FLAT*landia*

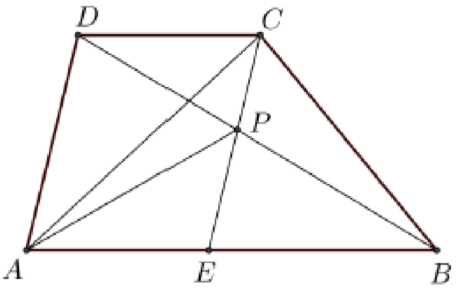
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 10-24 Marzo 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema di Marzo 2014

Sia dato il trapezio $ABCD$. Dal vertice C condurre la parallela al lato AD che incontra il lato AB nel punto E e la diagonale BD nel punto P (vedi figura).



Dimostrare che i triangoli

1) ACD e BCD sono equivalenti,
2) ACD e APD sono equivalenti,
3) AEP e PBC sono equivalenti.

Motivare le risposte.

f

Commento

Sono giunte nove risposte così suddivise: otto da classi seconde di Liceo Scientifico e una da una classe prima di Liceo Classico.

Il problema poneva tre quesiti relativi a una stessa figura costituita da un trapezio, da un vertice del quale veniva tracciata la parallela a uno dei lati obliqui. In ognuno dei tre quesiti si chiedeva di dimostrare l'equivalenza di una coppia di triangoli.

In tutte le risposte vengono affrontati, in modo sostanzialmente corretto, i primi due quesiti anche se non mancano, in alcuni casi, imprecisioni o affermazioni non completamente motivate. Non tutti invece arrivano a risolvere correttamente il terzo quesito: da sottolineare, relativamente a quest'ultimo, l'utilizzo di strategie diverse per giungere alla soluzione.

Come succede da tempo, si fa spesso confusione tra una grandezza geometrica e la sua misura.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS "Pitagora", Rende (CS)

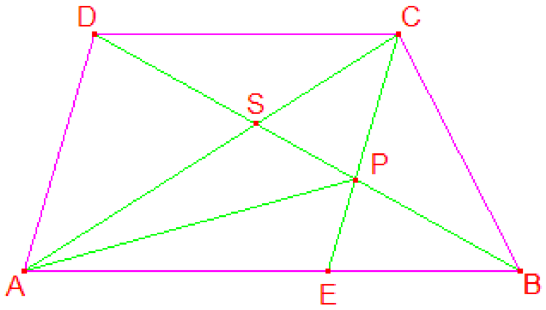
LS "XXV Aprile", Portogruaro (VE)

LC "G. Asproni", Nuoro (NU)

LS Sc. Appl. "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Erika Smeriglio, Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



1)
Considero i triangoli ACD e BCD [essi hanno]:

- [la base] DC in comune;
- DC parallelo ad AB perché basi di un trapezio.

Di conseguenza i triangoli hanno la stessa base e [[sono nella stessa striscia di piano]] [la stessa altezza] allora ACD è equivalente a BCD.

2)
Considero i triangoli ACD e APD [essi hanno]:

- [la base] AD in comune;
- AD parallelo a CE per costruzione.

Di conseguenza i triangoli hanno la stessa base e [[sono nella stessa striscia di piano]] [la stessa altezza] allora ACD è equivalente a APD.

3)
Considero i triangoli DCS e ASP:

- ADC è equivalente a APD;
- DSA è in comune;

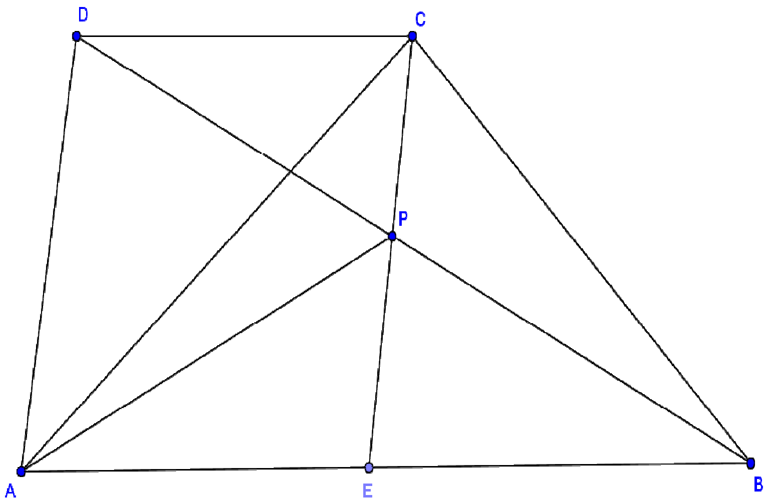
Per sottrazione i triangoli DCS e ASP sono equivalenti:

ADC equivalente APD
DCS + DSA equivalente ASP + DSA [intesa come somma di aree]
DCS equivalente ASP

ADC è equivalente ad AEC perché AC diagonale del parallelogramma ADCE:
per la proprietà transitiva [della relazione di equivalenza tra triangoli] ACE è equivalente a DCB.

ACE equivalente DCB
ASP + APE + SCP equivalente SCP + DSC + CPS [CPB]
APE equivalente CPB

Domenico Corasiniti, Evelina Porco, Classe 2B
Liceo Scientifico “Pitagora”, Rende (CS)



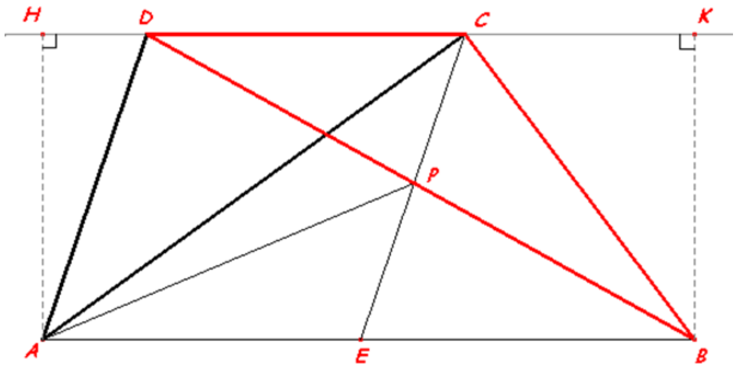
1)
Considero i triangoli ACD e BCD, essi sono equivalenti poiché hanno:
[la base] CD in comune;
l’altezza [relativa] congruente, poiché è la distanza tra due lati paralleli, [[DC// AE]] [DC e AE].

2)
Considero i triangoli ACD e APD, essi sono equivalenti poiché hanno:
[la base] AD in comune;
l’altezza [relativa] congruente, poiché è la distanza tra due segmenti paralleli per costruzione, [[AD// CE]] [AD e CE].

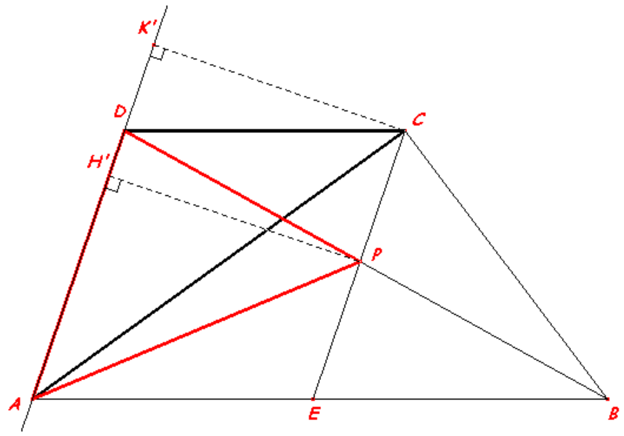
3)
Considero i triangoli AEC e CDB, essi sono equivalenti in quanto hanno:
AE$\cong$DC perché lati opposti di un parallelogramma;
l’altezza [relativa] congruente, poiché è la distanza tra due segmenti paralleli, [[DC// AE]] [DC e AE].
Considero i triangoli DCP e ACP, essi sono equivalenti poiché hanno:
[la base] CP in comune,
l’altezza [relativa congruente] [[in comune]], poiché è la distanza tra due segmenti paralleli per costruzione, [[AD// CE]] [AD e CE].
Sottraendo [[la stessa parte]] [parti equivalenti] da triangoli equivalenti [cioè …], [[ACE$\doteq$ CDB]] risulta che AEP è equivalente a PBC.

Giovanni Anese, Classe 2C
Liceo Scientifico “XXV Aprile”, Portogruaro (VE)

1)
I triangoli *ACD* e *BCD* sono equivalenti poiché hanno la base *CD* in comune e altezze relative *AH* e *BK* congruenti in quanto distanze tra rette parallele (*AB* e *CD*).

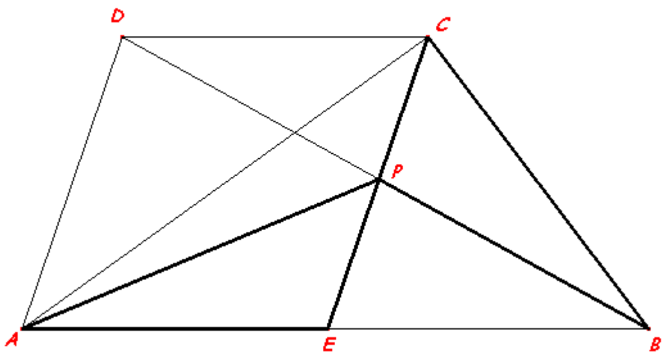


2)



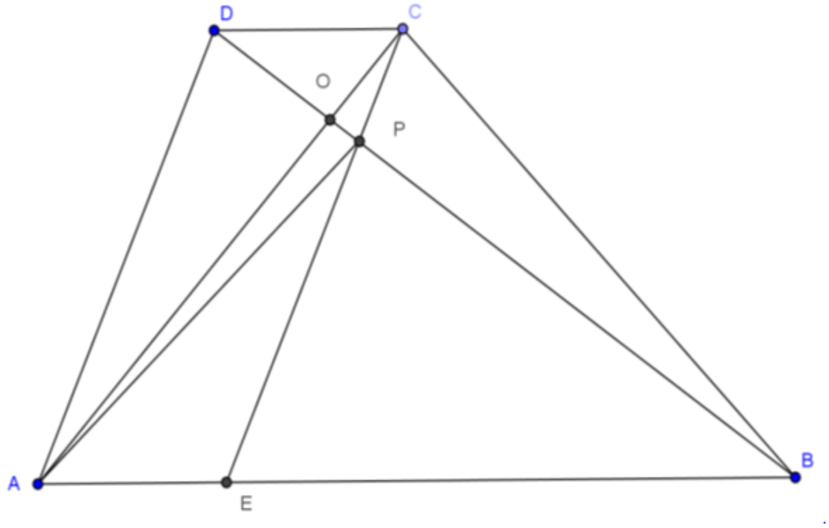
Allo stesso modo i triangoli *ACD* e *APD* sono equivalenti poiché hanno la base *AD* in comune e altezze relative *PH'* e *CK'* congruenti in quanto distanze tra rette parallele (*AD* e *CE*).

3)



Dalle equivalenze ricavate sui primi due punti, si ha che sono equivalenti i triangoli *ACD*, *BCD* e *APD*.
Il triangolo *APD* è equivalente a metà del parallelogramma *AECD* avendo stessa base *AD* e altezza relativa congruente a quella del parallelogramma in quanto distanze tra rette parallele. Pertanto il triangolo *APD* è equivalente alla somma dei due triangoli *AEP* e *PCD* che, insieme al triangolo *APD,* compongono il parallelogramma.
Dall'equivalenza tra la somma dei due triangoli *AEP* e *PCD* con il triangolo *APD* e dall'equivalenza di quest'ultimo col triangolo [*ACD*] [[*BCD*]], possiamo dedurre che $AEP + PCD \stackrel{\circ}{=} BCD$ [area(*AEP*) + area(*PCD*) = area(*BCD*)], ma essendo *BCD* somma dei due triangoli, *BCP* e *PCD,* potremo scrivere $AEP + PCD \stackrel{\circ}{=} BCP + PCD$ [area(*AEP*) + area(*PCD*) = area(*BCP*) + area(*PCD*)] (1), da cui, sottraendo *PCD* [area(*PCD*)] da ciascuno dei due membri della (1), $AEP \stackrel{\circ}{=} BCP$ [area(*AEP*) = area(*BCP*), cioè *AEP* e *BCP* sono equivalenti].

Greta Ghilardi, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

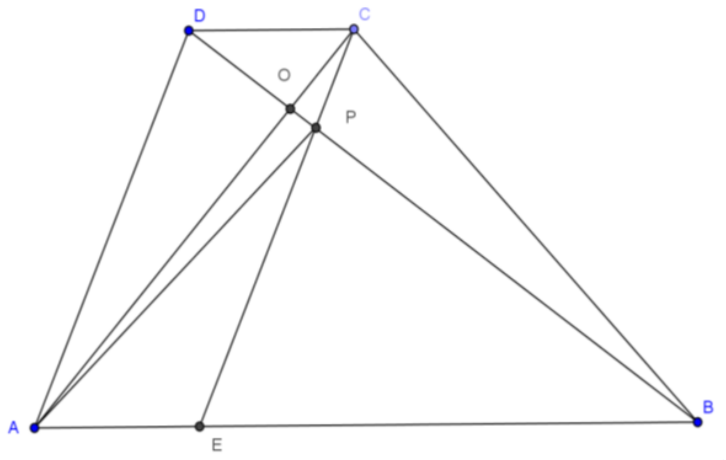


1)
Considero i triangoli ACD e BCD essi hanno:
- altezze congruenti [perché?]
- la base DC in comune
quindi sono equivalenti

2)
Considero i triangoli ACD e APD essi hanno:
- altezze congruenti [perché?]
- la base DA in comune
quindi sono equivalenti

3)
[[…]]

Erika Bertoldi, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)



1)
I triangoli ACD e BCD sono equivalenti perché hanno:

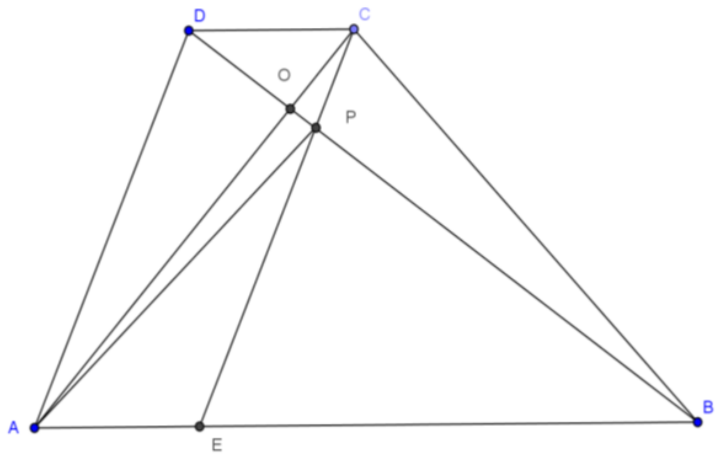
- [la base] DC in comune

-stessa altezza [perché?]

2)
Per ipotesi noi sappiamo che DA//CE, allora AECD è un parallelogramma.
I triangoli ACD e APD sono equivalenti perché hanno:
- [la base] DA in comune
-stessa altezza [[per dimostrazione precedente]] [perché distanza tra rette parallele].

3)
Come dimostrato nel punto 2, APD è equivalente ad ACD.
Sottraendo la parte comune ai due, ossia AOD, ne consegue che APO è equivalente ad OCD.
Inoltre i triangoli AEC e ACD sono congruenti perché metà parallelogramma allora, per dimostrazione del punto 1, AEC è equivalente ad DCB.
Concludendo questi due triangoli sono equivalenti perché hanno:
-il triangolo COP in comune
-i triangoli DCO e APO equivalenti per dimostrazione. [E quindi?]

Paola Maderna, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)



1)
I triangoli ACD e BCD sono equivalenti perché hanno:
- [la base]DC in comune
- Stessa altezza [perché?]

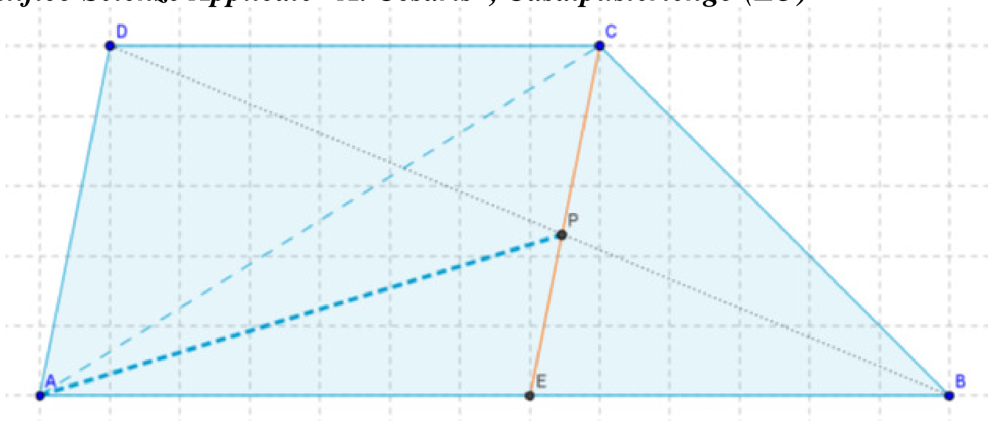
2)
Per ipotesi, sappiamo che DA//CE => AECD è un parallelogramma.
[[I triangoli]] [Il triangolo] ACD è equivalente a APD perché ha:
- [la base] DA in comune
- Stessa altezza [[per dimostrazione precedente]] [perché è la distanza tra due rette parallele]

3)
Come dimostrato nel punto 2, APD è equivalente ad ACD
Sottraendo la parte comune ai due, ossia AOD, si può notare che APO è equivalente ad OCD.
I triangoli AEC e ACD, invece, sono congruenti perché metà parallelogramma.
Per dimostrazione 1, quindi, AEC è equivalente a DCB.
[[Questi due triangoli sono equivalenti perché hanno:]]

- COP in comune
- DCO e APO equivalenti per dimostrazione

[E quindi?]

Sara Maffina, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

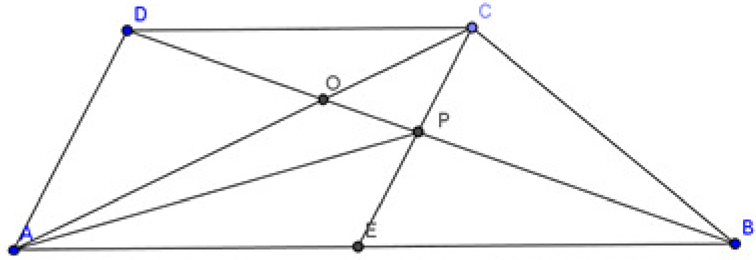


1)
I triangoli considerati, ACD e BCD sono equivalenti perché hanno la stessa base DC e altezze [relative] congruenti (segmento di perpendicolare tra le rette parallele contenenti i segmenti DC e AB)

2)
Analogamente i triangoli considerati, ACD e APD sono equivalenti perché hanno la stessa base AD e altezze [relative] congruenti.

3)
Dato che ADC è equivalente a DCB e DCA è equivalente a AEC perché è la metà del parallelogramma AECD, di conseguenza anche AEC è equivalente a BCD. Inoltre PAC è equivalente a PDC (stessa base PC e altezza [relativa] congruente), quindi, sottraendoli ad AEC e a CPB [CDB] [rispettivamente] risultano due triangoli equivalenti [AEP e PBC] perché ho tolto altri due triangoli equivalenti.

Luca Marzatico, Classe 2
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

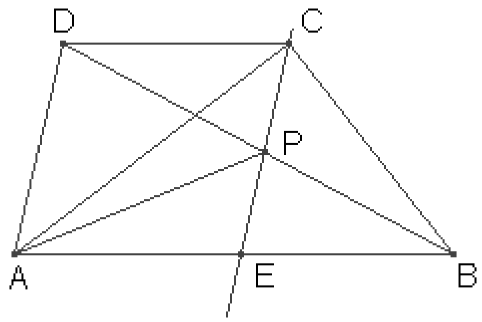


1)
I triangoli ACD e BCD sono equivalenti perché hanno la stessa base CD e le altezze [relative] congruenti (distanza tra AB e CD).

2)
I triangoli ACD e APD sono equivalenti perché hanno la stessa base AD e le altezze [relative] congruenti (distanza tra AD e CE).

3)
Tenendo conto che APD è equivalente a ACD, AOD è in comune, quindi DOC è equivalente a AOP.
La diagonale AC divide il parallelogramma AECD in due triangoli equivalenti AEC e ACD. Per la proprietà transitiva [della relazione di equivalenza tra triangoli] visto che ACD è equivalente a BCD e ACD è equivalente AEC, allora AEC è equivalente a BCD.
Tenendo conto che DOC è equivalente a AOP, come dimostrato in precedenza, e che COP è in comune tra i triangoli AEC e BCO, AEP è equivalente a BCP.

Agostino Pigozzi, Classe 1C
Liceo Classico "G. Asproni", Nuoro (NU)



1)
I triangoli ACD e BCD sono tra loro equivalenti in quanto [[giacciono sulla]] [hanno la] stessa base CD e hanno per altezza relativa a CD la stessa altezza, coincidente con quella del trapezio ABCD.

2)
Il quadrilatero AECD è un parallelogramma in quanto, per ipotesi, ha i lati opposti a due a due paralleli. I triangoli ACD e APD sono perciò equivalenti in quanto [[giacciono sulla]] [hanno la] stessa base AD e hanno per altezza relativa a AD la stessa altezza, coincidente con quella del parallelogramma.

3)
La mia intenzione, per risolvere il terzo quesito, è dimostrare che i triangoli ABP e EBC sono equivalenti per dedurne così l'equivalenza dei triangoli AEP e PBC [tramite sottrazione di..].
Supponiamo che ABP e EBC siano equivalenti (cioè suppongo che la tesi sia vera), indico con h l'altezza del triangolo ABP relativa al lato AB mentre indico con h + H l'altezza del triangolo EBC, allora si avrà che AE*h=EB(H+h)-EB*h [$\overline{AE}\cdot h=\overline{EB}\cdot(H+h)-\overline{EB}\cdot h$] ovvero che AE*h=EB(H+h-h) [$\overline{AE}\cdot h=\overline{EB}\cdot(H+h-h)$] cioè che AE*h=EB*H [$\overline{AE}\cdot h=\overline{EB}\cdot H$].
Da quest'ultima relazione consegue che AE/H=EB/h [$\overline{AE}/H=\overline{EB}/h$].
Per risolvere il quesito basta quindi dimostrare che AE/H=EB/h [$\overline{AE}/H=\overline{EB}/h$].
Poiché AECD è un parallelogramma AE è congruente a DC. Devo quindi dimostrare che DC/H=EB/h [$\overline{DC}/H=\overline{EB}/h$] ; ma i triangoli DPC e EBP sono simili fra loro infatti gli angoli

D^PC [$D\widehat{P}C$] e E^PB [$E\widehat{P}B$] sono fra loro congruenti in quanto opposti al vertice, gli angoli C^DB [$C\widehat{D}B$] e D^B E [$D\widehat{B}E$] sono fra loro congruenti poiché quando due rette parallele sono tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti (ciò vale solo se è vero il V postulato di Euclide). Per lo stesso motivo gli angoli D^CE [$D\widehat{C}E$] e C^EB [$C\widehat{E}B$] sono fra loro congruenti. DPC e EBP sono perciò simili fra loro e le altezze relative a lati [[simili]] [corrispondenti] sono [[fra loro simili]] [in proporzioni con questi] ; poiché DC/EB=H/h [$\overline{DC} / \overline{EB} = H / h$] si ha che DC/H=EB/h [$\overline{DC} / H = \overline{EB} / h$].