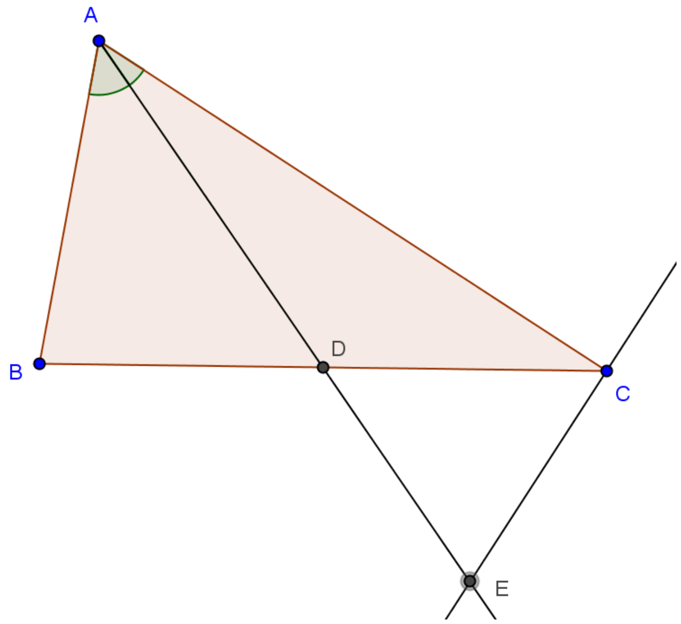
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 9 - 23 Dicembre 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema
È dato il triangolo acutangolo *ABC* e sia *D* il punto medio del lato *BC*. La perpendicolare al lato *AC* condotta per *C* interseca il prolungamento di *AD* in *E*. Supponiamo inoltre che tra le ampiezze degli angoli valga la relazione $\angle BAD = 2\angle DAC$ (vedi figura).



a) Fornire una possibile costruzione della figura.
b) Detto *F* il punto medio di *AE* dimostrare che il triangolo *ABF* è equivalente al triangolo *FEC*.
c) Dedurne che $\overline{AE} = 2\overline{AB}$.
Giustificare tutte le affermazioni.

Commento
Sono giunte cinque risposte così suddivise: quattro da classi seconde e una da una classe terza, tutte di Licei Scientifici.
Il problema poneva tre quesiti, tutti relativi alla stessa figura, cioè un triangolo acutangolo tale che una delle mediane divide l'angolo avente come vertice il punto da cui trae origine tale mediana in due parti tali che l'ampiezza di una di esse sia il doppio dell'altra. Il prolungamento della mediana si interseca con la perpendicolare a un lato del triangolo in uno dei suoi estremi. Nel primo quesito si chiedeva di individuare una possibile costruzione della figura, nel secondo di dimostrare l'equivalenza di due triangoli costruiti all'interno della figura e nell'ultimo di dedurre dalla precedente dimostrazione una particolare relazione tra le lunghezze di due segmenti.
Solo due rispondono in modo abbastanza corretto al primo quesito e due arrivano a risolvere il secondo e il terzo, sia pure con qualche imprecisione. Nella maggior parte delle risposte manca qualsiasi tentativo di affrontare le dimostrazioni, inoltre alcuni di coloro che affrontano la costruzione geometrica non utilizzano, come sarebbe auspicabile, il software di geometria dinamica per illustrare tale costruzione. Permane da parte di alcuni la tendenza a confondere una grandezza geometrica con la sua misura.

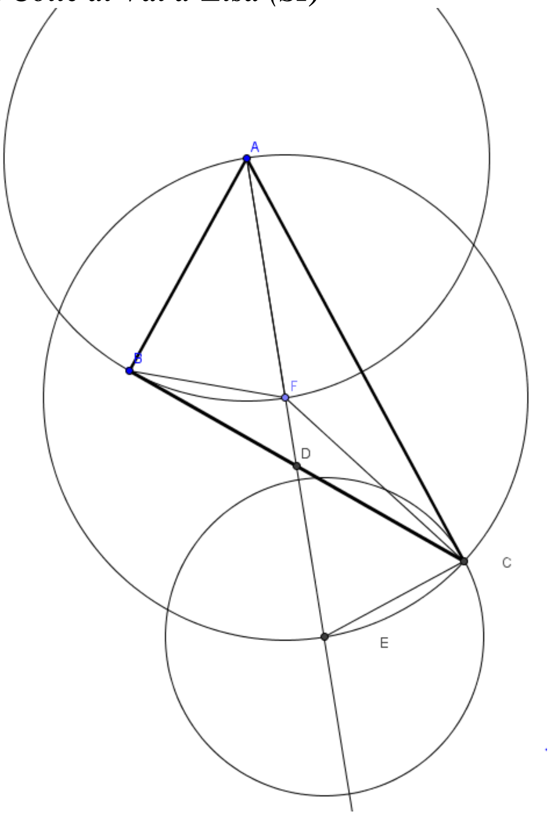
Un'ultima importante considerazione: è assolutamente da evitare l'uso di tabelle in cui inserire i passi delle dimostrazioni e le figure geometriche.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "A. Volta", Colle di Val d'Elsa (SI)
LS Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)
LS "Pitagora", Rende (CS)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

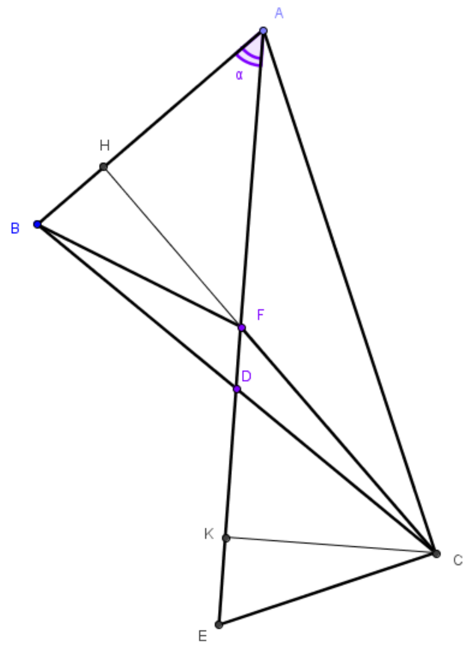
Classe 2C
Liceo Scientifico "A. Volta", Colle di Val d'Elsa (SI)



a)
Costruiamo un segmento AB, che rappresenterà il lato obliquo del triangolo isoscele ABF. Tracciamo la circonferenza *C1* di centro B [A] e raggio AB. Sulla circonferenza costruiamo [fissiamo] un punto F creando così il triangolo isoscele ABF.
Tracciamo poi la semiretta AF e costruiamo la circonferenza *C2* di centro F e raggio AF. Chiamiamo E il punto d'intersezione tra la semiretta AF e *C2* .
Con centro E e raggio BF , tracciamo la circonferenza *C3* e chiamiamo C il punto d'intersezione tra *C3* e *C2* che sta sul semipiano di origine AF non contenente B.
Congiungiamo A con C e B con C , chiamando D l'intersezione tra FE e BC [e poi?].

b) e **c)**
I triangoli ABD e ACD sono equivalenti (stessa area) perché hanno basi congruenti (BD $\cong$ DC per ipotesi) e stessa altezza (la distanza di A dalla retta BC).

Anche i triangoli BFD e CFD sono equivalenti perché hanno basi congruenti (BD $\cong$ DC per ipotesi) e stessa altezza (la distanza di F dalla retta BC).



Si osserva poi che [il triangolo] ABF è equivalente ad [alla differenza] ABD – BFD e AFC è equivalente ACD – CFD, quindi i triangoli ABF e ACF sono equivalenti perché [[differenze di superfici]] [la loro area è la differenza di aree di triangoli] equivalenti.
Anche i triangoli ACF e ECF sono equivalenti perché hanno basi congruenti (AF $\cong$ FE) e stessa altezza (EC) [CK] e quindi per la proprietà transitiva ABF e ECF sono equivalenti. Nel triangolo rettangolo ACE, CF è la mediana relativa all'ipotenusa ed è quindi congruente ad AF e ad FE.

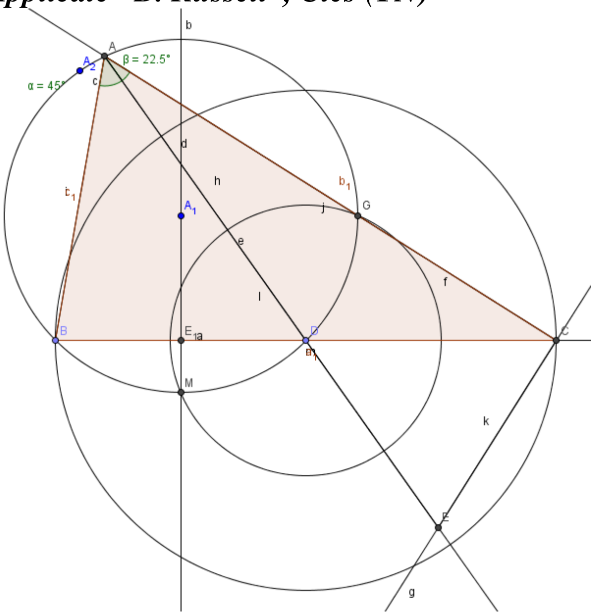
Dunque il triangolo ACF è isoscele (perché $AF \cong FC$), quindi $F\hat{A}C \cong F\hat{C}A \cong \frac{\alpha}{2}$ (dove con α abbiamo indicato l'angolo [BAF]) [si rischia di confondere un angolo con la sua ampiezza.
Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno, l'angolo E$\hat{F}$C è congruente a $2F\hat{A}C \cong \alpha$.
Consideriamo ora i triangoli rettangoli AFH e CFK (dove FH e FK [CK] sono altezze rispettivamente di AFB e FDC [FEC]).
Essi hanno:

$$AF \cong CF \quad \text{e} \quad H\hat{A}F \cong K\hat{F}C \cong \alpha$$

quindi sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli e quindi $FH \cong$ CK perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Ma allora i triangoli ABF e FEC sono equivalenti [perché?] e hanno le altezze FH e CK congruenti, quindi hanno anche le rispettive basi congruenti, cioè $AB \cong EF$ (e quindi ABF e FEC sono anche congruenti). Ma $AF \cong EF$ per ipotesi, quindi $AE \cong 2AB$.

Nicolò Menapace, Classe 2D

Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



a)
Traccio una circonferenza *c* di raggio qualsiasi.
Segno 2 punti *B* e *D* a piacere sulla circonferenza.
Traccio la circonferenza *d* di centro *D* e diametro *BC* (raggio *BD*).
Disegno l'asse della corda *BD* trovando il punto medio *M* dell'arco minore.
Traccio la circonferenza *e* per *M* di centro *D* e trovo l'ulteriore punto d'intersezione *G* tra *c* e *e*.
Disegno la retta f passante per *C* e *G* e segno il punto *A* tra l'intersezione di [di intersezione tra] f e c.
Traccio la retta g perpendicolare a f passante per *C*.
Traccio la semiretta h per *A* e *D* [di origine *A* e passante per *D*].
Segno il punto *E* di intersezione tra g e h.
Disegno il triangolo *ABC*.
L'angolo α è doppio di β perché insistono su archi uno doppio dell'altro.

b)
[[…]]

c)
[[…]]

Samuel Valentini, Classe 2D

Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)
[manca la figura che mostra la costruzione geometrica]

b)
[[…]]

c)
[[…]]

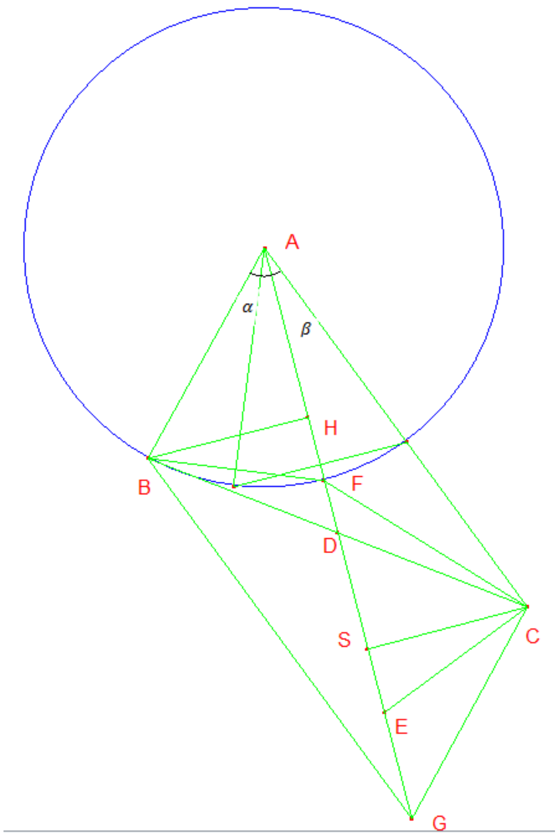
Gioele Zambotti, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)
[impossibile leggere dalla figura allegata la costruzione]

b)
[[…]]

c)
[[…]]

Evelina Porco, Francesco Vitaro, Classe 3B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)

Sfruttando la proprietà delle [della] congruenza degli angoli al centro che sottendo [sottendono] lo stesso arco, abbiamo costruito tre angoli al centro congruenti tramite la simmetria assiale (asse $\overline{AT}$ [*AT*, *T* che punto è?] e asse $\overline{AF}$ [*AF*]), costruendo, così, $\alpha = 2\beta$. Successivamente, per determinare il punto D, abbiamo costruito il parallelogramma ABGC [in che modo?]. Poiché le diagonali in un parallelogramma si dimezzano, il punto D è il punto medio di $\overline{BC}$ [*BC*]. Infine abbiamo costruito la retta $\overline{CE}$ [*CE*] perpendicolare ad $\overline{AC}$ [*AC*].

b)

I triangoli ABD e ADC sono equivalenti poiché hanno:
$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ [BD ≅ DC], per ipotesi D è il punto medio di $\overline{BC}$ [BC];
la stessa altezza che parte dal vertice A ed è perpendicolare a $\overline{BC}$ [BC].
I triangoli BDF e FDC sono equivalenti in quanto hanno:
$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ [BD ≅ DC] per ipotesi;
la stessa altezza che parte dal vertice F ed è perpendicolare a $\overline{BC}$ [BC].
Di conseguenza:
la differenza tra i triangoli ABD e BDF è equivalente alla differenza tra i triangoli ADC e FDC, quindi: ABF è equivalente ad AFC.
I triangoli AFC e FCE sono equivalenti poiché hanno:
$\overline{AF} \cong \overline{FE}$ [AF ≅ FE], perché per costruzione F è il punto medio di AE;
la stessa altezza che parte dal vertice C, perpendicolare al lato $\overline{AE}.$ [AE]
Di conseguenza, per la proprietà transitiva, i triangoli ABF, AFC e FEC sono equivalenti.
Il triangolo FEC è isoscele poiché $\overline{CF},$ [CF] essendo per costruzione la mediana relativa all'ipotenusa nel triangolo rettangolo AEC, è congruente alla metà [FE] dell'ipotenusa [[$\overline{FE}$]].
Abbiamo tracciato dai vertici B e C i segmenti di perpendicolare $\overline{BH}$ e $\overline{CS}$ [BH e CS] ai segmenti $\overline{AF}$ e $\overline{DE}.$ [AF e DE.]
I triangoli ABH e CFS hanno:
$\overline{BH} \cong \overline{CS}$ [BH ≅ CS] perché altezze di triangoli equilateri [equivalenti] relative alle basi congruenti
perché angoli retti
perché entrambi sono il doppio di β ([???] per costruzione e [???] perché angolo esterno al triangolo [isoscele] AFC).
I due triangoli sono congruenti per il secondo principio, di conseguenza:

$$\overline{AB} \cong \overline{FC} \text{ [AB ≅ FC]}$$

c)

Per la proprietà transitiva:
$\overline{AB} \cong \overline{FC} \cong \overline{EF} \cong \overline{AF}$ [AB ≅ FC ≅ EF ≅ AF]
Di conseguenza:
$\overline{AE} \cong 2\overline{AB}$ [AE ≅ 2AB].