP e PEQ contemporaneamente sia congruenti che adiacenti, essi sono retti. La tesi è dimostrata. Ad avvalorare la dimostrazione vi è il fatto che, considerando il triangolo AQC, essendo CH altezza relativa ad AQ e QD altezza relativa ad AC, P è l'ortocentro del suddetto triangolo. La retta passante per il vertice A e per l'ortocentro P è di conseguenza altezza relativa al lato opposto al vertice A, quindi la retta AP è perpendicolare al segmento CQ.



b)
Come inizialmente dimostrato nella sezione precedente, il fatto che PQ sia parallelo a BC, comporta che la retta contenente PQ sia perpendicolare ad AC, il segmento cui è perpendicolare anche BC. Considerando il triangolo ACQ, si nota come sia CH che DQ siano altezze, riferite rispettivamente ai lati AQ ed AC, pertanto il loro punto d'incontro è l'ortocentro del triangolo. Essendo P il punto d'incontro di AQ ed AC, esso è l'ortocentro, di conseguenza la retta passante per il vertice A e per l'ortocentro P è altezza relativa al lato opposto al vertice A, quindi la retta AP è perpendicolare al segmento CQ. Questa condizione si verifica per ogni posizione attribuita al punto P, quindi la tesi è dimostrata.

Andrea Covi, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



a)
L'angolo ADQ [cos'è D?] è congruente all'angolo ACB perché [[alterni interni]] [angoli corrispondenti delle rette parallele…], sono entrambi retti.
I triangoli APH e APD hanno :
AP comune;
AHP=ADP [$\angle AHP \cong \angle ADP$] perché entrambi retti;
DAP=HAP [$\angle DAP \cong \angle HAP$] per ipotesi;
Per il secondo criterio generalizzato i triangoli sono congruenti.
In particolare PD=PH [$\overline{PD} = \overline{PH}$]
I triangoli PCD e PHQ hanno:
DPC =HPQ [$\angle DPC \cong \angle HPQ$] perché opposti al vertice
PDC=PHQ [$\angle PDC \cong \angle PHQ$] perché entrambi retti
PD=PH [$\overline{PD} = \overline{PH}$] come dimostrato in precedenza

Per il secondo criterio [[generalizzato]] i triangoli sono congruenti.
AC=AQ [$\overline{AC} = \overline{AQ}$]per somma di segmenti congruenti
Il triangolo ACQ è isoscele [[per somma di]] [perché ha due] lati congruenti
AP è bisettrice dell'angolo A e perciò è anche altezza di QC perché il triangolo è isoscele
L'angolo AOC [cos'è O?] è retto

b)
[[…]]

Samuel Valentini, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)
[[…]]

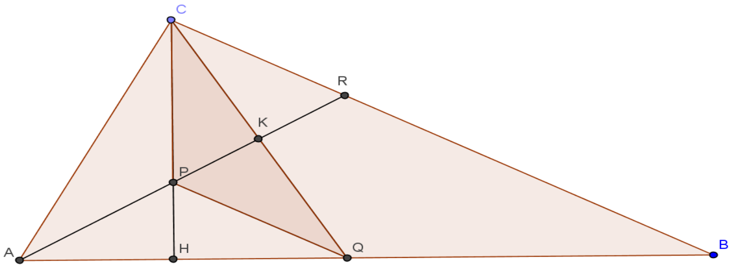
b)
[[…]]

Gioele Zambotti, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)
[[…]]

b)
[[…]]

Classe 3E
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



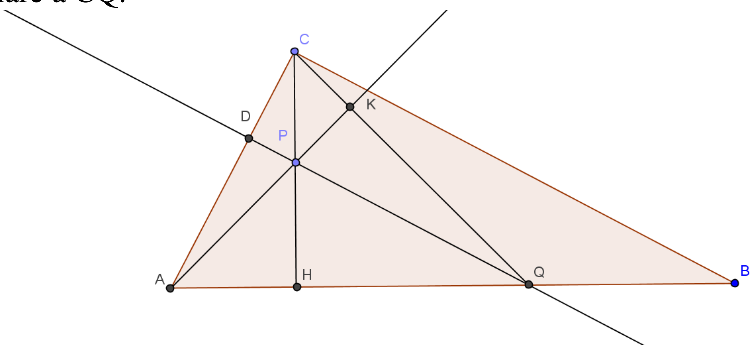
a)

Osserviamo anzitutto che, nel triangolo ABC, gli angoli $A\hat{C}H$ e $C\hat{B}A$ sono congruenti, poiché complementari dello stesso angolo $B\hat{C}H$; e che $C\hat{B}A \cong P\hat{Q}A$ poiché corrispondenti delle parallele PQ e CB tagliate dalla trasversale AB. Sarà quindi $A\hat{C}H \cong P\hat{Q}A$ [per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra angoli].

I triangoli APC e APQ sono congruenti, per il IV criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

- $C\hat{A}P \cong P\hat{A}Q$ perché AP è bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$
-il lato AP è in comune
- $A\hat{C}H \cong P\hat{Q}A$ come osservato prima.

Dalla congruenza dei triangoli si deduce che $PC \cong PQ$ e quindi il triangolo CPQ è isoscele sulla base CQ. Inoltre gli angoli $A\hat{P}H$ (complementare di $P\hat{A}H$) e $C\hat{P}R$ [cos'è R?] sono congruenti perché opposti al vertice e l'angolo $C\hat{R}A$ (complementare di $C\hat{A}R$ e quindi anche di $P\hat{A}H$) è congruente all'angolo $R\hat{P}Q$; questi angoli sono infatti alterni interni delle parallele CB e PQ tagliate dalla trasversale AR. Dalla proprietà transitiva della congruenza segue che gli angoli $C\hat{P}R$ e $Q\hat{P}R$ sono congruenti e pertanto la semiretta di AP è bisettrice dell'angolo $C\hat{P}Q$. Nel triangolo isoscele CPQ, allora, la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza relativa alla base e perciò AP è perpendicolare a CQ.



b)

Osservato che la retta di PQ è parallela a BC e che BC è perpendicolare ad AC, il segmento QD [cos'è D?] sarà perpendicolare ad AC. Nel triangolo ACQ il segmento QD è l'altezza relativa al lato AC e il segmento CH e [è] l'altezza relativa al lato AC [AQ] (che è parte di AB). Se ne deduce che il punto P è l'ortocentro del triangolo ACQ, punto d'incontro di due delle tre altezze del triangolo. La terza altezza del triangolo ACQ, che è uscente dal vertice A e deve passare per P , è il segmento AK [cos'è K?] intercettato da tale semiretta sul lato CQ del triangolo.
Perciò AP è perpendicolare a CQ.